П Р Е Д Е Л Ы

Предел функции в точке a.

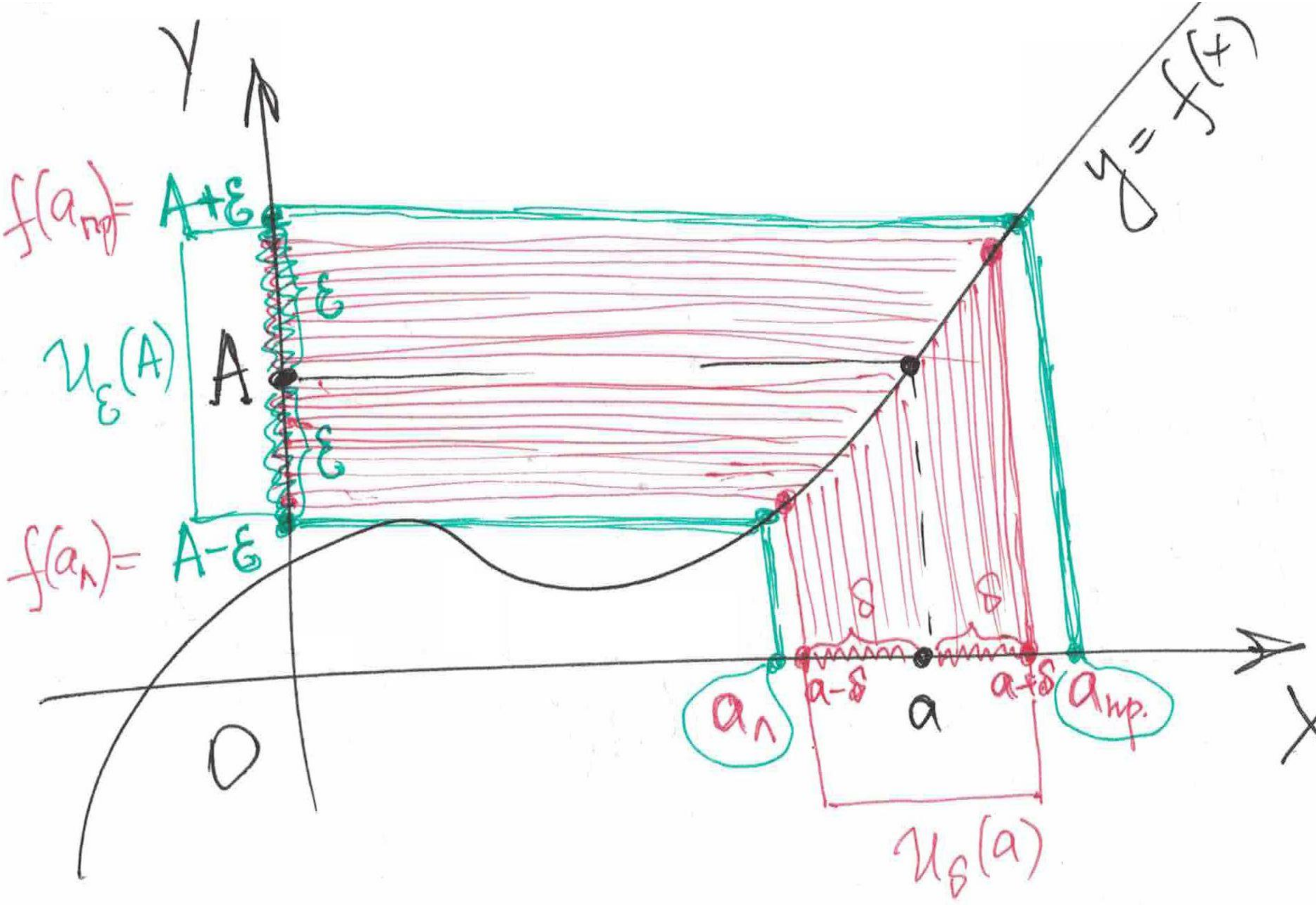
I. Точка – конечная (т.е. $a \neq \infty$):

Число A называется **пределом** функции $y = f(x)$ в конечной точке a $\left(A = \lim\limits_{x \to a} f(x)\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

