Было: (II семестр) 8.02.2019

$[a,b] \subset \mathbb{R}$. $a < x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$

$P = \{x_i\}$ $i = \overline{1,n}$ — разбиение

метка $\xi = \{\xi_i\}$ $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ — частичный отрезок

$S_f(P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ — инт. сумма

$d(P) = \max_{k=\overline{1,n}} (\Delta x_k) \to 0$ — диаметр разбиения

разные разб. $\mathcal{P} = \{(P,\xi)\}$ — базу рать. из разм. разбиений

обозн: $d(P) \to 0$

$I = \lim_{d(P)\to 0} S(P,\xi)$ — определённый интеграл Римана функ f на отр. $[a,b]$

существование, единственность

обозн: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Сумма Дарбу; $\in R \Rightarrow \in B$ (функ Дирихле $\in B \not\Rightarrow \in R$).

Задача: перенести все понятия в n-мерное пр-во

Кудрявцев II часть с. 283–274

§1

Часть V. Кратные интегралы Римана.

Глава 1. Интегралы Римана на брусе

§1. Определение интеграла Римана

1.1. Брус в $\mathbb{R}^n$ и его разбиение

Опр 1] $a = (a_1, \dots a_n)$, $b = (b_1, \dots b_n) \in \mathbb{R}^n$ $a_i < b_i$ $\forall i = \overline{1,n}$.

Мн-во $I = I^n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ называется брусом. (промежутками, координатно параллелепипедом) в $\mathbb{R}^n$

Объёмом (мерой) I называют число $|I| := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Пишут также $v(I) = \mu(I) = |I|$

Опр 2] I — брус из опр 1 и P_i — разбиения отрезков $[a_i, b_i]$ $i = \overline{1,n}$

Мн-во точек $\{x_i^{(j)}\}$ называется разбиением P бруса I, и $\{x_i^{(j)}\} = \{P_i\}$

$a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \dots < x_i^{(N_i)} = b_i$

(1 а точка (одна из координат), 2 ая т., N_i -ая точка)

Наше разбиение P „режет" брус I^n на $N = N_1 \cdot N_2 \cdots N_n$ частичных брусов

$[a_1, b_1]$ N_1, $[a_2, b_2]$ N_2, … $[a_n, b_n]$ N_n

$I_{(j)} = [x_1^{(j_1-1)}, x_1^{(j_1)}] \times [x_2^{(j_2-1)}, x_2^{(j_2)}] \times \dots \times [x_n^{(j_n-1)}, x_n^{(j_n)}]$ — вторая индекс

$(j) = (j_1, j_2, \dots j_n)$ — мультииндекс $(e) = (1, \dots 1)$.

$(N) = (N_1, \dots N_n)$. (можно писать без скобок, но не путать с числом)

$I = \bigcup_{(j)} I_{(j)}$ „мелких" N штук брусов

Опр 3 Диаметром разбиения P бруса I называется $d(P) = \max_{i=\overline{1,n}} d(P_i)$

Зам. $0 < d(P) \le \max_{i=\overline{1,n}} |b_i - a_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2\right)^{1/2} = \|b - a\|_n$

Опр 4. $\exists$ P – разбиение бруса I из опр 3 так что $I = \bigcup_{j} I_j$.

$\forall (j)$ фиксируем произвольно $\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)}) \in I_{(j)}$

$\xi_i^{(j)} \in [x_i^{j-1}, x_i^{(j)}]$

$\xi := \{\xi^{(k)}\}$ – "метка"

Разбиение P вместе с "меткой" ξ называется размеченным разбиением бруса I^n

12 Интеграл Римана на брусе

Опр 1. $\exists$ $f: I \to \mathbb{R}$ и (P, ξ) – разбиение размеченное бруса I / $I = \bigcup I_{(j)}$

число $\sigma(f, P, \xi) = \sum_{j} f(\xi^{(j)}) \cdot |I_{(j)}|$ назыв. интегральной суммой функ $f(x)$, соответствующей размеченному разбиению (P, ξ).

Пр-р 1. $\exists$ $n=2$, $f \in C(I)$, $f \geq 0$



$\Gamma = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in I\}$

$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{\ell=1}^{N_2} f(\xi_k, \eta_\ell) \Delta x_k \Delta y_\ell$.

$\xi = \{(\xi_k; \eta_\ell)\}$

$J = \iint_{I^2} f(x,y)\, dx\, dy$

Опр 2 Число J назыв. пределом $\sigma(P,\xi)$ при $d(P) \to 0$. (обозн: $J = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi)$),

если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ / $|\sigma(P,\xi) - J| < \varepsilon$ $\forall (P,\xi)$ с $d(P) < \delta$.

База $\exists$ $\mathcal{P}$ – мн-во всех размеченных разбиений (P,ξ) бруса I.

На мн-ве $\mathcal{P}$ введём базу $\mathcal{B} = \{B_\delta\}$, где $B_\delta := \{(P,\xi) \mid d(P) < \delta\}$, $0 < \delta < \delta_0 = \max_{I = \bigcup I_n} (b_i - a_i)$

Утв: $\mathcal{B}$ – база

1) $B_\delta \neq \emptyset$ $\forall \delta \in (0, \delta_0]$ ($\neq \emptyset$ по 1)
2) $\forall \delta_1, \delta_2$ $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow \exists B_{\delta_3} \subset (B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2})$ (построить измельчение)

Смысл $J = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi)$ в смысле опр 2 $\Leftrightarrow$ $J = \lim_{\mathcal{B}} \sigma(P,\xi)$. (предел по базе)

($\Rightarrow$!, инвариантность кр Коши)

базу $\mathcal{B}$ обозначим $d(P) \to 0$

Свойства из св-в предела по базе

1) единственность
2) критерий Коши:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ / $\forall (P,\xi), (P',\xi')$ с $d(P) < \delta$, $d(P') < \delta$ $|\sigma(P,\xi) - \sigma(P',\xi')| < \varepsilon$

Опр 3 $\exists$ $f: I \to \mathbb{R}$, 1) f – интегрируема по Риману на брусе I $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists J = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) \in \mathbb{R}$

2) число J назыв. интегралом Римана на брусе I от функ f

Обозн: $J = \int_{I^n} f(x)\,dx = \int_{I^n} f(x_1, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$

Обозн. $R(I)$ – мн-во $\{f: I \to \mathbb{R} \mid f$ – интегр по Риману на $I^n\}$

не лин. пр-во: обратный не единств. (мера 0 – отлич. $\Rightarrow$ один $\int$), не кольцо

класс функ инт. по Риману

Пр-р $f(\bar{x}) = c \Rightarrow \int_I f(x_1, \dots x_n) dx_1 \dots dx_n = c \cdot |I| = c \cdot \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Задача (Калынин) $\int_{I^n} x_1 \dots x_n\, dx_1 \dots dx_n = \frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{b_n^2 - a_n^2}{2}$

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ — Инт. Пуассона $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy$

Т1 Необходимое условие интегрируемости (Везде на $\forall$ отрезке функ Дирихле, получим контрпример)

$f \in R(I) \Rightarrow f \in B(I)$ — ограничена

▶ $\boxed{\Pi}$: $f \in R(I)$, $f \notin B(I)$.

$\exists$ P – произвольное разбиение бруса $I = \bigcup_{(k)} I_{(k)}$

$\Rightarrow \exists (k_0)$ / $f \notin B(I_{(k_0)})$

Возьмем $\varepsilon = 1$. Должно быть $\exists \delta > 0$ / $\forall (P,\xi)$, (P',ξ') $d(P) < \delta$, $d(P') < \delta$

$|\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P',\xi')| < \varepsilon = 1$

$\exists P = P'$, $\xi \sim \xi'$ – отлич. только на брусе с индексом (k_0) (част. совпадают на всех ч. брусах $I_{(k)}$, кроме $I_{(k_0)}$)

$\exists$ $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in I_{(k_0)}$
$\beta = (\beta_1 \dots \beta_n) \in I_{(k_0)}$

В силу выбора разбиения (P,ξ) и (P',ξ') $A := |\sigma(P,\xi) - \sigma(P',\xi')| = |f(\alpha) - f(\beta)| \cdot |I_{(k_0)}|$

α – фиксируем, β подберем / $\cdot |f(\beta)| \geq \frac{1}{|I_{(k_0)}|} + |f(\alpha)|$ (f неогр на $I_{(k_0)}$).

$\Rightarrow A \geq 1$ – $\boxed{P}$ ◀

Зам. Необх условие не явл. достаточным (Дирихле)

$\mathcal{P} = \{$разб. (P,ξ) бруса $I\}$ $\quad \mathcal{P}^* = \{P$ P бруса $I\}$

1.3. Суммы Дарбу и предельный критерий интегрируемости

§2

Опр 1. $\exists f \in B(I)$; P – разбиение бруса I / P порождает деление I на $N = N_1 \dots N_n$ частичных брусов. $I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$

Тогда (1) число $S(f,P) = S(P) := \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k|$, где $M_k := \sup_{I_k} f$, назыв. верхней суммой Дарбу функ f, соответствующей разбиению P.

Очевидно, что при измельчении разбиения $(P' \prec P)$ $S(P') \leq S(P)$

$P' \prec P \Rightarrow S(P') \leq S(P)$ очевидно

(2) число $s(f,P) = s(P) := \sum_{k=1}^{N} m_k |I_k|$, где $m_k := \inf_{I_k} f$, назыв. нижней суммой Дарбу функ f, соотв разб P.

$P' \prec P \Rightarrow s(P') \geq s(P)$ очевидно

12.02.19

Л1. $f \in B(I) \Rightarrow$ (1) $S(P) = \sup_{\text{фикс } \xi} \sigma(P,\xi)$. $\quad \forall$ разб. $P_* \in \mathcal{P}^*$

Напом: $\Omega(P) \to 0$ (Иск) + В / критерий

(2) $s(P) = \inf_{\xi} \sigma(P,\xi)$

▶ (1) (а) Д-жем, что $\sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \leq S(P)$ $\forall P \in \mathcal{P}^*$

Имеем: $\sigma(P,\xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) |I_k| \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k| = S(P)$ (для произв $P \in \mathcal{P}^*$)

$f(\xi_k) \leq M_k = \sup_{I_k} f$

Разб-ие P_N порождает представ. бруса $I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ – част. брусы

$\sup$ сумм интегр. через верхняя грань $\Rightarrow \sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \leq S(P)$

(б) Д-жем, что $\sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \geq S(P)$. Имеем (по опр $M_k = \sup_{I_k} f$): $\forall k = \overline{1,N}$ $\exists \bar{\xi}_k \in I_k$ точка / $f(\bar{\xi}_k) > M_k - \varepsilon / |I|$

$\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_N)$ $\sum_{k=1}^{N} f(\bar{\xi}_k) |I_k| > \sum_{k=1}^{N} \left(M_k - \frac{\varepsilon}{|I|}\right) |I_k| = S(P) - \varepsilon$

$\Rightarrow \sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \geq \sigma(P,\bar{\xi}) > S(P) - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$ (т.к. $\varepsilon \to 0$) $\sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \geq S(P)$ 2) – аналогично ◀

12.02.19

Зам: $f \in C(I) \Rightarrow S(P)$ и $s(P)$ – интегральные суммы (т.к. $\sup = \max$, $\inf = \min$)

Обозн: Т.к. разбиение P порождается "координатными" разбиениями P_i, $i = \overline{1,n}$, то далее мы обозначаем $P = (P_1, \dots, P_n)$



Опр2. $\exists \tilde{P}, P \in \mathcal{P}^*$. Тогда $\tilde{P}$ – "измельчение" разбиения P $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{P}_i$ – измельчение P_i $\forall i = \overline{1,n}$.
($\tilde{P} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)$, $P = (P_1, \dots, P_n)$)

Обозн: $\tilde{P} \prec P$

(Л2) $\exists f \in B(I) \Rightarrow \forall P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^*$ с усл $\tilde{P} \prec P$ имеем:
1. $S(\tilde{P}) \leq S(P)$
2. $s(\tilde{P}) \geq s(P)$

▶ 1. Разбиение P порождает представление $I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$, а $\tilde{P}$ порождает $I_k = \bigcup_{\ell=1}^{N_k} I_{k\ell}$, так что $I = \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{\ell=1}^{N_k} I_{k\ell}$.

Имеем: $S(\tilde{P}) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N_k} M_{k\ell} |I_{k\ell}| \leq \sum_{k=1}^{N} M_k \sum_{\ell=1}^{N_k} |I_{k\ell}| = \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k| = S(P)$

($M_{k\ell} = \sup_{I_{k\ell}} f \leq M_k$)

2. Аналогично ◀

(Л3) $\exists f \in B(I)$. Тогда $s(P_1) \leq S(P_2)$, $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}^*$.

