Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям
25 апреля 2024 года

1. (Е. А. Асташов) Решите уравнение: $\big(1 + 2x^2 y\cos(x^2 y)\big)\,dx + x^3\cos(x^2 y)\,dy = 0.$

   Решение.
   Для уравнения подбирается интегрирующий множитель от одной переменной $\mu(x) = 1/x$, после чего уравнение приобретает вид $d\big(\sin(x^2 y) + \ln|x|\big) = 0$. При домножении на μ теряется решение $x = 0$.

   Ответ: $\sin(x^2 y) + \ln|x| = C;\ x = 0.$

2. (И. В. Филимонова) **а)** Покажите, что существует такая непрерывная функция f, что функция
$$x(t) = e^{1/t} + \frac{1}{2t}$$
на всей своей области определения удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$
б) Есть ли у этого дифференциального уравнения (с такой функцией f, как указано в п. а) решение, определённое на всей прямой $\mathbb{R}$?
в) Найдите все решения этого уравнения (с такой функцией f, как указано в п. а).

   Решение/Ответ: а) вытекает из монотонности, б) $x = 1$, в) $x(t) = e^{1/(t+C)} + \frac{1}{2(t+C)}$, $x = 1$

3. (Е. А. Асташов) Дано уравнение $y' - 2xy + 2y^2 = 1$.

   а) Решите это уравнение, зная, что у него есть решение $y = x$.

   б) Существует ли такое число $\delta > 0$, что график каждого решения $y = \varphi(x)$ $(x \geqslant 0)$ данного уравнения со свойством $|\varphi(0)| < \delta$ имеет наклонную асимптоту $y = x$?

   в) Будет ли решение $y = x$ $(x \geqslant 0)$ данного уравнения асимптотически устойчивым?

   Решение.
   Данное уравнение является уравнением Риккати, и $y = x$ — его частное решение. С помощью замены $y = x + z$ оно приводится к уравнению Бернулли $z' + 2xz + 2z^2 = 0$, которое имеет решения $z = 0$ и $z = \dfrac{1}{e^{x^2}\big(C + 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\big)}$, где $C = 1/z(0)$ (в частности, при $C = 0$ получается решение, стремящееся к бесконечности при $x \to 0+0$, поэтому для решений с конечными значениями при $x = 0$ имеем $C \neq 0$). Устойчивость решения $y = x$ исходного уравнения совпадает с устойчивостью нулевого решения полученного уравнения Бернулли, а стремление решения исходного уравнения (с некоторым значением при $x = 0$) к решению $y = x$ равносильно стремлению решения полученного уравнения Бернулли (с тем же значением при $x = 0$) к нулю.

   Функция $\Phi(x) = 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ при $x \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом $2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. Поэтому при $C > 0$ (что равносильно $z(0) > 0$) и при $C < -\sqrt{\pi}$ (что равносильно $-1/\sqrt{\pi} < z(0) < 0$) функция

$\Psi_C(x) = e^{x^2}\bigl(C + 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\bigr)$ не обращается в ноль при $x \geq 0$. Таким образом, решение $z = 1/\Psi_C(x)$ определено при $x \in [0, +\infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Поэтому ответ на вопрос пункта б) положительный: можно взять $\delta = 1/\sqrt{\pi}$.

При $C > 0$ функция Ψ_C положительна и монотонно возрастает по x при $x \geqslant 0$, а решение $z = 1/\Psi_C(x)$ положительно, монотонно убывает и ограничено сверху числом $z(0) = 1/C$.
Рассмотрим теперь случай $C < -\sqrt{\pi}$. Заметим, что в этом случае $\Psi'_C(x) = 2e^{x^2}\left(x\bigl(C + 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt\bigr) + e^{-x^2}\right) =: 2e^{x^2}\Theta_C(x)$ и $\Theta'_C(x) = C + 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt < 0$. Поскольку $\Theta_C(0) = 1 > 0 > \Theta_C(+\infty) = -\infty$, то существует единственная точка $x_1 \in (0; +\infty)$, в которой Θ_C и Ψ'_C обращаются в ноль и меняют знак с плюса на минус, а значит, x_1 — точка максимума функции Ψ_C и минимума (отрицательного) функции $1/\Psi_C$. Нетрудно также проверить, что $\Psi_C(x_1) = -1/x_1$. Кроме того, $\Theta_C(-2/C) = -2 - 4C^{-1}\int_0^{-2/C} e^{-t^2}\,dt + e^{-4/C^2} \leqslant -2 - 2C^{-1}\sqrt{\pi} + 1 < 0$ при $C < -2\sqrt{\pi}$. Значит, при $C < -2\sqrt{\pi}$ (то есть при $(-2\sqrt{\pi})^{-1} < z(0) < 0$) имеем $x_1 < -2/C$, $z(x_1) = 1/\Psi_C(x_1) = -x_1 > 2/C = 2z(0)$. Значит, если $|z(0)| < \varepsilon/2$, то при всех $x \geqslant 0$ имеем $|z(x)| \leqslant |z(x_1)| = |-x_1| = |2z(0)| < \varepsilon$. Из всего сказанного следует, что решение $z = 0$ ($x \geqslant 0$) уравнения Бернулли, а значит, и решение $y = x$ ($x \geqslant 0$) исходного уравнения, будет устойчивым по Ляпунову, а с учётом результата пункта б — также асимптотически устойчивым.