1) $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ такая, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)$

$$f(x) \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(A)$$

или



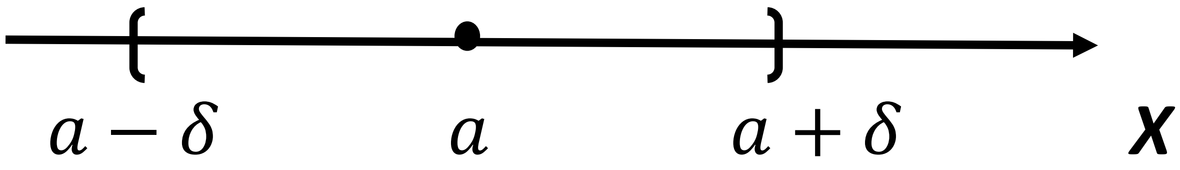
Y
$y=f(x)$
$f(a_{np})= A+\varepsilon$
ε
$\mathcal{U}_\varepsilon(A)$
A
ε
$f(a_n)= A-\varepsilon$
δ
δ
a_n
$a-\delta$
a
$a+\delta$
$a_{np.}$
X
O
$\mathcal{U}_\delta(a)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Вспомним из школы, как решается неравенство $|x - a| < \delta$:

$$\begin{cases} x \geq a \\ x < a + \delta \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < a \\ x > a - \delta \end{cases}$$

На числовой прямой OX получаем интервал $(a - \delta, a + \delta)$:



II. Точка a – бесконечная

Знак ∞ НЕ указывает направление бесконечнос

$\Longrightarrow$ Всегда, когда важно, нужно ставить знак (т. е. направление) бесконечности

Примеры: 1) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

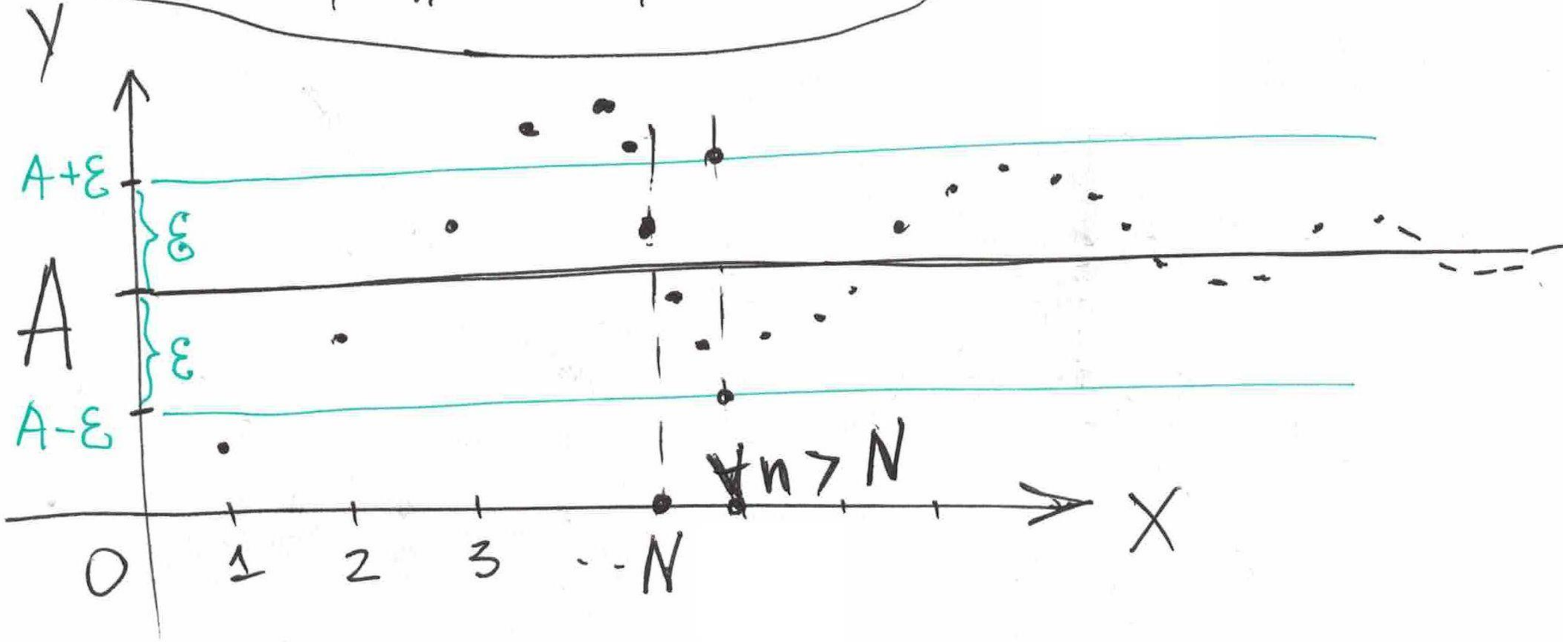
<u>Определение 1.</u> Число A называется <u>пределом последовательно</u>

$\{x_n\}$ $\left(A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, начиная с которо

(т.е. $\forall n > N$)