▶ Положим $P_3 := P_1 \cup P_2 \Rightarrow P_3 \prec P_1$, $P_3 \prec P_2$

Имеем (см Л2) $s(P_1) \overset{Л2}{\leq} s(P_3) \leq S(P_3) \overset{Л2}{\leq} S(P_2)$ ◀

Опр3. $\exists f \in B(I)$. Тогда
1. Верхний $\int_H$ Дарбу $\overline{J_B} := \inf_{P \in \mathcal{P}^*} S(P)$
2. Нижний $\int_H$ Дарбу $\underline{J_H} := \sup_{P \in \mathcal{P}^*} s(P)$

Обозн: $\exists f \in B(I)$. Тогда $\forall P \in \mathcal{P}^*$
1. Колебание $w_k(f)$ функции f на брусе I_k – $:= \sup_{x,y \in I_k} |f(x) - f(y)| \overset{\text{Ш}}{=} M_k - m_k$!
2. $\Omega(f,P) = \Omega(P) := \sum_{k=1}^{N} w_k |I_k|$

Св-ва (к Л1,Л2,Л3).

1. $\underline{J_H} \leq \overline{J_B}$

▶ Л3 $s(P_1) \leq S(P_2)$ $\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}^* \Rightarrow s(P_1) \leq \inf_{P_2 \in \mathcal{P}^*} S(P_2) = \overline{J_B}$ $\forall P_1 \in \mathcal{P}^* \Rightarrow \sup_{P_1 \in \mathcal{P}^*} s(P_1) = \underline{J_H} \leq \overline{J_B}$ ◀

2. $0 \leq \overline{J_B} - \underline{J_H} \leq \Omega(P)$, $\forall P \in \mathcal{P}^*$

▶ $\overline{J_B} - \underline{J_H} \leq S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k) |I_k| = \sum_{k=1}^{N} w_k |I_k| = \Omega(P)$ ◀
($\forall P \in \mathcal{P}^*$; $S(P) - s(P) \overset{\text{см св-во 2}}{=} \Omega(P)$)

Опр4. $\exists f \in B(I)$. Тогда $\lim_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / 0 \leq \Omega(P) < \varepsilon \ \forall P \in \mathcal{P}^* : d(P) < \delta$

($I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$)

Рассмотрим базу $\underset{\mathcal{P}^*}{B^*} := \{B_\delta^*, 0 < \delta \leq \delta_0 = \max_{i=\overline{1,n}} (b_i - a_i)\}$, где $B_\delta^* = \{\text{разб } P \in \mathcal{P}^* : d(P) < \delta\}$

Тогда (см Опр4) $\lim_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \Leftrightarrow \lim_{B^*} \Omega(P) = 0$ (ОО): $B^* = d(P) \to 0$

(Т) (предельный критерий $\int$-ти по Дарбу).
$\exists f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \lim_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0$

▶ 1. $\Rightarrow$: $\exists f \in R(I)$ ($\Rightarrow f \in B(I)$) Крит Коши (по базе): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / |\sigma(P, \xi') - \sigma(P, \xi'')| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall (P, \xi'), (P, \xi'') \in \mathcal{P}_{c\, d(P) < \delta}$

$\Rightarrow \sup_{\xi', \xi''} |\sigma(P, \xi') - \sigma(P, \xi'')| = \sup_{\xi} \sigma(P, \xi) - \inf_{\xi} \sigma(P, \xi) = S(P) - s(P) = \Omega(P) < \varepsilon \ \forall P \in \mathcal{P}^*_{c\, d(P) < \delta}$

(где $\sup_{\xi} \sigma(P, \xi) \leq \varepsilon/2 + \inf_{\xi} \sigma(P, \xi) \leq \varepsilon + \sigma(P, \xi)$ см II; $S(P) - s(P) \overset{\text{А1}}{=}$ см 2)

$\Rightarrow \lim_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0$

2. $\Leftarrow$: $\exists f \in B(I)$, $\lim_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0$

а) Имеем: $0 \leq \overline{J_B} - \underline{J_H} \leq \Omega(P)$ (см 2) $\xrightarrow[d(P) \to 0]{} 0$ $\overset{\text{переход к } \lim}{\Rightarrow} \overline{J_B} = \underline{J_H} =: J$

б) $\exists$ λ-ч-во $\exists \int_I f dx = J$. А именно, надо р-во, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / |\sigma(P, \xi) - J| < \varepsilon \ \forall (P, \xi) \in \mathcal{P}$

$\Leftrightarrow J - \varepsilon \leq \sigma(P, \xi) \leq J + \varepsilon$ $\forall$ ч-ва (1) $\exists \varepsilon > 0$ – произв $\Rightarrow \exists \delta > 0, 0 \leq \Omega(P) < \varepsilon \ \forall P \in \mathcal{P}^* : d(P) < \delta \Leftrightarrow 0 \leq S(P) - s(P) < \varepsilon$, $\forall \xi$

Имеем $J - \varepsilon = \overline{J_B} - \varepsilon = \inf_{P \in \mathcal{P}^*} S(P) - \varepsilon \leq S(P) - \varepsilon < s(P) \overset{\text{см (2)}}{\leq} \sigma(P, \xi) \leq S(P) \overset{\sup \delta}{\leq} s(P) + \varepsilon \overset{\text{(3)}}{\leq} \underline{J_H} + \varepsilon = J + \varepsilon \Rightarrow$ (1) $\forall (P, \xi) : d(P) < \delta$ ◀

Св-ва (Л)
1. $f \in B(I)$, $\lim_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \Rightarrow \exists \int_I f dx = \overline{J_B} = \underline{J_H}$ (см д-во Т п.2)
2. $f \in R(I) \Rightarrow \exists \lim_{d(P) \to 0} S(P) = \lim_{d(P) \to 0} s(P) = \int_I f dx$ (см д-во Т п.2 – первая (3))

1.4 Критерий Дарбу интегрируемости на брусе

15.02.19

Напоминание

1. Разбиение P бруса I рект. его на N част. брусов

$I_j = [x_1^{j_1-1}, x_1^{j_1}] \times \dots \times [x_n^{j_n-1}, x_n^{j_n}]$

$j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультииндекс

$j_k = \overline{1, N_k}$ $\quad k = \overline{1,n}$

$N = N_1 N_2 \cdots N_n$

Обозн.

Для р-я P_δ, $|P_i| :=$ кол-во точек р-я (кон-ва) P_δ, $i = \overline{1,n}$

(2). $\exists \tilde{P} \prec P \Rightarrow \left.\begin{matrix} S(\tilde{P}) \le S(P) \\ s(\tilde{P}) \ge s(P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 \le \underline{\Omega(\tilde{P})} = S(\tilde{P}) - s(\tilde{P}) \le \underline{\Omega(P)}$ (1)

(Л1). $\left.\begin{matrix} \cdot\ \exists f \in B(I), \text{ т.е } \exists M > 0 / |f(x)| \le M \ \forall x \in I \\ \cdot\ \exists \tilde{P} = (\tilde{P}_1, \dots \tilde{P}_n) \prec P = (P_1, \dots P_n) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S(\tilde{P}) \ge S(P) - A \cdot d(P)}$ (*), $\boxed{S(\tilde{P}) \le s(P) + A \cdot d(P)}$ (**), так что $\boxed{\Omega(\tilde{P}) \ge \Omega(P) - 2A \cdot d(P)}$ (2)

где $\boxed{A := 2M|I| \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{b_k - a_k}}$, $t_k := |\tilde{P}_k| - |P_k|$

$\exists \tilde{P} \prec P$. Для простоты предполагаем, что среди $(\forall k\ t_k = 1)$ дополнит. точка $\tilde{x}_k^{(N_k)} \in (x_k^{(N_k-1)}, x_k^{(N_k)})$ – последний частичный интервал

(1) Д-жем (*), т.е $S(P) - S(\tilde{P}) \le A \cdot d(P)$

Положим (введём "промежуточные" разбиения):

$P^{(0)} := P$

$P^{(k)} := (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_k, P_{k+1}, \dots P_n)$ $\quad n \ge k \ge 1$

Так что $P^{(n)} = \tilde{P}$ $\qquad S = \sum M_k |P_k|$

Имеем: $S(P) - S(\tilde{P}) = S(P^{(0)}) - S(P^{(n)}) = [S(P^{(0)}) - S(P^{(1)})] + [S(P^{(1)}) - S(P^{(2)})] + \dots + [S(P^{(n-1)}) - S(P^{(n)})] = \sum_{k=1}^{n} [S(P^{(k-1)}) - S(P^{(k)})] \le \sum_{k=1}^{n} 2M \underbrace{|\tilde{x}_k^{(N_k)} - x_k^{(N_k)}|}_{\le d(P)} |P_k|$, где $\tilde{x}_k^{(N_k)}$ – последний с конца

$[\underset{a}{\cdot} \underset{M_1}{\cdot} \underset{c}{\cdot} \underset{M_2}{\cdot} \underset{b}{\cdot}]$ $\quad M_1(c-a) + M_2(b-c) \ge 0$

$M(b-a)$ $\qquad M(b-a) - M_1(c-a) - M_2(b-c) \le M(b-a) + M(b-a) = 2M(b-a)$ $\quad (t_k > 1: \ 2M t_k (b-a))$

$|P_k| =$ (объём $(n-1)$ мерного бруса) $= \sum_{j_1=1}^{N_1} \dots \sum_{j_{k-1}=1}^{N_{k-1}} \sum_{j_{k+1}=1}^{N_{k+1}} \dots \sum_{j_n=1}^{N_n} |I_{j_1, \dots j_{k-1}, j_{k+1}, \dots j_n}|$

Заметим, что $|I| = (b_k - a_k) \mathcal{D}_k \Rightarrow \mathcal{D}_k = \frac{|I|}{b_k - a_k}$

Поэтому $S(P) - S(\tilde{P}) \le 2M \, d(P) \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}_k = 2M \, d(P) \, |I| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k - a_k} = A \, d(P)$.

$\Rightarrow$ (*)

$[\underset{a}{\cdot} \underset{M_1}{\cdot} \underset{c}{\cdot} \underset{M_2}{\cdot} \underset{d}{\cdot} \underset{M_3}{\cdot} \underset{b}{\cdot}]$ $\quad M(b-a) - M_1(c-a) - M_2(d-c) + M_3(b-d) \le$ (2t_k слагаемых) $\le M(b-a) + M(c-a+d-c+b-d) = 2M(b-a)$ $\quad$ где $t_k \ge 1$

(2) (**) док-ся аналогично

$t_k = 0 \Rightarrow$ точка не добавляется

∴ Предвар. замеч. Число $A(\text{из } \Lambda 1) = A(t_1, \dots t_n)$ $t_k \ge 1 \Rightarrow t_k := 1$.

(Л2). $f \in B(I)$ Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \inf_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$

(1) $\Rightarrow$ $\exists f \in R(I) \overset{\text{пред. крит.}}{\Rightarrow} \lim_{(\text{пред. крит.}) \, d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \Rightarrow \inf_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$

(2) $\Leftarrow$ "от (2)" $\exists \inf_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$. $\exists \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists P' \in \mathcal{P}^* / 0 \le \Omega(P') < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\neq 0)$ (3)

($\inf \Omega(P)$ "$\neq 0$")

• Обозначим $S_i' := |P'_i|$, $S_i = S_i(\varepsilon)$

• Положим (см Л1) $\delta := \frac{\varepsilon}{4A(S_1 - S_n)}$

$\exists P \in \mathcal{P}^* \ e \, d(P) < \delta$. Положим $P'' := P' \cup P$

Заметим, что $|P_i''| \le \underbrace{|P_i'|}_{= S_i'} + |P_i|$ – очевидно (4)

Имеем: (см (1)) $0 \le \Omega(P'') \le \Omega(P^*) < \frac{\varepsilon}{2}$ (5)

(2) $\Rightarrow \Omega(P'') \ge \Omega(P) - 2Ad(P) < \delta$ (см (3)) (≥)

"$A(t_1 - t_n)$ (см (4)) приращение

Заметим, что $t_i = |P_i''| - |P_i| \overset{(4)}{\le} s_i$

приращ точек от P_i к P^*

$\Rightarrow$ см Л1. $A(t_1 - t_n) \le A(s_1 - s_n)$?

