

Задача 1. Решите уравнение $x^2 y y'' = y^2 - 2xy y' + x^2 y'^2$.

Задача 2. Какой наименьший порядок может иметь линейное однородное уравнение, среди решений которого есть функции $y_1(x) = x^2 + 1$, $y_2(x) = 1 - x$, $y_3(x) = x^2 + 3x - 2$, $y_4(x) = 2x^2 + x + 1$? Приведите пример такого уравнения.

Задача 3. При $a = 0$ и любом $d > 0$ имеет место неустойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} x, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Для каких $d > 0$ существуют такие $a \in \mathbb{R}$, при которых нулевое решение асимптотически устойчиво?

Задача 4. Может ли у автономного уравнения

$$\dot{y} = f(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad f \in C(\mathbb{R}),$$

через любую точку фазовой прямой проходить бесконечно много различных фазовых кривых, каждая из которых соответствует решению, определенному при всех $t \in \mathbb{R}$?

Задача 5. Предложите пример (или докажите невозможность существования) автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

(f, g — непрерывны и определены на всей плоскости) с такими свойствами:

- У системы есть не более чем конечное число неподвижных решений, особых точек;
- Среди остальных решений $(x(t), y(t))$ ровно у одного $x(t) \rightarrow -\infty$, а у всех остальных $x(t) \rightarrow +\infty$ при росте t (иными словами, только одно решение идёт налево, все остальные — направо).

Задача 6. Существует ли заданное на всей прямой $\mathbb{R}$ решение уравнения

$$\frac{dA}{dt} = A^2$$

среди невырожденных матриц 2×2 ?

Задача 7. Уравнение

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}), \quad t, y \in \mathbb{R}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^3), \quad f(\cdot, 0, 0) = 0,$$

назовем *суперустойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение, удовлетворяющее условию $|y(0)| < \delta$, удовлетворяет и требованию $|y(t)| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Существует ли суперустойчивое уравнение?

Задача 8. Точка на плоскости с начальными координатами $(1, 0)$ сначала некоторое время движется под действием системы $\dot{x} = Ax$, а потом движется некоторое время под действием другой системы $\dot{x} = Bx$. Найдите область, где может оказаться точка после такого движения, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$