$|a_n - A| < \varepsilon$



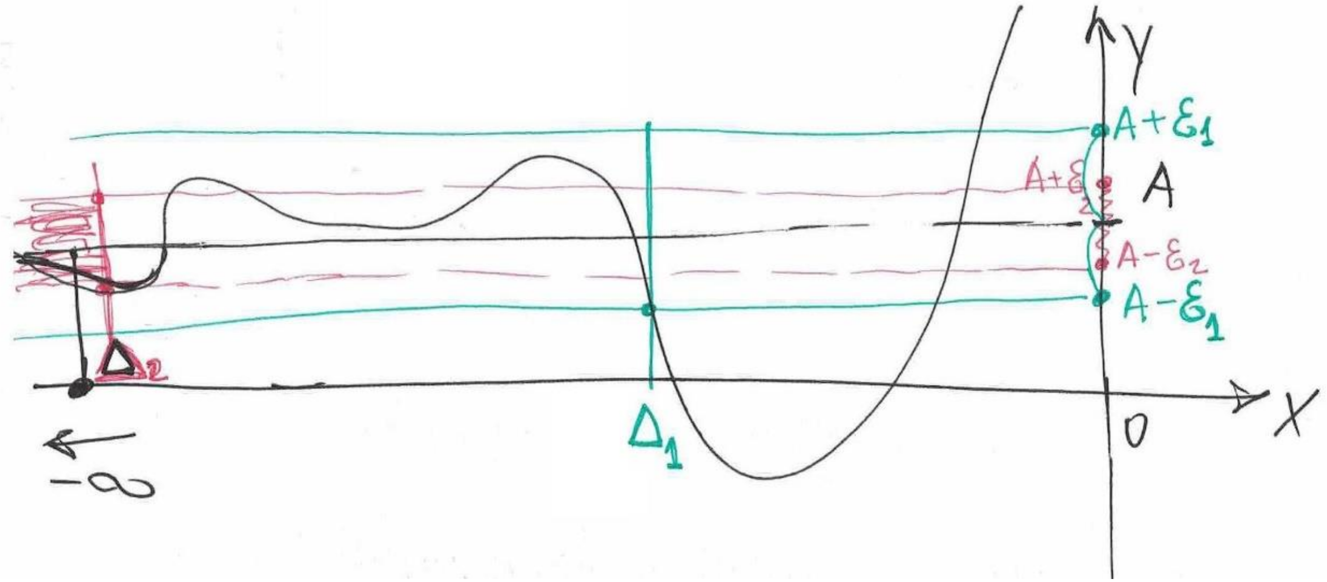
Определение 2. а) Число A называется пределом $y = f(x)$ при $x \to +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta > 0$ такое, что

$\forall x > \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$

б) Число A называется пределом $y = f(x)$ при $x \to -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta < 0$ такое

$\forall x < \Delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$



Свойства пределов

1°. $$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x),$$

Если они $\exists$.

2°. $$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x),$$

Если они $\exists$.

3°. $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},$$

если они $\exists$.

Вычисление пределов для многочленов и дробно-рациональных функций.

I. На бесконечности:

$\boxed{\text{Поведение многочлена на бесконечности определяется его старшим членом:}}$

① $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-3x^2+x-100)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2x^3=\infty$

② $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^4-x+50)=\lim\limits_{x\to\infty}3x^4=+\infty$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+x-100}{3x^4-x+50}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{3x^4}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

$\to 0$

а) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=+0$$

б) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=-0$$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x+50}{2x^3-3x^2+x-100}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{2x^3}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}x=\frac{3}{2}\cdot(\infty)=\infty$$

II. В конечной точке:

① $\lim\limits_{x \to 2} (2x^3 - 3x^2 + 1) = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 1 = 5$ Ответ.

$\frac{a}{b}$ ② $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^5 - 4x^4 + 5}{2x^6 + 12x^2 - 1} = \frac{3 - 4 + 5}{2 + 12 - 1} = \frac{4}{13}$ Ответ.

$\frac{0}{c}$ ③ $\lim\limits_{x \to 10} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^3 + 1} = \frac{0}{1001} = 0$ Ответ.

$\frac{c}{0}$ (4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^3 - 45x + 10}{x^2 - 25} = \dfrac{125 - 225 + 10}{0} =$

$= -90 \cdot \dfrac{1}{0} = \infty$

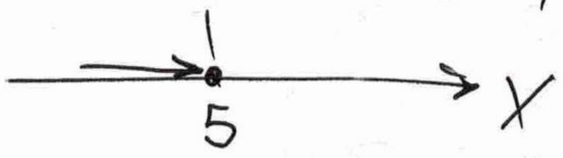
$$\boxed{\dfrac{1}{0} = \dfrac{1}{\text{очень маленькое}} = \text{очень большое}}$$

а) Если $x \to 5+0$, то $x^2 - 25 > 0$

$\Downarrow$

при $x \to 5+0$ $\quad \dfrac{1}{x^2 - 25} \to +\infty$

б) Если $x \to 5-0$, то $x^2 - 25 < 0$



$\Downarrow$

$\dfrac{1}{x^2 - 25} \to -\infty$

⑤ В пределах $\boxed{\text{типа } \frac{0}{0}}$ ответ сразу писать НЕЛЬЗЯ!!!