фикс по ε. ($|P_i'|$)

(≥) $\Omega(P) - 2A(s_1 - s_n)\delta = \Omega(P) - 2A\frac{\varepsilon}{4A} = \Omega(P) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Т.о. $\Omega(P'') \ge \Omega(P) - \varepsilon/2$ (6)

Имеем: $0 \le \Omega(P) \overset{(6)}{\le} \Omega(P'') + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(5)}{<} \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\exists \delta > 0$

В итоге $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(P) < \varepsilon$ $\forall P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta$

19.02.19

Т. Критерий Дарбу Интегрируемости на Брусе

$\exists f \in B(I)$ Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow J_\beta = J_H$

$\Rightarrow$ "$\exists f \in R(I) \Rightarrow \exists J := \int_I f(x)\,dx \overset{\text{пр Кр}}{\Rightarrow} \lim_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \overset{\text{след Т п.3}}{\Rightarrow} J = J_\beta = J_H$

inf sup S

$\Leftarrow$ " $\exists f \in B(I)$, $J_\beta = J_H =: J \overset{?}{\Rightarrow} f \in R(I)$

Л2 $\Rightarrow$ рост $p \to \beta$, что $\inf_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$

a) $\Omega(P) \ge 0$ $\forall P \in \mathcal{P}^*$

$\exists \varepsilon > 0$ пусть $\exists P^{(1)} \in \mathcal{P}^*$ / $S(P^{(1)}) < J_\beta + \varepsilon/2 = J + \varepsilon/2$

$\exists P^{(2)} \in \mathcal{P}^*$ / $s(P^{(2)}) > J_H - \varepsilon/2 = J - \varepsilon/2$

Положим $P := P^{(1)} \cup P^{(2)} \Rightarrow P \prec P^{(1)}, P \prec P^{(2)}$

Поэтому $\Omega(P) = S(P) - s(P) \le S(P^{(1)}) - s(P^{(2)}) < J + \varepsilon/2 - (J - \varepsilon/2) = \varepsilon$

В итоге: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P \in \mathcal{P}^*$ / $0 \le \Omega(P) < \varepsilon \Rightarrow 0 = \inf_{\mathcal{P}^*} \Omega(P)$

Зам-ия (1) $f \in R(I) \overset{\text{следств п.1}}{\Rightarrow} J_\beta = J_H = \int_I f\,dx$

(2) $J_\beta = J_H \overset{\text{Т}}{\Rightarrow} f \in R(I) \overset{\text{зам (1)}}{\Rightarrow} J_\beta = J_H = J = \int_I f\,dx$

$f \in B(I)$ Тогда

Сл-е (1) $f \in R(I) \Leftrightarrow \exists$ и равные $\lim_{d(P)\to 0} s(P) = \lim_{d(P)\to 0} S(P)$ (если 2 Т п.3 $\Rightarrow$)

$\Rightarrow$ (1) См. след 2 к Т. п.3 $\Rightarrow$"

(2) $\Leftarrow$" $\exists \lim_{d(P)\to 0} s(P) = \lim_{d(P)\to 0} S(P) \Rightarrow \exists \lim_{d(P)\to 0} (S(P) - s(P)) = 0 \Rightarrow \lim_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \overset{\text{пр Кр}}{\Rightarrow} f \in R(I)$

$f \in B(I)$

(2) $\exists \lim_{d(P)\to 0} S(P) = \lim_{d(P)\to 0} s(P) \overset{\text{опр}}{\Rightarrow} f \in R(I) \overset{\text{Кр Дарбу}}{\underset{\text{Т}}{\Rightarrow}} J_\beta = J_H = \int_I f\,dx = J \Rightarrow \lim_{d(P)\to 0} S(P) = J_\beta = J = J_H = \lim_{d(P)\to 0} s(P)$

§2 Мн-ва меры нуль

2.1 Определение и основные свва мн-в меры нуль

Опр 1 Брус $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ наз. кубич., если $b_i - a_i = \ell > 0 \quad i = \overline{1,n}$.

Опр 2 $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда лебегова мера мн-ва E равна 0 ($\mu(E)=0$) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не б.ч. счетная (или $\exists$ конечная) сем. брусов $\{\Gamma_k \mid \Gamma_k$ – кубические брусы$\}$ со сввами:

1) $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ (или $\bigcup_{k=1}^{N}$)

2) $\sum_k |\Gamma_k| < \varepsilon$.

Зам $\mathring{\Gamma}_k$ – открытый брус, то $|\mathring{\Gamma}_k| = |\Gamma_k|$.

Зам-я 1) В опр 2 можно брать открытые брусы

⇒ 1) опр 2 с откр $\{\mathring{\Gamma}_k\} \Rightarrow$ опр 2 (взят $\{\Gamma_k\}$)

2) $\exists$ верно опр 2 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ сем куб брусов $\{\Gamma_k\}$ / 1) $E \subset \bigcup_k \Gamma_k$
не б.ч. ск. 2) $\sum_k |\Gamma_k| < \varepsilon/2$

Тогда $\forall k$ рассмотрим открытый куб. брус $\mathring{J}_k$: a) $\mathring{J}_k \supset \Gamma_k$ } $\Rightarrow$
б) $|\mathring{J}_k| < 2|\Gamma_k|$ }

$\Rightarrow$ • $E \subset \bigcup_k \Gamma_k \subset \bigcup_k \mathring{J}_k$

• $\sum_k |\mathring{J}_k| < 2 \sum_k |\Gamma_k| < \varepsilon$. ◀

2) $\exists B_r(x^0)$ – шар откр. с центром в x^0 и радиусом $r > 0$
Объём $B_r(x^0) = |B_r(x^0)| := c_n r^n$, где $c_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда в опр 2 вместо брусов можно рассматривать шары ▶— ◀

3) В опр 2 можно вместо куб. брусов рассм. произв брусы (параллелепипеды)
будет доказано ранее

Л 1. а) точка – мн-во меры 0

б) $\mu(E_m) = 0$, $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) = 0$

в) $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$

г) $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ – произвольный брус $\Rightarrow \mu(\Gamma) \neq 0$ (или $\neg(\mu(\Gamma) = 0)$)

▶— ◀

Зам $\exists x \in \mathbb{R}^n$. Рассм $\|x\|_n := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ – евклидова норма

$\|x\|_\infty := \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$

Имеет место нерво: $\|x\|_n \le n^{1/2} \|x\|_\infty \le \|x\|_n \cdot n^{1/2}$ (1)

▶ Всё: • $\|x\|_n = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \le \sqrt{n \cdot (\max_i |x_i|)^2} = n^{1/2} \cdot \|x\|_\infty$

• $\|x\|_\infty \overset{\exists i_0 \in \{1,\dots,n\}}{=} |x_{i_0}| = \sqrt{|x_{i_0}|^2} \le \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|x\|_n$ ◀

Напоминание: (II сем)

$\exists f \in \mathcal{D}(B_\delta(x^0)) \Rightarrow \forall x \forall y \in B_\delta(x^0)$, $f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta(y-x))$, $\theta \in (0,1)$

(Замечаем, что $[x,y] \subset B_\delta(x^0)$)

Обобщение для вектор функ: $P: B_\delta(x^0) \to \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$, $f_i \in \mathcal{D}(B_\delta(x^0)) \Rightarrow$ (2)

$\Rightarrow \forall x \forall y$ $f_i(y) - f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_j) \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + \theta(y-x))$, $i = \overline{1,n}$

(без первый для координат)

Напом: $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$, $f \in \mathcal{D}((a,b))$ (функция липш, если производная огр)

(12) $f: B_\delta(x^0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_i \in \mathcal{D}(B_\delta(x^0))$ $i=\overline{1,n}$

Причём $\exists k>0 / \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \le k \ \forall x \in B_\delta(x^0)$ $\Rightarrow$ $\forall x,y \in B_\delta(x^0)$,

$\|f(y)-f(x)\|_n \le C \cdot \|x-y\|_n$, где $C>0$ – некая постоянная

▶ Имеем: $\|f(y)-f(x)\|_n \overset{\text{см (1)}}{\le} \sqrt{n}\,\|f(y)-f(x)\|_\infty = \sqrt{n} \max_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+\theta_i(y-x))(y_j-x_j) \right| \overset{(2)}{\le}$ ($\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in k$)

$\le \sqrt{n} \cdot \underbrace{nK}_{\text{сумма квадратов}} \cdot \|y-x\|_\infty \overset{(1)}{\le} \underbrace{n^{3/2}K}_{=:C} \cdot \|y-x\|_n$ ◀

Зам. $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ ▷ – ◁

$\exists y^\emptyset \Rightarrow \exists x \in A \cup B \ / f(x)=y$

Обозн: (1) Шар (откр) $B_r(x^0) = B(x^0,r)$

22.02.19 Шар (замкн) $\overline{B}[x^0,r]$

(2) $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ расстояние $\rho(M_1,M_2) := \inf_{\substack{x \in M_1 \\ y \in M_2}} \|x-y\|$ – евклидова (по умолч) $\|x-y\|_n$

$\therefore$ (3) $f \in C^1(G)$, $f=(f_1 \dots f_n) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_i \in C^1(G)$ $i=\overline{1,n}$

(об инвариантности меры 0 при C^1 отображ.)

(T) $G \subset \mathbb{R}^n$, G – открытое, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G)$, $E \subset G$, $\mu(E)=0$ (лежит в шаре)

$\Rightarrow \mu(f(E))=0$

▷ 1) Положим $K_m := \{ x \in G / \rho(x, \partial G) \ge \frac{1}{m}, \|x\| \le m \}$, $m \in \mathbb{N}$ $\subset \overline{B}[0,m]$ – компакт

(3'') (3') (3)

Тогда $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m^\circ$ – внутренность

компакт замкн огр + м/мн-во компакт в $\mathbb{R}^n$

В с.р.: • верно (3'): $\supset$ очевидно; $\subset$: $K_m \subset K_{m+1}^\circ \subset K_{m+1}$ G-откр

• верно (3''): по опр $K_m \subset G$. Далее, $\exists x \in G$-откр $\Rightarrow$

$\exists \overline{B}[x,r] \subset G$ ($\overline{B}$ – замкнутый шар) $\exists M = M(x) / \|y\| \le M \ \forall y \in \overline{B}[x,r]$

$\exists \varepsilon > 0 / \rho(x, \partial G) \ge \varepsilon > 0$; $\forall x \in G$ замкн шар $\subset G$-откр

Колмогоров I том (5) непр функция на компакте ограничена

Выберем $m \in \mathbb{N}$ / $\frac{1}{m} \le \varepsilon$, $\frac{\overline{B}[x,r]}{m} \ge M$ $\Rightarrow \rho(x, \partial G) \ge \frac{1}{m} \Rightarrow x \in K_m$

$\|y\| \le M \le m$

$\|x\| \le m$

(2) $\exists E \subset G$, $\mu(E)=0$

• $E_m := E \cap K_m$

• $E_m \subset K_m \subset K_{m+1}^\circ \subset K_{m+1}$

• $E = G \cap E = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m\right) \cap E = \bigcup_{m=1}^{\infty} (K_m \cap E) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \Rightarrow E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$

(см (1))

• $\mu(E_m)=0$ ($т.к$ $E_m \subset E$, $\mu(E)=0$)

Итак имеем: $f(E) \overset{\text{зам}}{\subset} \bigcup_{m=1}^{\infty} f(E_m)$

$\Rightarrow$ достаточно ρ-ть: $\forall m \in \mathbb{N}$ $\mu(f(E_m))=0$ (по 11с) (4)

(3) Фиксируем произвольно $m \in \mathbb{N}$

Имеем: $f \in C^1(\underbrace{K_{m+1}}_{\text{компакт}})$ ($E_m \subset K_{m+1}^\circ$)

(12) $\Rightarrow \exists C>0$ ($C = C(m)$ – const) / $\|f(x)-f(y)\| \le C\|x-y\|_n$ $\forall x,y \in K_{m+1}$ (15)

(произв непр на комп $\Rightarrow$ огр) (по C^1)

(4) Имеем $\mu(E_m)=0$ Надо ρ-ть (4)

$\exists \varepsilon > 0$ произвольно Тогда $\exists$ сис шаров (откр) $\{ B(\xi^k, r_k) \ k \in \mathbb{N} \}$ //

$E_m \subset \bigcup_k B(\xi^k, r_k)$, $\sum_{k=1} |B(\xi^k, r^k)| < \frac{\varepsilon}{C^m}$, где C – из (15) (*)

$B(\xi_1^k, r_k) \cap E_m \ne \emptyset$ (выбрасываем пустые)

Не копировать

Обозн: $B_k := B(\xi^k, r_k)$

Заметим, что

$|B_k| = c_n r_k^n < \frac{\varepsilon}{c^n}$ (**)

(*)

