Олимпиада по дифференциальным уравнениям

Задача 1. Решите уравнение $(y')^2 - 2yy'' + 4y^2 = 0$.

Задача 2. Существует ли при $K = [0,1]$ и $n > 1$ такое уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0, \quad t \in K, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{C}(K),$$

что для некоторого его ненулевого решения y при $t \in K$ имеет бесконечное число нулей:

а) сама функция $y(t)$;

б) некоторая *нетривиальная* (т.е. $(C_1, \ldots, C_n) \neq (0, \ldots, 0)$) линейная комбинация $C_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + C_n y(t)$?

Задача 3. Верно ли, что задача Коши для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \ f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n); \\ x(0) = x_0, \quad f(x_0) \neq 0, \end{cases}$$

имеет хотя бы *локально* (т.е. в достаточно малой окрестности точки $t = 0$) единственное решение:

а) при $n = 1$;

б) при $n > 1$?

Задача 4. Пусть фазовая кривая некоторого решения x_0 системы

$$\dot{x} = f(x), \quad f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2),$$

есть цикл, *ω-предельный* (т.е. предельный при $t \to +\infty$) для всех близко начинающихся фазовых кривых. Может ли тогда случиться, что решение x_0:

а) является асимптотически устойчивым;

б) не является устойчивым по Ляпунову?

Задача 5. Напишите дифференциальное уравнение, не зависящее от x напрямую, которому бы удовлетворяли все кривые второго порядка, и только они.

Задача 6. Сколько неограниченных решений, которые не входят в особые точки и не выходят из них, есть у системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{Re}[(x+iy)^4 - 1], \\ \dot{y} = \mathrm{Im}[(x+iy)^4 - 1]? \end{cases}$$

Задача 7. Опишите качественное поведение возможных орбит лёгкого спутника в поле тяжести планеты («первый закон Кеплера»), если бы в законе всемирного тяготения был бы не обратный квадрат, а обратный куб расстояния:

$$f(r) = -G\frac{Mm}{r^3}.$$

Иными словами — как выглядит движение небесных тел в четырёхмерном пространстве?

Задача 8. Рассмотрим уравнение

$$y^{IV} + q(x)y = 0,$$

где $q(x)$ непрерывна, $q(x) > 0$.

Известно, что на некотором интервале (x_1, x_2) есть решение y_1, для которого выполнено:

$$y_1(x_1) = y_1'(x_1) = y''(x_1) = 0, \qquad y'''(x_1) \neq 0, \qquad y_1(x) \neq 0 \text{ на } (x_1, x_2).$$

Сколько нулей на интервале (x_1, x_2) может иметь произвольное решение y такого уравнения?