Ответ: а) $y = x$ и $y = x + \dfrac{1}{2e^{x^2}\int e^{-x^2}\,dx}$ (неопределённый интеграл включает в себя аддитивную константу); **б)** да; **в)** да.

4. (В. В. Рогачёв) Даны четыре системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 9\\ 9 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}6 & 2{,}4\\ -2{,}4 & 2{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Укажите среди них все пары систем, фазовые портреты которых (без учёта направлений движения по траекториям) можно перевести друг в друга аффинными преобразованиями плоскости.

Ответ. Первая и вторая.

Решение. Все эти системы — сёдла. Аффинными преобразованиями можно совместить асимптоты двух сёдел, но это ещё не значит, что рисунки совпадут, так как у решений разные (хотя и на первый взгляд похожие) формы. Форма решения (т.е. «степень» гиперболы) определяется отношением собственных значений матрицы, и эту величину не изменить аффинным преобразованием. Так что совместить можно только те рисунки, у которых одинаковые отношения собственных значений друг к другу.

Собственные значения матриц: 6 и -3, -2 и 4, 1 и $-1, 2$ и -3, поэтому совместить можно только портреты первых двух систем.

Примечание. В матрице есть место для 4-х параметров, и множество систем типа «седло» четырёхпараметрическое:

1-й параметр: направление асимптоты роста,
2-й параметр: направление асимптоты убывания,
3-й параметр: отношение собственных значений, т.е. степень гиперболы,
4-й параметр: скорость движения точки по траекториям фазового портрета (на рисунках этот параметр не сказывается).

5. (А. М. Асташов, И. В. Асташова) Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — такая функция класса C^1, что $\operatorname{sgn} f(x,y) = \operatorname{sgn} y$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Может ли быть, что у уравнения $y' + f(x,y) = 0$:
а) существует максимально продолженное вправо решение, не стремящееся к нулю при $x \to +\infty$;
б) единственное стремящееся при $x \to +\infty$ к нулю решение — тождественный ноль?

Ответ: а) да; б) да.

Решение. Пусть $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}$. Разделяя переменные, найдем общее решение рассматриваемого уравнения: $y(x) = y(0) \exp \operatorname{arctg} x$.

Оно стремится к $y(0)\exp(\pi/2)$ при $x \to +\infty$. Этот предел равен 0 только при $y(0) = 0$, т. е. при $y(x) \equiv 0$.

Возможны и другие примеры $f(x,y)$.

6. (И. Н. Сергеев) Какие свойства линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами переносятся на аналогичные уравнения с переменными коэффициентами и характеристическим многочленом $L(\lambda, t)$ с коэффициентами, зависящими от t:

а) многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ тогда и только тогда, когда функция $y = e^{\lambda_0 t}$ — решение уравнения;

б) если многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности $k > 1$, то функция $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ — решение уравнения;

в) если функция $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ при целом $k > 1$ является решением уравнения, то многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности k?

Ответ: а),б) да; в) нет.

Решение. А. Подстановка функции $y = e^{\lambda_0 t}$ в уравнение и сокращение на $e^{\lambda_0 t}$ даёт уравнение $L(\lambda, t) = 0$.

Б. Если оператор уравнения имеет вид $L(d/dt, t) = l(d/dt, t) \cdot (d/dt - \lambda_0 I)^k$, то его применение к функции $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ даёт $L(d/dt, t)y = l(d/dt, t)\, 0 = 0$.

В. Контрпример: функция $y = te^t$ $(k = 2)$ является решением уравнения 1-го порядка $t\dot{y} - (t+1)y = 0$, характеристический многочлен $L(\lambda, t) = t\lambda - (t+1)$ которого имеет переменный корень $\lambda = 1 + 1/t \neq 1$.

7. (И. Н. Сергеев) Верно ли, что для любой замкнутой выпуклой области $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и любой точки $(t_0, x_0) \in G$ дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x), \quad (t,x) \in G, \quad f \in C^1(G),$$

имеет интегральную кривую, определённую на некотором замкнутом временно́м промежутке и содержащую эту точку хотя бы на конце этого промежутка?

Ответ: нет.

Решение. Например, задача Коши

$$\dot{x} = 0, \quad (t, x) \in G \equiv \{(t, x) \mid t^2 + x^2 \leq 1\}, \quad x(0) = 1,$$

не имеет ни одного решения, определённого на промежутке.