$\Rightarrow r_k^n < \frac{\varepsilon}{c_n \cdot c^n} \Rightarrow r_k < \frac{\varepsilon^{1/n}}{c_n^{1/n} c}$

Покажем, что $\rho := \rho(\partial K_m, \partial K_{m+1}) > 0$

Не ограничивая общности, возьмем $\varepsilon > 0$ таким малым, что $r_k < \frac{\rho}{2}$

Имеем: $B_k \cap E_m \neq \emptyset$

$\exists$ k-прощальное $\Rightarrow \exists x^0 \in B_k \cap E_m \Rightarrow \forall x \in B_k \ \|x - x^0\| < 2r_k < \rho = \rho(\partial K_m, \partial K_{m+1})$

$\Rightarrow B_k \subset K_{m+1}$

(5) Имеем: $E_m \subset \bigcup_k B_k$, $B_k \subset K_{m+1}$ $\overset{\text{см. (5)}}{\Rightarrow}$ полагая $\eta_k := f(\xi^k)$, получим $\|f(x) - \eta_k\| \le C r_k$

$\|f(x) - \eta_k\| \le C \|x - \xi^k\| \le C r_k$, $\forall x \in B_k$

центр B_k

Поэтому $f(E_m) \subset f(\bigcup_k B_k) \subset \bigcup_k f(B_k) \subset \bigcup_k \hat{B}_k$, где $\hat{B}_k = B(\eta_k, C r_k)$

Причем $\sum_k |\hat{B}_k| = \sum_k C^n r_k^n \cdot c_n \overset{(*)}{<} C^n \sum_k |B_k| < C^n \frac{\varepsilon}{C^n} = \varepsilon$

(c_n (**))

Зам. (1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(a) если f – инъект, то $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(б) если f – не инъект, то в общ. $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

§4

2.2 База окрестностей в $\mathbb{R}^n$

Опр $\{U_\alpha \subset \mathbb{R}^n, U_\alpha$ – откр$\}$ – база окрест в $\mathbb{R}^n$ $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$\forall G \subset \mathbb{R}^n$, G откр $\exists$ н/с-на $\{U_{\alpha_k}\}$ / $G = \bigcup_{\alpha_k} U_{\alpha_k}$

Л1 Сис-ма откр брусов $\{I^\circ(p,q) = (p_1, q_1) \times \dots \times (p_n, q_n)\}$, где $p_j, q_j \in \mathbb{Q}$, (1)

$(p,q) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n$ – есть счетная база окрест в $\mathbb{R}^n$

По опр (1) – счетное мн-во. Докажем, что (1) – база окрест в $\mathbb{R}^n$

$\forall x \in G$ – произв $\Rightarrow$ обяз $I^\circ(x) \ni x$, $I^\circ(x) \subset G$

Т.к. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$ (Γ сем), то $\exists I(p,q) / x \in I(p,q) \subset G$ (*)

Итак, $\forall x \in G$ $\exists I(p,q)$ из (1) / $x \in I(p,q)$ $\Rightarrow G \subset \bigcup_{x \in G} I(p(x), q(x)) =$ по 5 сем счетно

$= \bigcup_k I(p_k, q_k)$

$\{I_k\}$ – подсис (1)

Но, по выбору (*), $\bigcup_k I(p_k, q_k) \subset G \Rightarrow G = \bigcup_k I(p_k, q_k)$

26.02.19

Т1 $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$, где V_α – откр.
Тогда $\exists$ не более чем сч. п/покрытие $\{V_{\alpha_k}, k \in \mathbb{N}\}$ / $A \subset \bigcup_{\alpha_k} V_{\alpha_k}$ $(k \in \mathbb{N})$

▶ Усл. $\Rightarrow A \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$.] $x \in A$ произвольно $\Rightarrow \exists V_{\alpha(x)}$ / $x \in V_{\alpha(x)}$.

$V_{\alpha(x)}$ – открытое $\overset{\text{Л1}}{\Rightarrow}$ $\exists$ не б. чем счётная сист. $\{I_{k_\ell}\}$ / $V_{\alpha(x)} = \bigcup_\ell \overset{\circ}{I}_{k_\ell} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in V_{\alpha(x)} \overset{(*)}{\subset} \bigcup_\ell \overset{\circ}{I}_{k_\ell} \Rightarrow \exists \ell$ / $x \in \overset{\circ}{I}_{k_\ell} =: U(x)$ $\{U(x)\}$ не б. чем счётна

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in A} U(x) \overset{?}{=} \bigcup_{k=1} \overset{\circ}{I}_k \subset \bigcup_k V_{\alpha_k}$, где $V_{\alpha_k} := V_{\alpha(x_k)}$

$\left(\bigcup_\alpha V_\alpha$ – открытое?$\right)$ $\uparrow$ при проходе по α не появится

Л2 мн-во открытых шаров в $\mathbb{R}^n$ $\{B_{q,r} = B(q,r)$, $q \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+\}$ – база (счётная) откр-тей в $\mathbb{R}^n$.

▶ см Л1 ◀

Т2] $A \subset \mathbb{R}^n$, $\forall x \in A$ $\exists$ брус $I(x)$ / $x \in \overset{\circ}{I}(x)$, $\mu(I(x) \cap A) = 0$

$\Rightarrow \mu(A) = 0$

▶ Усл. $\Rightarrow A \subset \bigcup_{x \in A} \overset{\circ}{I}(x) \overset{\text{Т1}}{\Rightarrow} \exists$ п/с-ма $\{I(x_k)\}$ / $A \subset \bigcup_k \overset{\circ}{I}(x_k)$

Тогда $A = A \cap \left(\bigcup_k \overset{\circ}{I}(x_k)\right) = \bigcup_k \underbrace{(A \cap \overset{\circ}{I}(x_k))}_{=: A_k}$ $\overset{\text{не б. чем сч}}{=}$ перест $\cup$ и $\cap$ $\bigcup_k A_k$, причём

$\mu(A \cap I(x_k)) = 0 \overset{\text{усл}}{\Rightarrow} \mu(A_k) = 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_k A_k\right) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ ◀

2.3 Мера графика непрерывной функции. Теорема Сарда

Т1 (мера графика непрерывной функции)

] $G \subset \mathbb{R}^n$, G открытое $f: G \to \mathbb{R}$, $f \in C(G)$.
$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in G, y = f(x)\}$ – график f $\Rightarrow \mu(\Gamma) = 0$

▶ Фиксируем произвольно $(x^0, f(x^0)) \in \Gamma$

Достаточно (см Т2 пункта 2) доказать, что $\exists$ брус $I^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ / $(x^0, f(x^0)) \in \overset{\circ}{I}{}^{n+1}$ $(*)$

1) G открытое $\Rightarrow \exists I^n$ / $x^0 \in \overset{\circ}{I}{}^n \subset I^n \subset G$ $\mu(I^{n+1} \cap \Gamma) > 0$ $(**)$

Но, I^n – компакт и $f \in C(I^n) \Rightarrow$ (компакт) $\exists \min\limits_{I^n} f = m \in \mathbb{R}$, $\exists \max\limits_{I^n} f = M$

Положим $I^{n+1} := I^n \times [m-1, M+1]$
Тогда $(x^0, f(x^0)) \in \overset{\circ}{I}{}^{n+1} \Rightarrow (*)$

2) $f \in C(I^n) \overset{\text{комп}}{\Rightarrow} f$ равномерно непр. на $I^n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ / $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2|I^n|} =: \varepsilon_1$, $\forall x, y \in I^n$ с усл $\|x - y\| < \delta$.

Фиксируем произвольно разбиение P бруса I^n с усл $d(P) < \delta$,
P индуцирует разб-ие бруса I^n на N частичных брусов I^n_j, $j = \overline{1,N}$

Имеем: $\forall (x,y) \in I^n_j$, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon_1$. $\Rightarrow 0 \le M_j - m_j = \omega_j(f) < \varepsilon_1$.
$(d(P) < \delta)$

3) Д-жем $(**)$
Положим $I^{n+1}_j := I^n_j \times [m_j - \frac{\varepsilon_1}{2}, M_j + \frac{\varepsilon_1}{2}]$ $(***)$
Имеем: $|I^{n+1}_j| = |I^n_j|(\varepsilon_1 + \omega_j(f)) \le 2\varepsilon_1 |I^n_j|$

Рассмотрим мн-во $I^{n+1} \cap \Gamma \subset \bigcup_{k=1}^N \overset{\circ}{I}{}^{n+1}_j$ (см $(***)$) ?

] $x \in I^n \Rightarrow f(x) \in [$? подумать!

Но $\mu(I^{n+1}_j) < 2\varepsilon_1 |I^n_j| \Rightarrow \sum_{j=1}^N |I^{n+1}_j| < 2\varepsilon_1 \sum_{j=1}^N |I^n_j| = 2\varepsilon_1 |I^n| = \varepsilon$ (по опр ε_1)
$\Rightarrow$ $(**)$

$\mu\left(\bigcup_{j=1}^N \overset{\circ}{I}{}^{n+1}_j\right)$

след 1 $\exists\ 1 \le k \le n-1$ и $\exists\ E_k$ – k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = h_i,\ i = \overline{1, n-k}\}$, причём $\operatorname{rk}(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n-k} \\ j=\overline{1,n}}} = n-k$.

$\Rightarrow \mu(E_k) = 0$

① Предположим сначала, что $k = n-1 \Rightarrow E_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j = h\}$, причём $\exists\ j_0 / a_{j_0} \neq 0$. Не ограничивая общности, $j_0 = n-1$

$\Rightarrow x \in E_{n-1} \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{a_n}\{\underbrace{-\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j}_{=: f(x)} + h\}$. Тогда $f \in C(\mathbb{R}^{n-1})$

Т1 $\Rightarrow \mu(E_{n-1}) = 0$.

② $\exists\ k \in \overline{1, n-2} \Rightarrow E_k \subset E_{n-1} \overset{n.1}{\Rightarrow} \mu(E_k) = 0$

след 2 $\exists\ A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – афф. преобр., т.е. $A_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + h_i$, $i = \overline{1,n}$ 1.6319.

$\det \|a_{ij}\| = 0 \Rightarrow A(\mathbb{R}^n)$ – измерима $\exists\ E_k \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le k < n$

$\Rightarrow \mu(A(\mathbb{R}^n)) = 0$

05

Т2 (1-я т. Сарда) $m < n$, $\exists\ 1 \le m < n$

$G \subset \mathbb{R}^n$, G откр, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G) \Rightarrow \mu(f(G)) = 0$.

① Введём вспомогат. ф-цию $g: G \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$, делая по правилу

$g(x_1, \dots, x_m, y_{m+1}, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_m)$

Заметим: • $\underbrace{G}_{\text{откр}} \times \mathbb{R}^{n-m}$ – откр в $\mathbb{R}^n$

• $\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,m}$ $\in C(G)$, т.к. $f \in C^1(G)$ (т.е. усл Т1)

• $\frac{\partial g}{\partial y_j} = 0$, $j = \overline{m+1, n}$

② Рассм. мн-во $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n / x \in G, \underbrace{y = \vec{0}}_{\text{случай}}\} \subset \mathbb{R}^n$ – откр

$H \subset E_m$ – пл-ть $(y=0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n / y = 0\} \Rightarrow \mu(E_m) = 0$ Т.к. $G \subset \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \mu(H) = 0 \Rightarrow \mu(g(H)) = 0$ – п. 1 + Т1. – инвар. $\mu = 0$ при C^1 отобр. $f(x)$ по откр G

③ Имеем: $g(H) = \{z \in \mathbb{R}^n / z = g(x,y)$, где $x \in G, y = 0\}$ $\Rightarrow$

$f(G) = \{z = f(x), x \in G\}$

$\Rightarrow \mu(f(G)) = \mu(g(H)) = 0$

Напоминание I. $\exists\ f: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, G откр $\exists \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$

$\Rightarrow$ ① Матр. Якоби: $\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{matrix} \right\| = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \operatorname{grad} f_2 \\ \operatorname{grad} f_n \end{pmatrix} =: Df$

② $\exists\ n = m$. Якобиан $:= \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{i,j=\overline{1,n}} =: \det Df$

II. ① $\exists\ G \subset \mathbb{R}^n$, G откр, $f: G \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(G) \Rightarrow \forall x, y \in I^n$ (интер) – откр. брус в $\mathbb{R}^n$, $I^n \subset G$

справедливо р-во $f(x) - f(y) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y + \theta(x-y))\, d\theta$ Теорема о ср. знач. Интегр.