$\left[\frac{0}{0}\right]$ 1. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2+2x+4}=\frac{2}{4+4+4}=\frac{1}{6}$$ Ответ.

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{2x^2-3x+1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2-3x+2)}{2\cancel{(x-1)}\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-3+2}{1} = 0$$

Ответ.

а)
$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+5x-2 & x-1 \\ \hline -\ x^3-x^2 \qquad\qquad & x^2-3x+2 \\ \hline -3x^2+5x \qquad & \mathcal{D}=9-8 \\ -\ -3x^2+3x \qquad & \ldots \\ \hline 2x-2 & \\ 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

б)
$$2x^2-3x+1 = 2(x-x_1)(x-x_2) =$$
$$\underbrace{x_1=1 \ \text{ и } \ x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}}_{\Downarrow\ x_2=\frac{1}{2}}$$
$$= 2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

3. $$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(2x-1)}{\cancel{(x-1)}(x^2 - 3x + 2)} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$

Борьба с радикалами

I. ЗАМЕНА:

$$\lim_{x\to 81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = ???$$

1) пусть $\sqrt[4]{x} = t$, тогда

а) если $x \to 81$, то $t \to \sqrt[4]{81} = 3$

б) $\sqrt{x} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = t^2$

$\Rightarrow$ имеем $\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{3-t}{9-t^2} =$

$$= \lim_{t\to 3}\frac{3-t}{(3-t)(3+t)} = \lim_{t\to 3}\frac{1}{3+t} = \frac{1}{6}$$

Ответ.

II. Игра на сопряжённости:

1. $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=???$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)}{(\sqrt{x}-2)}\cdot\frac{(\sqrt{2x+1}+3)}{\sqrt{2x+1}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\overbrace{2x+1-9}^{2\cancel{(x-4)}})}{\cancel{(x-4)}}\cdot\frac{\overbrace{\sqrt{x}+2}^{4}}{\underbrace{\sqrt{2x+1}+3}_{6}}=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Ответ.

② $$\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = ???$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x \to -8} \frac{(\sqrt{1-x}-3)}{(2+\sqrt[3]{x})} \cdot \frac{(\sqrt{1-x}+3)}{\underbrace{\sqrt{1-x}+3}_{\to 6}} \cdot \frac{\overbrace{(4-2\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}^{4+4+4=12}}{(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$=\lim_{x \to -8} \frac{\overset{-1}{\cancel{(1-x-9)}}}{\cancel{(8+x)}} \cdot \frac{\cancel{12}\,^{2}}{\cancel{6}} = -2$$ Ответ.

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Или: при $x \to 0$ $\sin x \sim x$

В общем виде: Там, где аргумент синуса есть беск. малая, синус ведет себя как его аргумент:

① $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x^2-25)}{x-5} \overset{\text{I}^{\text{й}}\text{ЗП}}{=} \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5} =$

$= \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{\cancel{x-5}} = 10$ Ответ.

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}\overset{\text{I}^{\text{й}}\text{зп}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$ Ответ.

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\overset{\text{I}^{\text{й}}\text{зп}}{=}\cancel{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cancel{2}}\cdot\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

Ответ.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \infty \Rightarrow$ У-У-У!!!...

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x \cdot \cancel{\cos x}}\right) = 1$

$\cos x \to 1$

$I^{ч}$ ЗП

УРА!!!...

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$ [ЗАМЕНА:
1) $t = \arcsin x \Rightarrow$
$x = \sin t$
2) если $x \to 0$, то $t \to 0$]

$\Rightarrow$ имеем $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin t} = 1 \Rightarrow$ УРА!!!...

4) аналогично: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x^2+2x-3)}{\operatorname{tg}(x^2-1)}$ $\stackrel{\text{ЗП}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \dfrac{4}{2}$

$= 2$

Ответ.

$$\text{(5)}\quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{\sin x}\,(1 - \cos x)}{\underset{\to 1}{\cos x} \cdot \cancel{\sin^3 x}_{\ \sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{x \cdot x} = \frac{1}{2}$$

Ответ.

<u>Дома</u>: 1.231 – 1.237

1.272, 273, 275, 277, 280, 285, 286

1.288, 289, 290, 292, 294, 297, 301

1.303 – 307, 309, 311, 316.