Олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям
25 апреля 2024 года

1. Решите уравнение: $\big(1 + 2x^2 y\cos(x^2 y)\big)\,dx + x^3\cos(x^2 y)\,dy = 0$.

2. **а)** Покажите, что существует такая непрерывная функция f, что функция
$$x(t) = e^{1/t} + \frac{1}{2t}$$
на всей своей области определения удовлетворяет дифференциальному уравнению
$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$
б) Есть ли у этого дифференциального уравнения (с такой функцией f, как указано в п. а) решение, определённое на всей прямой $\mathbb{R}$?
в) Найдите все решения этого уравнения (с такой функцией f, как указано в п. а).

3. Дано уравнение $y' - 2xy + 2y^2 = 1$.
а) Решите это уравнение, зная, что у него есть решение $y = x$.
б) Существует ли такое число $\delta > 0$, что график каждого решения $y = \varphi(x)$ $(x \geqslant 0)$ данного уравнения со свойством $|\varphi(0)| < \delta$ имеет наклонную асимптоту $y = x$?
в) Будет ли решение $y = x$ $(x \geqslant 0)$ данного уравнения асимптотически устойчивым?

4. Даны четыре системы линейных уравнений:
$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 9\\ 9 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2{,}6 & 2{,}4\\ -2{,}4 & 2{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$
Укажите среди них все пары систем, фазовые портреты которых (без учёта направлений движения по траекториям) можно перевести друг в друга аффинными преобразованиями плоскости.

5. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — такая функция класса C^1, что $\operatorname{sgn} f(x,y) = \operatorname{sgn} y$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Может ли быть, что у уравнения $y' + f(x,y) = 0$:
а) существует максимально продолженное вправо решение, не стремящееся к нулю при $x \to +\infty$;
б) единственное стремящееся при $x \to +\infty$ к нулю решение — тождественный ноль?

6. Какие свойства линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами переносятся на аналогичные уравнения с переменными коэффициентами и характеристическим многочленом $L(\lambda, t)$ с коэффициентами, зависящими от t:
а) многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ тогда и только тогда, когда функция $y = e^{\lambda_0 t}$ — решение уравнения;
б) если многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности $k > 1$, то функция $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ — решение уравнения;

в) если функция $y = t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ при целом $k > 1$ является решением уравнения, то многочлен $L(\lambda, t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$ кратности k?

7. Верно ли, что для любой замкнутой выпуклой области $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей и любой точки $(t_0, x_0) \in G$ дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in G, \quad f \in C^1(G),$$

имеет интегральную кривую, определённую на некотором замкнутом временно́м промежутке и содержащую эту точку хотя бы на конце этого промежутка?

8. Матрица линейной системы $\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, +\infty)$, непрерывна и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr} A(\tau)\, d\tau = 0.$$

Пусть $L : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ – непрерывно дифференцируемая и невырожденная при всяком $t \geq 0$ матричнозначная функция, причём

$$\sup_{t \geqslant 0} \big(|L(t)| + |L^{-1}(t)|\big) < \infty.$$

Чему может быть равна величина

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{tr} B(\tau)\, d\tau,$$

где $B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)$, $t \geqslant 0$?

9. Рассмотрим квадратичную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \\ Dx^2 + 2Exy + Fy^2 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, таковы, что $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ и $D^2 + E^2 + F^2 > 0$.

а) Сколько решений, имеющих фазовую траекторию в виде луча, может быть у такого уравнения? Как эти лучи могут быть расположены на плоскости?

б) Каким образом устойчивость нулевого решения системы зависит от коэффициентов A, B, C, D, E, F?

в) Может ли система при каких-либо значениях коэффициентов иметь семейство замкнутых траекторий, обходящих вокруг начала координат?

г) Может ли система при каких-либо значениях коэффициентов иметь семейство спиральных траекторий, закручивающихся вокруг начала координат?