② обобщение $f: G \to \mathbb{R}^n$, $\forall x, y \in I^n \subset G$ откр

$f_i(x) - f_i(y) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y + \theta(x-y))\, d\theta$ $i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = \int_0^1 [Df(y + \theta(x-y))](x-y)\, d\theta$ (1)

столбец

Т3 (Сард) $G \subset \mathbb{R}^n$, G откр, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G)$, $m=n$

$S = \{x \in G \mid \det Df(x) = 0\} \Rightarrow \mu(f(S)) = 0$

1) G откр $\Rightarrow \forall n \geq 3$ $\exists$ не б.т. сл. мно-во кубич. брусов I_e / $G = \bigcup_e I_e$ (можно брать замкн.)

Имеем: $S = S \cap G = S \cap (\bigcup_e I_e) = \bigcup_e (S \cap I_e)$ (*) $\Rightarrow$ дост. рас-ть это

$\forall$ бруса кубич. I $\mu(f(S \cap I)) = 0$ (2), т.к. $f(\bigcup_e S \cap I_e) \subset \bigcup_e (f(S \cap I_e))$ – сл. (*)

2) Фиксируем произв. кубич. брус $I \subset G$ с ребром ℓ / $I \cap S \neq \emptyset$

$\exists \varepsilon > 0$ произв. $\exists \delta > 0$ / $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y) \right| < \varepsilon$ $\forall x, y \in I$ с усл. $\|x - y\| < \delta$ $i, j = \overline{1,n}$

(I – комп. $f \in C^1(I)$ равн. непр. произв.) (3)

сл (1) $\Rightarrow$ $\|f(x) - f(\xi) - Df(\xi)(x-\xi)\| = \left\| \int_0^1 [Df(\xi + \theta(x-\xi)) - Df(\xi)](x-\xi) d\theta \right\| \leq$ (сл (3)) $\leq C_1 \varepsilon \|x - \xi\|$ $\forall x, \xi \in I$

кас. вн. $d\theta$ $\left\| \int_0^1 (x-\xi) d\theta \right\| = \|x - \xi\|$ с усл. $\|x - \xi\| < \delta$ (4)

3) Фикс. произв. разбиение P куббруса I с $d(P) < \delta$ / P индуц. разбиение P на N^n частичных кубич. брусов I_k с ребром $\frac{\ell}{N} = \frac{\ell}{N(\delta)} \leq \ell/N$, $k = \overline{1, N^n}$

Тогда $\|f(x) - f(\xi) - Df(\xi)(x-\xi)\| \leq$ (сл (4)) $\leq C_1 \varepsilon \|x - \xi\| \leq C_1 \varepsilon \frac{\ell}{N} = \frac{C}{N}$ $\forall x, \xi \in I_k$ (5)

($C = C_1 \ell$ и ε)

4) Рассматриваем n-мерный куб брусов $\{I_{k_s}\}$ / $I_{k_s} \cap S \neq \emptyset$

Фикс. произв. $I_{k_s} =: J$

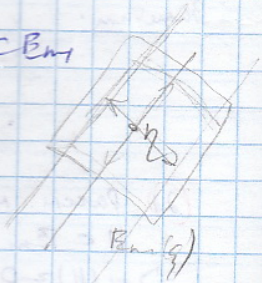
Т.к. $J \cap S \neq \emptyset$, то $\exists \xi \in J \cap S$ (фикс.) / $\det Df(\xi) = 0$ (см опр S)

Рассм. аффинное отображение A_ξ: $A_\xi(x) = f(\xi) + Df(\xi) \cdot (x - \xi)$ (см. опр 2 т1) $\Rightarrow$ $A_\xi(\mathbb{R}^n) \subset E_{n-1}$

$\xi \in S$ – фикс. $x \in \mathbb{R}^n$ – произв.

В частности $A_\xi(J) \subset E_{n-1}(\xi)$, причём $\eta := f(\xi) \in E_{n-1}$ ($= A_\xi(\xi)$)

5.03.19



5) Принадлежность $f(J)$ слою

Имеем: $x \in J \Rightarrow$ (см (5)) $\|f(x) - A_\xi(x)\| < C_2 \frac{\varepsilon}{N} =: \lambda(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $f(J)$ содержится в отр. слое высоты (ширины) $2\lambda(\varepsilon)$, образ-м плоскости $\|E_{n-1}(\xi)\|$

Этот слой обозначим $O_{\lambda(\varepsilon)}(E_{n-1}(\xi))$

6) (Принадлежность $f(J)$ кубу)

Имеем: $\|f(x) - f(\xi)\| = \|f(x) - \eta\| \leq C \|x - \xi\| \leq C_4 \cdot \frac{1}{N}$ $\forall x \in J$

($\exists C_1$ Lip) липшицев отр. прав. $\frac{\ell}{N}$

накопление через л2 бн 1

$\Rightarrow$ $f(J) \subset \mathring{J}^*$ – куб с центром в η и ребром $\frac{C_5}{N}$ (принадлежит отр. зовут слой, т.к. образ не уместится на плоскости $\|E_{n-1}(\xi)\|$)

Тогда $f(J) \subset \mathring{J}^* \cap O_{2\lambda(\varepsilon)}(E_{n-1}(\xi)) =: \mathring{\Pi} = \mathring{\Pi}_{k_s}$ (6) Нар. $\mu(\mathring{\Pi} \cap S) = 0$

причём $|\mathring{\Pi}_{k_s}| \leq 2\lambda(\varepsilon) \cdot \left(\frac{C_5}{N}\right)^{n-1} = C_6 \cdot \frac{\varepsilon}{N} \cdot \frac{1}{N^{n-1}} = C_6 \frac{\varepsilon}{N^n}$ (7)

($2\lambda(\varepsilon) = 2C_2 \frac{\varepsilon}{N}$)

7) Имеем в итоге: $f(I \cap S) \subset f\left(\bigcup_s I_{k_s} \cap S\right) = \bigcup_s f(I_{k_s}) \overset{(6)}{\subset} \bigcup_s \mathring{\Pi}_{k_s}$, причём

$\sum_s \mathring{\Pi}_{k_s} \overset{\text{п.3.}}{\leq} N^n \cdot C_6 \frac{\varepsilon}{N^n} = C_6 \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\mu(f(J \cap S)) = 0$ – см бн 1 д-ва

(Т4) (Зя т. Сарда) $m \geq n$.

$\exists\, G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq n$, G – откр, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(G)$

$S = \{x \in G \mid \operatorname{rk} Df(x) < n\} \Rightarrow \mu(f(S)) = 0$

$n = 1$:

ПР-Р: $n = 1$ $f: G \to \mathbb{R}$ $\operatorname{rk} Df(x) < 1 \Rightarrow$ (нулевая строка) $Df(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \Rightarrow f = \text{const}$ на $S \Rightarrow f(S)$ – точка $\Rightarrow \mu(f(S)) = 0$

§3 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

§6.

3.1. Мн-во объёма нуль.

Опр. $\exists\, A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $v(A) = 0$ (объём $A = 0$) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечная сем брусов $\{I_k\}_{k=1}^m$ / $A \subset \bigcup_{k=1}^m I_k$, $\sum_{k=1}^m |I_k| < \varepsilon$.

Зам. Можно брать откр брусы, шары, —

Лемма 1

1) $v(A) = 0 \Rightarrow A$ – огр. мн-во (для меры – $\mathbb{Q}$ контрпример)
2) $v(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ (обр. неверно, контрпример $\mathbb{Q}$)
3) $B \subset A$, $v(A) = 0 \Rightarrow v(B) = 0$
4) Брус I НЕ имеет объёма 0 (иначе $v(0) = 0 \Rightarrow |I| < \varepsilon$)
5) K – компакт, $\mu(K) = 0 \Rightarrow v(K) = 0$ (конечно н/покр)
6) $\exists\, M(A) = 0 \Rightarrow A^\circ = \varnothing$ (внутренность)

(П): $\exists x \in A^\circ \Rightarrow \exists$ откр I / $x \in I \subset A \Rightarrow \mu(I) > 0$ (П) ◀

7) $v(A) = 0 \Rightarrow A^\circ = \varnothing$ ▶ $v(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \Rightarrow$ (Т Б) ◀
8) $v(A) = 0 \Rightarrow v(\bar{A}) = 0$

▶ $A \subset \bigcup_{k=1}^m I_k$ (замкн) $\Rightarrow A \subset \bar{A} \subset \bigcup_{k=1}^m I_k$ (тоже замкн мн-во) ◀

($\mu(A) = 0 \not\overset{\text{Б2}}{\Rightarrow} \mu(\bar{A}) = 0$. $A = \mathbb{Q}$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$)

9) $v(A) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0$

▶ $v(\bar{A}) = 0$ по 8); $\partial A \subset \bar{A}$ ◀

($\mu(A) = 0 \not\overset{\text{Б2}}{\Rightarrow} \mu(\partial A) = 0$, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$)

3.2. Колебание функции в точке

Напоминание: $f \in B(A)$ $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$.

$w(f, A) := \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)| = \sup_A f - \inf_A f$ (умеем р-ть) ▶ $M - m$ ◀

Опр. $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in B(A)$, $x^0 \in A$.

Тогда колебание f в точке x^0 $w(f; x^0) = w(x^0) := \lim_{\delta \to +0} w(f; B(x^0, \delta) \cap A)$.

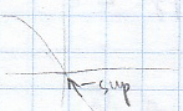
$\delta_2 > \delta_1 \Rightarrow w_2 \geq w_1$, $w \geq 0$

Зам-ия 1. Т. Вейерштр $\Rightarrow w(f, x^0) = \inf_{\delta > 0} (w(f, B(x^0, \delta) \cap A))$ (по $\delta > 0$, огран $\Rightarrow$ Т Вейерштр снизу $\exists \inf$)

2. Т. Вейерштр $\Rightarrow \exists \lim_{\delta \to +0} M(f, B(x^0, \delta) \cap A) = \inf_{\delta > 0} M(f, B(x^0, \delta) \cap A)$ ($\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \inf_1 \geq \inf_2$)

($\sup$ ↗, огр снизу $\Rightarrow \exists \lim = \inf$; (лем. теорема в II ан ем или I сем))

Аналогично $\exists \lim_{\delta \to +0} m(f, B(x^0, \delta) \cap A) = \sup_{\delta > 0} m(f, B(x^0, \delta) \cap A)$



Поэтому $w(f, x^0) = M(x^0) - m(x^0)$, где $M(x^0) := \inf_{\delta > 0} M(f, B(x^0, \delta) \cap A)$

$m(x^0) := \sup_{\delta > 0} m(\dots)$

Т.

12.03.19.

Т1 (Кр-Бэра — непрер. функции в точке)
$A \subset \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in B(A)$! (ком в окр-ти)
$\Rightarrow f \in C(x^0) \Leftrightarrow w(f, x^0) = 0$.

▶ 1) $\Rightarrow$ "
$\exists f \in C(x^0)$, $x^0 \in A$
а) x^0 – изолир. т. $A \Rightarrow$ $m(x^0) = M(x^0) = f(x^0) \Rightarrow w(x^0) = 0$
(m – loc. inf, M – loc. sup)

б) $x^0 \in A \cap A'$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 / \ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in B(x^0, \delta) \cap A \ \forall \delta \in (0, \delta_0)$

$\Rightarrow \forall x, y \in B(x^0, \delta) \cap A$ имеем: $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| \le \frac{2\varepsilon}{3}$,

$\Rightarrow w(B(x^0, \delta) \cap A) = \lim\limits_{\delta \to 0+} \sup |f(x) - f(y)| \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall \delta \in (0, \delta_0)$

В силу: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 / \ 0 \le w(B(x^0, \delta) \cap A) < \varepsilon \ \forall \delta \in (0, \delta_0)$.
$\Rightarrow w(x^0) = 0$ по опр lim.

2 $\Leftarrow$ " $w(x^0) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 / \ 0 \le w(B(x^0, \delta) \cap A) < \varepsilon \ \forall 0 < \delta < \delta_0 \Rightarrow$
($w(B(x^0, \delta) \cap A) = \sup\limits_{x,y \in B \cap A} |f(x) - f(y)|$)

в част.
$\Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon \ \forall y \in B(x^0, \delta_0) \cap A \Rightarrow f \in C(x^0)$ (опр непр в точке)
т.к. $x^0 \in B \cap A$

Опр. $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^n$, Тогда $\operatorname{diam} \Omega := \sup\limits_{x,y \in \Omega} \|x - y\|$ (diam – diameter)

Т2. (Т Кантора для ограниченных функций)
$K \subset \mathbb{R}^n$, K – компакт, $f \in B(K)$, $\exists w_0 > 0 / \ w(f, x) \le w_0 \ \forall x \in K$.
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / \ w(f, I \cap K) < \varepsilon + w_0 \ \forall$ отрез I с $\operatorname{diam} I < \delta$
($w_0 = 0$ – непр. ф-ция $\Rightarrow w(f, I \cap K) < \varepsilon$)

▶ 1) $\exists x \in K$ – произвольно. Т.к. $w(x) \le w_0$ (lim) $\Rightarrow$ т.к. w_0 lim (·) $\exists B(x, 2\delta(x)) / \ w(B(x; 2\delta(x)) \cap K) < w_0 + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$)

$\Rightarrow$ 2) Получаем $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, 2\delta(x))$. K – компакт $\Rightarrow \exists$ конечное п/покрытие $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m} B(x^l, \delta_l)$,
$\Rightarrow K \subset \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \delta(x))$
где $\delta_l := \delta(x^l)$.
Положим $\delta := \min\limits_{l = \overline{1,m}} \delta_l$.