8. (В. В. Быков) Матрица линейной системы $\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, +\infty)$, непрерывна и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr} A(\tau)\, d\tau = 0.$$

Пусть $L : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ – непрерывно дифференцируемая и невырожденная при всяком $t \geq 0$ матричнозначная функция, причём

$$\sup_{t \geqslant 0} \big(|L(t)| + |L^{-1}(t)|\big) < \infty.$$

Чему может быть равна величина

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr} B(\tau)\, d\tau,$$

где $B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)$, $t \geqslant 0$?

Решение. Из формулы Лиувилля – Остроградского получаем для фундаментальной матрицы X системы A равенство

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \det X(t) = 0.$$

Заметим, что $Y(t) \equiv L^{-1}(\cdot)X(\cdot)$ – фундаментальная матрица системы B. Из ограниченности L и L^{-1} следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \det Y(t) = 0,$$

откуда по формуле Лиувилля – Остроградского получаем, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr} B(\tau)\, d\tau = 0.$$

9. (В. В. Рогачёв) Рассмотрим квадратичную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \\ Dx^2 + 2Exy + Fy^2 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, таковы, что $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ и $D^2 + E^2 + F^2 > 0$.

а) Сколько решений, имеющих фазовую траекторию в виде луча, может быть у такого уравнения? Как эти лучи могут быть расположены на плоскости?

б) Каким образом устойчивость нулевого решения системы зависит от коэффициентов A, B, C, D, E, F?

в) Может ли система при каких-либо значениях коэффициентов иметь семейство замкнутых траекторий, обходящих вокруг начала координат?

г) Может ли система при каких-либо значениях коэффициентов иметь семейство спиральных траекторий, закручивающихся вокруг начала координат?

Решение. Предположим, есть решение в виде луча, тогда его можно записать в виде $y = \alpha x$. Саму систему уравнений можно записать так:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{Dx^2 + 2Exy + Fy^2}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}.$$

Если подставить $y = \alpha x$ в уравнение, получится такое выражение:

$$\alpha = \frac{D + 2E\alpha + F\alpha^2}{A + 2B\alpha + C\alpha^2}$$

Или, равносильное ему

$$\alpha(A + 2B\alpha + C\alpha^2) = D + 2E\alpha + F\alpha^2.$$

Слева стоит кубическая (или меньшей степени) парабола, проходящая через ноль, справа — произвольная квадратичная парабола, и пересечься они могут не более чем в трёх точках, и эти точки могут располагаться где угодно. Также возможен вариант, когда левая и правая части полностью совпадают, то есть в таком случае годится любая α.

Дальше на все вопросы отвечает одно наблюдение — если заменить $x \to -x$, а потом $y \to -y$, то значения правой части системы не изменятся никак (в отличие от линейного случая, где такая замена поменяла бы знак правой части). В двух симметричных относительно (0,0) точках векторы скорости будут совершенно одинаковые, а сам фазовый портрет после центральной симметрии перейдёт сам в себя, но изменит направление стрелок. В линейном случае фазовые портреты центрально симметричны с учётом направления стрелок.

Отсюда:
а) Решений-лучей может быть ни одного, либо два, либо четыре, либо шесть, либо они заполняют почти всю плоскость.

Лучи образуют пары-прямые, где одно решение входит в особую точку, а другое — выходит (так что мы можем увидеть до трёх пересекающихся прямых).

В случае, когда прямые заполняют плоскость, если мы начнём обходить особую точку по кругу — где-то должен быть момент, когда решения, идущие в особую точку, сменятся на решения, идущие из неё. Отсюда следует, что решения, идущие в ноль, и выходящие из него, отделены друг от друга прямой из неподвижных точек.

Почему такая прямая только одна? Потому что для того, чтобы в решение годилось любое α, многочлены с коэффициентами A, B, C и D, E, F должны быть как минимум разными. Если бы нашлись две такие прямые, где $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$, это бы значило совпадение этих многочленов с точностью до константы-множителя — но в таком случае уравнение на α имело бы всего одно решение.

б) Устойчивости у нуля нет никогда — если какая-то траектория стремится к нулю, то у неё есть выходящий из нуля двойник.

в) Замкнутых траекторий быть не может. Если есть замкнутая траектория, то у неё должен быть центрально-симметричный двойник. Либо это — она сама (периодическая траектория сама по себе симметрична), либо нет, и двойник пересекает/пересекает с касанием саму траекторию — чего не может быть (при пересечении) по самому определению ДУ, либо (при касании) по теореме о существовании и единственности (система липшицева). Если мы предполагаем, что траектория симметричка сама себе — получаем противоречие с направлением стрелок.

г) Спиральных траекторий тоже нет — на каждую входящую в ноль спираль приходится выходящая из нуля, и отделить семейство входящих от семейства выходящих траекторией из неподвижных точек надо бы (для сохранения непрерывности), но невозможно, т.к. у многочленов в системе решение не может быть закрученной формы.