Олимпиада кафедры Математических и компьютерных методов анализа

2016 год

1. Два абсолютно упругих одинаковых обруча требуется с помощью нерастяжимых нитей связать так чтобы получилась жесткая фигура, в которой обручи не касаются друг друга. (Толщиной обручей и нитей пренебречь. Трение абсолютное)

2. Для изготовления трубы радиуса r сварщики воспользовались полосой жести шириной $2\pi r$. В самом начале сварки дрогнули руки и стороны шва сдвинулись друг относительно друга на величину Δ. Каким получился радиус трубы?

3. Бильярдные шары числом 84 уложены на горизонтальном столе в правильную треугольную пирамиду с семью шарами вдоль ребра. На каждом шаре написано число, сумма любых четырех из которых, относящихся к шарам при вершинах пирамиды и ее правильных подпирамид, равна нулю. Правильной подпирамидой считается верхний шар вместе с несколькими подряд идущими слоями под ним, а также подпирамиды, получающиеся из таких всевозможных параллельными переносами. Какие числа написаны на шарах, если на одном из них написана единица?

4. Числа Фибоначчи $F_n, n \in \mathbb{Z}$, определяются правилом: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \in \mathbb{Z}, F_0 = 0, F_1 = 1$. Для каких значений параметра $i \in \mathbb{Z}$ уравнение в целых числах $F_{x+i} = x$ имеет ровно два решения?

5. Решить в целых числах уравнение $3^n = 2^m + 1$

6. В загоне круглой формы радиуса R ковбой хочет заарканить коня веревкой длины l. Максимальная скорость коня V. Требуется определить значение максимальной скорости v_0 для ковбоя такое, что: при $v > v_0$ имеется возможность заарканить коня; при $v < v_0$ у коня есть возможность оставаться свободным.

7. Двое школьников выясняют, кому из них дежурить. В их распоряжении имеется монета, у которой, к сожалению, орел выпадает реже решки, но, к счастью, иногда он все же выпадает. Как им добиться справедливость, исключив взаимные претензии?

8. Трое школьников выясняют, кому из них дежурить. В их распоряжении имеется монета, у которой орел и решка выпадают одинаково часто. Как им добиться справедливости, исключив взаимные претензии?

9. Трое школьников выясняют, кому из них дежурить. В их распоряжении имеется монета, у которой, к сожалению, орел выпадает реже решки, но, к счастью, иногда он все же выпадает. Как им добиться справедливости, исключив взаимные претензии?

10. Четверо учредителей фирмы после выходных обнаружили разбитую фару их автомобиля. Если это сделал посторонний, то нужен забор на сумму S, если же кто-то один из них в выходные, то ремонт фары на сумму $s \ll S$. Виновник не сознается, так как $s > \frac{S}{4}$ и это чревато увольнением за нарушение договора. Как им узнать, разбил посторонний или кто-то из них, причем в последнем случае каждый из трех других учредителей не узнает виновника. (Сговор исключен. Каждый в отдельности заинтересован в правильности решения.) Никаких подручных вычислительных средств нет. Все должно решаться на заасфальтированной площадке 20 м $\times$20 м.

11. Рассматриваются все бесконечные последовательности из 0 и 1. В каждой последовательности выделен конечный отрезок из первых подряд идущих знаков, при этом никакой отрезок не может быть началом более длинного отрезка, выделенного в другой последовательности. Отрезки одинаковой длины, выделенные в разных последовательностях могут совпадать. Доказать, что длины отрезков ограничены.

12. Для рисования на большой прямоугольной доске используется мел с квадратным сечением со стороной 1 см. При движении мела стороны сечения всегда параллельны краям доски. Как начертить выпуклый многоугольник площадью 1 м^2 с наименьшей площадью границы (площадь границы не входит в полезную площадь многоугольника)?

13. Прочитать

т	с	я	о	л	о	к	р
е	а	в	д	ь	п	в	и
и	т	к	е	у	д	о	й
ь	т	с	т	м	и	р	п
м	п	е	о	а	о	й	и
о	к	а	н	н	н	а	т
т	и	т	а	и	к	л	ь
а	м	е	м	м	с	н	я

14. В углах квадрата со стороной 269 мм расположены прямоугольники со сторонами 100 мм и 90 мм. Можно ли перемещением прямоугольников внутри квадрата без пересечения друг с другом поменять место расположения каждого прямоугольника на симметричное относительно центра квадрата?

15. Формулировка некоторого геометрического утверждения была вписана в клетки таблицы 10×10 построчно слева направо, начиная с верхней левой клетки. Знак переноса на следующую строку не ставился, но между соседними словами одной строки помещалась пустая клетка. Криптоша решил переставлять буквы в отдельных взятых наугад столбцах, сдвигая их все на одну позицию вверх и перенося самую верхнюю букву вниз (при этом пустую клетку он также считал буквой). Иногда он менял местами

сразу все строки, симметричные относительно средней линии, а именно 1-ю с 10-й, 2-ю с 9-й и т.д., после чего снова брался за передвижение букв в столбцах, взятых наугад. В результате таблица приняла представленный на рисунке вид. Прочитайте исходное геометрическое утверждение.

а	л	п	н	в	и		в	т	р
е	о	с	н	л	я		о	л	т
п		я	л	ы	е	о	ы	т	у
е	о	а	о	щ	д	р	р	а	е
н	р	у	и		о	н	с	т	в
п	к	и	м	е	ь		р		
е	в	о	ю	т	х	х	н	а	с
д	с	е	х	и	и	е	о	я	
о	к	ь	т	ы	п	ь	п	е	н
с	ж	с	с	е	л		о	о	о

16. Имеется клетчатая бумага неограниченных размеров со стороной клетки, равной 1. Шаблоном размера k называется всякая плоская фигура, составленная путем соединения концами друг с другом k параллельных или перпендикулярных отрезков длины 1. В точке соединенися могут сходиться два, три и четыре отрезка. Внутренние точки отрезков и точки соединения параллельных отрезков называются внутренними точками шаблона. Требуется найти все шаблоны, которыми можно покрыть все линии клетчатой бумаги (шаблоны можно поворачивать и переворачивать). При покрытии разрешается использовать шаблоны одного вида, причем никакие два шаблона не могут иметь общих внутренних точек. а) $k = 2$; б) $k = 3$.