3) $\exists I$ – отрез с $\operatorname{diam} I < \delta$. (*) имеем: $\forall x, y \in I \cap K$, $\|x - y\| \le \|x^0 - x^{l_0}\| + \|y - x^0\| \le$
$\le 2\delta_{l_0}$
$\exists l_0 \in \overline{1,m} / \ x^0 \in B(x^{l_0}, \delta_{l_0})$ (ориг.)
$\Rightarrow x^0 \in I \cap K$
$< \delta_{l_0} \le \delta \le \delta_{l_0}$

(*) ($I \cap K \neq \emptyset$, $x^0 \in I \cap K \Rightarrow \exists l^0 / \ x^0 \in B(x^{l^0}, \delta_{l^0})$)
$\forall y \in I \cap K$: $\|y - x^{l^0}\| \le \|x^{l^0} - x^0\| + \|x^0 - y\| \le 2\delta_{l^0}$
$\Rightarrow K \cap I \subset B(x^{l^0}, 2\delta_{l^0})$
$\Rightarrow w(f, I \cap K) \le w_0 + \varepsilon$ (см 1))

Сл-ие $\exists$ выполн. усл Т2 для отрез $K = I$ – отрез $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ разб. P отрез I с $\operatorname{diam} P < \delta / \ 0 \le \Omega(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{N} w(f, I_k) \cdot |I_k| \le (w_0 + \varepsilon) \cdot |I|$

▶ 1) $\exists$ отрез $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$
$\forall x, y \in J$ $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \le \max\limits_{k = \overline{1,n}} (b_k - a_k) \sqrt{n}$
($x_k, y_k \in [a_k, b_k]$)

2) $\exists \varepsilon > 0$ произвольно $\overset{Т2}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 / \ w(f, J) < w_0 + \varepsilon \ \forall$ отр J с $\operatorname{diam} J < \delta$
Выберем разбиение P отрез I с $d(P) < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \Rightarrow \Omega(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} w(f, I_k) \cdot |I_k| <$
но $\operatorname{diam}(I_k) < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = \delta \overset{Т2}{\Rightarrow} w(f, I_k) < w_0 + \varepsilon$
(см 1)) $\le (w_0 + \varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{n} |I_k| = (w_0 + \varepsilon) |I|$.



Лемма. $A=\overline{A}\subset\mathbb{R}^n$, $f\in B(A)$, $E(\varepsilon):=\{x\in A \mid w(f,x)\geq\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$.

$E:=\{x\in A \mid f\notin C(x)\}$

1) $\varepsilon_1\geq\varepsilon_2>0 \Rightarrow E(\varepsilon_1)\subset E(\varepsilon_2)$

$\Rightarrow$ 2) $E_\varepsilon=\overline{E}_\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$

3) $E=\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, где $E_m:=E\left(\frac{1}{m}\right)$, $m\in\mathbb{N}$.

▷ 1) $\exists\varepsilon_1\geq\varepsilon_2$, $\exists x\in E(\varepsilon_1) \Rightarrow w(f,x)\geq\varepsilon_1\geq\varepsilon_2 \Rightarrow x\in E(\varepsilon_2)$.

2) $\exists$ n-ть x^k / $x^k\to x$, $x^k\in E(\varepsilon)$ ($\varepsilon>0$ фикс.)

Т.к. $A=\overline{A}$, то $x\in A$

Имеем: $x^k\in E(\varepsilon) \Rightarrow w(x_k)\geq\varepsilon$, причём $\forall\delta>0\ \exists x^k\in B(x,\delta)$ (откр. шар)

и $\exists\delta_1>0$ / $x^k\in B(x^k,\delta_1)\subset B(x,\delta)$

$w(B(\delta,x)\cap A)\geq w(B(\delta_1,x^k)\cap A)\geq w(x^k)=\lim=\inf\geq\varepsilon$.

$\lim$, т.к. $\lim=\inf$ (см зам на пред лекции)

В итоге: $\forall\delta>0$ $w(B(x,\delta)\cap A)\geq\varepsilon \Rightarrow \inf w(B(x,\delta)\cap A)\geq\varepsilon \Rightarrow x\in E(\varepsilon)$.

$\lim=w(x)$ ч.т.д.

$\Rightarrow E(\varepsilon)=\overline{E}(\varepsilon)$

3) • $\exists x\in E \Rightarrow f\notin C(x) \Rightarrow w(f,x)>0 \Rightarrow \exists m\in\mathbb{N}$ / $w(x)\geq\frac{1}{m} \Rightarrow x\in E_m$. (кр. Бэра, $\geq$, но $\neq$)

• $\exists x\in\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \Rightarrow \exists m$ / $x\in E_m \Rightarrow w(x)\geq\frac{1}{m}>0$ кр. Б. $f\notin C(x) \Rightarrow x\in E$

Предварит. замечание (57)

$\forall\varepsilon>0$ $A=A_1(\varepsilon)\cup A_2(\varepsilon)$, причём 1) $\mu(A_1(\varepsilon))=0$; 2) $\exists$ (не более чем) $\{I_k, k\in\mathbb{N}\}$ / $\}\Rightarrow$

• $A_2(\varepsilon)\subset\bigcup_k \mathring{I}_k$ и $\sum_k |I_k|<\varepsilon$

$\Rightarrow \mu(A)=0$ (объединим доказ-ва для A_1 и для A_2)

3.3 Критерий Лебега (для брусса)

$f\in R(I) \Rightarrow f\in B(I)$, но $\mu(E)=0 \not\Rightarrow f\in B(I)$

Т (Критерий Лебега)

$\exists I\subset\mathbb{R}^n$, $f: I\to\mathbb{R}$, $f\in B(I)$, $E:=\{x\in I \mid f\notin C(x)\}$. Тогда $f\in R(I)\Leftrightarrow\mu(E)=0$

▷ 1) "$\Rightarrow$" $\exists f\in R(I)$;

Имеем (см лемму п.2) $E=\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \Rightarrow$ достаточно доказать, что $\mu(E_m)=0$ $\forall m\in\mathbb{N}$

а) фиксируем произв-но $m\in\mathbb{N}$

Т.к. $f\in R(I)$, то (предельный критерий)

$\lim_{d(P)\to 0}\Omega(f,P)=0$ (1)

Фиксируем пр-но $\varepsilon>0$. Тогда (1) $\Rightarrow \exists$ разбиение P бруса I / $0\leq\Omega(P)=\sum_{k=1}^{N} w(f,I_k)|I_k|<\frac{\varepsilon}{m}$ (2)

(где $I=\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ – част. брусса)

Идея: кр. кр. $\lim\Omega=0$ $<\varepsilon$; E_m – колеб $\geq\frac{1}{m}$; точки E_m попали в пр-во • по решетку • внутр

1) мера пл-ти 0 пр-во $=0$ $\Rightarrow$ решётка $\Rightarrow\mu=0$

б) $E_m=E_m'\cup E_m''$, где $E_m':=\{x\in E_m / x\in\bigcup_{k=1}^{N}(\partial I_k)\}$

$E_m'':=\{x\in E_m / x\in\mathring{I}_{k_\ell}$ для нек $k_\ell\in\{1,\dots N\}\}$

в) Расс. E_m': $\mu(E_m')=0$, т.к. E_m' состоит из объединения частей плоскости (мера пл-ти в $\mathbb{R}^3=0$ см. сама)

границы брусков

$\mu(E_m')=0$, E_m' – компакт $\Rightarrow\mathcal{J}(E_m')=0$

г) Расс. E_m'': если $E_m''=\varnothing$, то ч.т.д.

• П: $E_m''\neq\varnothing$, $\exists x^0\in E_m'' \Rightarrow \exists k_0$ / $x^0\in E_m''\cap\mathring{I}_{k_0}$

$\exists B(x^0,\delta)\subset\mathring{I}_{k_0}$, причём $w(x^0)\geq\frac{1}{m}$ ($x^0\in E_m$)

колеб на B $\geq$ $w(B;x^0)$ – см. опр. колеб

$\Rightarrow w(I_{k_0})\geq w(B(x^0,\delta))\geq w(x^0)\geq\frac{1}{m}$ (3)

монотонность. $\lim=\inf$

Рассм. н/ф.м. кон. отрезков $\{I_{kl},\ l=\overline{1,L_k} / w(I_{kl}) \geq \frac{1}{m}\}$ — конечна для $\mu=0$ (4)

Имеем: • $E_m'' \subset \bigcup_{l=1}^{L} I_{kl}$ (см (3))

• $m\left\{\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{L}|I_{kl}|\right\} \leq m\left\{\sum_{l=1}^{L} w(I_{kl})|I_{kl}|\right\} \leq m\cdot\Omega(P) < \frac{\varepsilon}{m}\cdot m = \varepsilon$ (см (2))

$\Rightarrow \mu(E_m'')=0$. $\Rightarrow$ (см. предв. зам. +в) $\mu(E_m)=0$ $\Rightarrow$ (счет. Ω) $\mu(E)=0$.

Зам: $\left.\begin{matrix} v(E_m')=0 \\ v(E_m'')=0 \end{matrix}\right\} v(E_m)=0 \overset{?}{\Rightarrow} v(E)=0$

в общ. случае, если E не компакт и ее объединение v неудерживает

(2) $\mu(E)=0$, $f\in B(E) \overset{?}{\Rightarrow} f\in R(E)$

§1, 1.4, 1.2 : $f\in B(E)$; $f\in R(E) \Leftrightarrow \inf_{P\in\mathcal{P}} \Omega(f,P)=0$ (≥ 0).

$\Rightarrow$ достаточно д-ть $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ р-ие P_0 отрезка I / $\Omega(P_0)<\varepsilon$

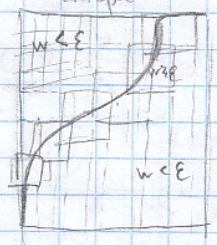
(a) Фиксируем прив. $\varepsilon>0$. Рассмотрим соответствующее м-во $E(\varepsilon) := \{x\in I / w(x)\geq\varepsilon\}$

Т.к. $E(\varepsilon)\subset E$, то $\mu(E(\varepsilon))=0$ $\Rightarrow v(E(\varepsilon))=0$ (компакт ! отр + замкн — см. 1 п.2). в вариации определения

$\Rightarrow \exists$ к-во отрезков $J := \{J_l,\ l=\overline{1,L}\}$ / • $E(\varepsilon)\subset \bigcup_{l=1}^{L} J_l$,

• $\sum_{1}^{L}|J_l|<\varepsilon$ ($v(E(\varepsilon))=0$)

+ Кантора



(d) Имеем: $J_l = [\alpha_1^{(l)},\beta_1^{(l)}]\times\dots\times[\alpha_n^{(l)},\beta_n^{(l)}]$, $l=\overline{1,L}$

Составим разбиение P отрезка I / для $P=(P_1,P_2,\dots P_n)$,

где $P_i \supset \{\alpha_\delta^{(\ell)},\beta_\delta^{(\ell)} / \alpha_\delta^{(\ell)},\beta_\delta^{(\ell)}\in[a_i,b_i]\}$, $\delta=\overline{1,m}$; $i=\overline{1,n}$.

$\ell=\overline{1,L}$

Разбиение P индуцирует $I=\bigcup I_k$ -отрезки

В к-ве частичных отрезков $\{I_k, k=\overline{1,N}\}$ выделим 2 н/ф.м.

$I_{ks}\subset J$

• $\{I_{ks}, s=\overline{1,S} / I_{ks}\cap J_\ell\neq\varnothing\} =: I'$

• $\{I_{kt}, t=\overline{1,T} / I_{kt}\cap J_\ell=\varnothing,\ \ell=\overline{1,L}\} =: I''$

(b) Рассмотрим н/ф.м. I' $\leq 2M$

Имеем: $\sum_{s=1}^{S} w(f,I_{ks})|I_{ks}| \leq 2M\sum_{s=1}^{S}|I_{ks}| < 2M\varepsilon$,

где $M := \sup_I f < \infty$ (см. a)

(c) Рассм н/ф.м. I''

Зам, что $\forall t=\overline{1,T}$ $I_{kt}\cap\bigcup_{\ell} J_\ell=\varnothing$ $\Rightarrow I_{kt}\cap E_\varepsilon=\varnothing$. $\Rightarrow w(x)<\varepsilon$ $\forall x\in I_{kt}$

$\forall$ Кантора $\Rightarrow$ (р-ие отр. функ.) $\exists\delta=\delta(\varepsilon)$ / $\forall$ отр. k с $\operatorname{diam} k<\delta$ $w(k)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$

($\forall 2$ п.2)

Фиксируем прив. I_{kt}, $t\in\{\overline{1,T}\}$. Рассмотрим р-ие P_{kt} фикс-ого отр I_{kt} с $d(P_{kt})<\delta$, $I_{kt}=\bigcup_{m=1}^{M} I_{kt,m}$

$\Rightarrow \sum_{m=1}^{M} w(I_{kt,m})\cdot|I_{kt,m}| < 2\varepsilon\cdot|I_{kt}|$ ($<2\varepsilon$)

(g) Рассм. р-ие P_0 отрезка I, соответствующее = разбиению I на отрезки:

$I = I'\cup\left(\bigcup_{t=1}^{T}\bigcup_{m=1}^{M} I_{kt,m}\right)$.

$\Rightarrow \Omega(P_0) = \underbrace{\sum_{s=1}^{S} w(f,I_{ks})|I_{ks}|}_{<2M\varepsilon\ (\text{п. b})} + \sum_{t=1}^{T}\underbrace{\sum_{m=1}^{M(t)} w(I_{kt,m})|I_{kt,m}|}_{<2\varepsilon|I_{kt}|} < 2M\varepsilon + 2\varepsilon\underbrace{|I''|}_{\leq|I|}\varepsilon$

$\leq 2\varepsilon(M+|I|)$

22.03.19 **Глава 2. Интеграл Римана на ограниченном множестве**

§1. Измеримость по Жордану

1.1. Определение измеримого по Жордану мн-ва

Напоминание $\exists A \subset \mathbb{R}^n$; тогда A ограничено $\overset{def}{\iff} \exists$ брус $I: A \subset I$.

ОПР1. $\exists A \subset \mathbb{R}^n$, A ограничено. Тогда A измеримо по Жордану $\overset{def}{\iff} \mu(\partial A) = 0$

Зам. A ограничено $\Rightarrow \partial A$ огр. и замкн. $\Rightarrow \partial A$ – компакт $\Rightarrow (\mu(\partial A) = 0 \iff v(\partial A) = 0)$

Пр-ры брус, шар



Т.о графике (на 3 части)



ОПР2 $\exists A \subset \mathbb{R}^n$. Функция $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A, \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ называется характеристической ф-цией мн-ва A.

Т1 (критерий измеримости по Жордану)

$\exists A \subset I$. Тогда A измеримо по Ж. $\iff \chi_A \in R(I)$.

1) ф-жем, что мн-во $E := \{x \in I \,/\, \chi_A \notin C(x)\} = \partial A$

В.с.р., имеем: $\mathbb{R}^n = A^0 \cup \partial A \cup A_e = A_i \cup \partial A \cup A_e$ – откр

- $x^0 \in A_i \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \ \forall x \in O(x^0) \subset A_i$ (некая окр-ть)

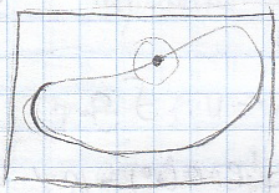
$\Rightarrow \chi_A \in C(A_i)$.

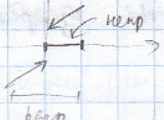
- аналог. $x^0 \in A_e \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \ \forall x \in O(x^0) \subset A_e$ (откр) $\Rightarrow \chi_A \in C(A_e)$
- $x^0 \in \partial A$. $\Rightarrow \exists$ посл-ть $(x_n^{(1)} \in A) \,/\, x_n^{(1)} \to x^0$ (*)

$\exists$ посл-ть $(x_n^{(2)} \in C_A) \,/\, x_n^{(2)} \to x^0$ (**)

$\Rightarrow \begin{matrix} \chi_A(x_n^{(1)}) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \chi_A(x_n^{(2)}) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{matrix} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to x^0} \chi_A(x)$ (доопределение) $\Rightarrow \chi_A \notin C(\partial A)$

2) A изм. по Ж. $\iff \mu(\partial A) = 0$ по опр $\iff \mu(E) = 0 \iff \chi_A \in R(I) \ \forall I \supset A$. (кр. Лебега $\chi_A \in B(I)$)





ОПР3. $\exists A \subset I$. Тогда мера Ж. мн-ва A (A изм по Ж)

$|A| := \int\limits_I \chi_A(x)\,dx$ (по Т1 $\int$ ал $\exists$)

Зам. – 2. 1) $\exists I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$I \in \mathcal{I}$, $\chi_I \in R(I)$, причём $\mu(\partial I) = 0$

$\sigma(\chi_I; P) = \prod\limits_{k=1}^{n} |I_k| = |I|$ (старший объём)

2) корректность ОПР3 корректно.

Вс $\exists A \subset I_1$, $A \subset I_2 \Rightarrow A \subset (I_1 \cap I_2) =: I$ (брус)

A измеримо по Ж. $\Rightarrow \exists \int\limits_{I_1} \chi_A\,dx$, $\int\limits_{I_2} \chi_A\,dx$, $\int\limits_I \chi_A\,dx$

(ост по любых $\Sigma = \int$; пар-ры схожи аналогично)

Рассмотрим размеч. разбиение (P, ξ) бруса I_1 / $\xi^k \in I_k^0 \cap (I_1 \setminus I)$.

$\Rightarrow \chi_A(\xi^k) = 0$

$\Rightarrow \sigma(\chi_A, P, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{\mu} \underbrace{\chi_A(\xi^{k'})}_{\text{т.к. } \in I} |I_{k'}| \to \int\limits_I \chi_A\,dx$

$\Rightarrow \int\limits_{I_1} \chi_A\,dx = \int\limits_I \chi_A\,dx$

Т2. $\exists A \subset I \Rightarrow (A$ измеримо по Ж$) \wedge (\underbrace{|A| = 0}_{\text{м. ж.}}) \iff \underbrace{v(A) = 0}_{\text{опр}}$ ГЛ 1 §3; 3.1

$\Rightarrow \exists A$ изм. по Ж, $|A| = 0$.

а) $\exists x \in A^0 \Rightarrow \exists I(x) \,/\, x^0 \in I(x) \subset A^0$

$\Rightarrow s(\chi_A; I) \geq |I(x)| > 0 \Rightarrow J_H = \sup\limits_P s > 0$ (Жорду / Интегр. Σ)

$= \int\limits_I \chi_A\,dx = 0$ – нер-во $\Rightarrow \Leftarrow$ $\square$

⇐ 0) Т.к. $\mathring{A} = \emptyset \Rightarrow A \subset \partial A$. Но по усл. $\mu(\partial A) = 0 \Leftrightarrow v(\partial A) = 0$ (компакт) $\Rightarrow v(A) = 0$

1) $\exists\, v(A) = 0$

2) Д-м, что A изм. по Ж-ну:

Имеем: $v(A) = 0 \Rightarrow v(\bar{A}) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0 \Rightarrow A$ изм. по Ж.

3) $\exists$ P - разбиение $\mathbb{I}$ ($A \subset \mathbb{I}$), такое что $I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$. Тогда $\forall k = \overline{1,N}$ $R_k \not\subset A$.

$\Rightarrow$ $s(P) = \sum m_k |I_k| = 0 \Rightarrow J_A = \sup s(P) = 0 \Rightarrow |A| = 0$.

$\exists$, т.к. A изм. по Ж. +T1

Зам. $|A|$ называют также объёмом A. - Зал от χ_A по Ч. брусу

1.2. Свойства измеримых мн-в

Лемма. $\exists A \subset \mathbb{I}$, A изм. по Ж $\Rightarrow \bar{A}$ и ∂A изм. по Ж.

1) $\partial A = \partial \bar{A}$ (правильный семестр) $\Rightarrow \bar{A}$ изм. по Ж.

2) A изм. по Ж $\Rightarrow v(\partial A) = 0 \Rightarrow$ (см. Т2 п.1) ∂A изм. по Ж (+изм)

T1. A_1, A_2 - огр. и изм. по Ж. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $A_1 \cup A_2$ - изм. по Ж.

2) $A_1 \cap A_2$ - изм. по Ж.

1) Имеем: $\partial(A_1 \cup A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$

В с.р., пусть $x \in \partial(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \forall O(x) \in O(x)$ $\exists x_1 \in A_1 \cup A_2$, т.е. $(x \in A_1)$ или $(x \in A_2)$

$\exists x_2 \in \overline{C(A_1 \cup A_2)} = CA_1 \cap CA_2 \Rightarrow$ (ровно)

$\Rightarrow (x_2 \in CA_1) \wedge (x_2 \in CA_2)$.

или
- $(x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in CA_1) \Rightarrow x \in \partial A_1$
- $(x_1 \in A_2) \wedge (x_2 \in CA_2) \Rightarrow x \in \partial A_2$

$\Rightarrow x \in \partial A_1 \cup \partial A_2$

2) $\partial(A_1 \cap A_2) \subset (\partial A_1) \cup (\partial A_2)$!

$x \in \partial(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \forall O(x)$ $\exists x_1 \in A_1 \cap A_2$, т.е. $(x_1 \in A_1) \wedge (x_1 \in A_2)$

$\exists x_2 \in C(A_1 \cap A_2) = CA_1 \cup CA_2 \Rightarrow (x_2 \in CA_1) \vee (x_2 \in CA_2)$

или
- $(x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in CA_1) \Rightarrow x \in \partial A_1$
- $(x_1 \in A_2) \wedge (x_2 \in CA_2) \Rightarrow x \in \partial A_2$

$\Rightarrow x \in \partial A_1 \cup \partial A_2$

Сл-ие. $A_1, \dots, A_n$ - изм. по Ж $\Rightarrow \bigcup_1^n A_i$ измеримо, $\bigcap_1^n A_i$ измеримо

Напоминание: Т. о неявн. ф-ции !!!

$(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$; $F: O(x^0, y^0) \to \mathbb{R}$, причём

1) $F(x^0, y^0) = 0$
2) $F \in C^1(O(x^0, y^0))$ (дифф-ма по x^0, y^0)
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists O(x^0)$, $\exists ! f: O(x^0) \to \mathbb{R}$

1) $f(x^0) = y^0$
2) $F(x, f(x)) \equiv 0$ в $O(x^0)$
3) $f'(x) = -\frac{F'_x(x,f)}{F'_y(x,f(x))}$, $x \in O(x^0)$

δg

$F(x, f(x)) = 0$

$F'_x + F'_y f'(x) = 0$

Обозн: $\exists U \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n\}$ U откр в $\mathbb{R}^{m+n}$

$\exists F: U \to \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(U)$

Тогда $F'_y(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \to F$ в $\mathbb{R}^n$

$F'_x(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$

Т (о неявных функциях общий случай Зорич, I том, с. 568). 26.03.19

$\exists (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$: $U^0_{\cdot} = O(x^0, y^0)$. $\exists F: U \to \mathbb{R}^n$ отд. дважды!

1) $F(x^0, y^0) = 0$
2) $F \in C^1(U)$
3) $\det F'_y(x^0 y^0) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists \mathring{I}^m(x^0) \times \mathring{I}^n(y^0) \subset U$ и $\exists f: \mathring{I}^m(x^0) \to \mathring{I}^n(y^0)$ с усл-ми:

1) $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ $\forall (x, y) \in \mathring{I}^m(x^0) \times \mathring{I}^n(y^0)$
2) $f \in C^1(\mathring{I}^m)$, причем $f'_x(x) = -F'^{-1}_y F'_x$ ($n \times m$; $n \times n$, $n \times m$)

$F(x, y) = 0 = F(x, f(x)) \Rightarrow F'_x + F'_y f'_x = 0 \Rightarrow f'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -F'^{-1}_y F'_x$ (в скоб. опр-ля)

Опр. $\exists U, V \subset \mathbb{R}^n$ U, V – открытые f – биекция. $f: U \to V$

Тогда 1) f – диффеоморфизм $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(f \in C(U)) \wedge (f^{-1} \in C(V))$

2) f – C^1-диффеоморфизм $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(f \in C^1(U)) \wedge (f^{-1} \in C^1(V))$

Т2 (о локальном диффеоморфизме)

$\exists G \subset \mathbb{R}^m$, G – открытое, $x^0 \in G$

$\exists f: G \to \mathbb{R}^m$ $y^0 := f(x^0)$ обладает свойствами:

1) $f \in C^1(G)$
2) $\det Df(x^0) \neq 0$ ($m \times m$)

$\Rightarrow$ $\exists U = O(x^0)$, $\exists V = O(y^0)$

1) $f: U \to V$ – биекция + диффеоморфизм
2) $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$ (1) $\forall x \in U$, $y = f(x)$

▶ 1) Положим $F(y, x) := f(x) - y$, $(y, x) \in \mathbb{R}^n \times G$ (открыт.) $\Rightarrow$ см. усл. Т. о неявн. функ.

- $F(y^0, x^0) = f(x^0) - y^0 = 0$
- $F \in C^1(\mathbb{R}^m \times G)$
- $\det F'_x(y^0, x^0) = \det Df(x^0) \neq 0$ по усл. 2.

$\Rightarrow$ см Т о неявных функ

$\frac{\partial y}{\partial x^i} = 0$ см опр $F(y, x)$ $\frac{\partial (f(x) - y)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$

$\Rightarrow$ $\exists \mathring{I}(y^0) \times \mathring{I}(x^0)$ и $\exists g: \mathring{I}(y^0) \to \mathring{I}(x^0)$ со свойствами:

$F(y, x) = f(x) - y = 0 \Leftrightarrow x = g(y)$ (2) $\forall (y, x) \in \mathring{I}(y^0) \times \mathring{I}(x^0)$

- $g \in C^1(\mathring{I}(y^0))$ (3), причем

$Dg(y) = -(F'_x(y, g(y)))^{-1} \cdot F'_y(y, g(y)) = (F'_x(y, g(y)))^{-1}$ (4) $\forall y \in \mathring{I}(y^0)$.

$= (Df(x))^{-1} = Df^{-1}(y)$ $g = f^{-1}$ $-F$ $f(x) - y$, $y = f^{-1}$

$F(y, g(y)) = f(g(y)) - y = y - y = 0$ см (2).

2) Полагаем: $V := \mathring{I}(y^0)$, $U := g(\mathring{I}(y^0)) = g(V)$

а) Имеем: V – открыто (откр. брус)

U – открыто (непр. прообраз открытого – f^{-1}) $U = f^{-1}(V)$

$g: V \to U$ – биекция, $g = f^{-1}$ – см (2).

$f: U \to V$ – биекция, $f \in C^1(U)$

причем $f: U \to V$ – биекция (см. (2))

б) $f \in C^{+1}(U)$ по усл, $g \in C^{+1}(V)$ $\overset{\text{см (3)}}{\Rightarrow}$ f – диффеоморфизм

в) Верно (1) – см (4)

Т3 (о сохранении измеримости по Жо при C^1-отображении)

$\exists A \subset \overline{A} \subset G \subset \mathbb{R}^n$, G – открытое

- A – ограничено и изм по Жо

$f: A \to \mathbb{R}^n$ $f \in C^1(G) \Rightarrow f(A)$ огр. и изм по Жо ($\overline{A}$ – замкн и огр в $\mathbb{R}^n$)

▶ 1) $f(A)$ ограничено, т.к. $f(\overline{A})$ – ограничено (непр. образ компакта)

2) $\exists \overline{A} \subset I$; • Положим $S := \{x \in G \mid |Df(x)| = 0\}$ (в случае $m = n$) – биекция!

$S_A := S \cap A$ $\exists$, т.к. A ограничено (т.к. A огр) $\overset{\text{см T2}}{\Rightarrow}$ $f(x^0) \in f(A)$ (5)

- $\exists x^0 \in \mathring{A} = A_0$, причем $|Df(x^0)| \neq 0 \Rightarrow$ (непр.) $\exists O(f(x^0)) \subset f(A)$

Имеем: т. Сарда ($n \geq m$) $\Rightarrow \mu(f(S)) = 0 \Rightarrow \mu(f(S_A)) = 0$ (6)

Далее в силу (5), $\partial(f(A)) \subset f(S_A) \cup f(\partial A)$

$\mu = 0$ см (6) $\mu(f(\partial A)) = 0$ т. об инвар. меры при C^1-отобр

($\mu(\partial A) = 0$, т.к. A – изм по Жо)

$\Rightarrow \mu(\partial(f(A))) = 0 \Rightarrow$ $f(A)$ изм по Жо

§2 Интеграл Римана по ограниченном мере в $\mathbb{R}^n$

2.1. Определение интеграла Римана по огр. мн-ве в $\mathbb{R}^n$

Опр $\exists A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset I$. (т.е. A ограничено) $\exists f: A \to \mathbb{R}$

Тогда $f \in R(A)$ (f интегр. по Риману на A) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f \cdot \chi_A \in R(I)$, (продолжаем вне A чем хотим)

где $f\chi_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$; причём $\int\limits_A f(x)dx := \int\limits_I f \cdot \chi_A \, dx$

Зам. $\exists A = I \Rightarrow \int\limits_I f\,dx = \int\limits_I f\,dx$ (I в ст опр, I в "старом" смысле)

T1 (корректность определения) $\exists A \subset I_1$, $A \subset I_2$

$f: A \to \mathbb{R}$; $f\chi_A \in R(I_1) \Rightarrow f\chi_A \in R(I_2)$, причём $\int\limits_{I_1} f\chi_A\,dx = \int\limits_{I_2} f\chi_A\,dx$

▷ 1. $\exists f\chi_A \in R(I_1)$; $\exists E = \{x \in \mathbb{R}^n / f\chi_A \notin C(x)\}$

Имеем $E(f\chi_A)) \cap I_1 = E(f\chi_A) \cap I$, где $I := I_1 \cap I_2$ ($A \subset I$)

мера 0 по усл. $E(f\chi_A) \cap I_2$

$\Rightarrow$ мера $= 0$ $\Rightarrow$ кр. Лебега $f\chi_A \in R(I_2)$



2. $I := I_1 \cap I_2 \supset A$.

Пусть P – некое разбиение I. Рассмотрим рис I_1 вида:

$P(I) \cup P(I_1 \setminus \overline{I})$. $\exists \xi_m \in \mathring{I}'_m$ $\forall m = \overline{1,M}$. $d(\cdot) \le d(P(I))$

$\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ $\bigcup_{m=1}^{M} I'_m$ $d(\cdot) \le d(P(I))$ Аналогично $P(I_2) = P(I) \cup P(I_2 \setminus \mathring{I})$, $\xi_\ell \in \mathring{I}''_\ell$

$\bigcup_{\ell=1} I''_\ell$

$\Rightarrow \sigma(f\chi_A; P(I_1, \xi)) = \sigma(f\chi_A, P(I_2, \xi)) = \sigma(f\chi_A; P(I))$ (доп. 0 вне I)

к $\lim_{d(P)\to 0}$: $\int\limits_{I_1} f\chi_A\,dx = \int\limits_{I_2} f\chi_A\,dx$

$A \subset I$

Зам. $\exists A \subset I$, $f \in R(A) \overset{6.2}{\not\Rightarrow}$ A измеримо.

Например $f = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$; $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$\chi_A f = 0 \Rightarrow \exists \int\limits_A f\,dx = 0$

Но $\partial A = [0,1] \Rightarrow \mu(\partial A) \neq 0$.

T2 Критерий Лебега

$A \subset I$, A – изм, $f \in B(A)$. Тогда $f \in R(A) \Leftrightarrow \mu(E(f)) = 0$, где $E(f) = \{x \in A / f \notin C(x)\}$

▷ Полагаем $f(x)\chi_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

1. $\Rightarrow$ $\exists f \in R(A)$, A – изм. $\Rightarrow f\chi_A \in R(I)$ (по опр) $\Rightarrow$ кр. Леб. для $f\chi_A$, I) $= 0$.

Но $E(f) \overset{(*)}{\subset} E(f\chi_A) \overset{(**)}{\subset} (E(f) \cup \partial A)$

если функ. непр-на, то при непр-ном χ_A

т.е. $f\chi_A$ разр, если f разр $(E(f))$ или χ_A разр (∂A)

Сл-но (см (*)), $\mu(E(f)) = 0$.

2. $\Leftarrow$ $A \subset I$, A изм, $\mu(E(f)) = 0$. Надо д-ть, что $f \cdot \chi_A \in R(I)$ (по опр $f \in R(A)$)

кр. Леб. для $f\chi_A$ $\Leftrightarrow \mu(E(f\chi_A), I) = 0$. Но $\mu(E(f)) = 0$ (условие) и $\mu(\partial A) = 0$ (A изм. по Жк)

$\Rightarrow \mu(E(f) \cup \partial A) = 0 \overset{\text{см}(**)}{\Rightarrow} \mu(E(f\chi_A), I) = 0$

2.2 Свва интеграла

Лемма. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

▷ • Если $A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ очев

• $\exists A \cap B \neq \varnothing$



1) $\exists x \in A \cup B$
   а) $x \in A \setminus B \Rightarrow \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1+0-0 = 1$
   б) $x \in B \setminus A$ — аналогично
   в) $x \in A \cap B \Rightarrow \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 1+1-1 = 1 \neq \varnothing$

2) $x \notin A \cup B \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$ $\quad x \in (A\cup B) = CA \cap CB$
$\Rightarrow \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = 0+0-0 = 0$ ◁

Сл-ие. $A, B \subset I$, A, B — измеримы, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B$ измеримо, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

▶ $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B \Rightarrow |A\cup B| = \int\limits_I \chi_{A\cup B} = \int\limits_I (\chi_A + \chi_B)\,dx = |A| + |B|$. ◀

↑ интегр. сумма; измеримость — знаем для Жордана

Т1 (Линейность $\int\limits_A$)

$f, g \in R(A)$, $A \subset I$. $\Rightarrow \alpha f + \beta g \in R(A)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причём $\int\limits_A (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int\limits_A f\,dx + \beta \int\limits_A g\,dx$.

▶ переход к бруску, на бруске — свойства сумм, переход к пределу — ◀

Зам. Т1 верна и для конечной линейной комбинации.

Т2. $A \subset I$, $B \subset A$, B ~~замкнуто~~; $\mu(B) = 0$. $f \in R(A)$, причём $f \equiv 0$ на $A \setminus B$.
$\Rightarrow \int\limits_A f\,dx = 0$.

▶ Рассмотрим пр-ое разбиение $P(I)$ и соотв. интегральную сумму
$\sigma(f\chi_A; (P,\xi)) = \sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,|I_k|$. Но $I_k \setminus B \neq \varnothing$. $\forall k$ т.к. $\mu(I_k) \neq 0 = \mu(B)$.
(иначе $I_k \subset B$)
$\Rightarrow$ ξ_k берём $\in I_k \setminus B \Rightarrow f(\xi_k) = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma(P,\xi) = 0$
и $\int\limits_A f\,dx$ — где использовали?

Сл-ие. $B \subset A \subset I$, B ~~измеримо~~, $f, g \in R(A)$; $\mu(B) = 0$, $f \equiv g$ на $A \setminus B \Rightarrow \int\limits_A f\,dx = \int\limits_A g\,dx$ ◀

Зам. Усл-ия сл-ия, кроме $g \in R(A)$. $\overset{\text{в-т}}{\Rightarrow}$ $g \in R(A)$ по Риману.

Пр-р $g(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{Q} \\ 1, \text{иначе} \end{cases}$ на $[0,1]$ $\quad f(x) \equiv 1$ на $[0,1]$ $\quad f = g$ на $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$
$\mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.
$g \notin R(A)$.

Т3. (интегрируемость произведения)
$A \subset I$, $f, g \in R(A) \Rightarrow fg \in R(A)$

▶ Имеем: $fg\chi_A = (f\chi_A)\cdot(g\chi_A)$. Из условия $F, G \in R(I)$ $\Rightarrow$ кр. Лебега для бруса
$\Rightarrow \mu(E(F,I)) = 0$, $\mu(E(G,I)) = 0$. $\exists x \in I$ / $F \in C(x)$, $G \in C(x) \Rightarrow FG \in C(x)$.
Поэтому $E(FG,I) \subset (E(F,I) \cup E(G,I))$ $\Rightarrow \mu(E(FG,I)) = 0 \Rightarrow$ кр. Леб на бруске $FG \in R(I)$.
$\Rightarrow$ по опр. $fg \in R(A)$ ◀

Т4 (аддитивность $\int$ по A) $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k$, $A_k \cap A_\ell = \varnothing$, $k \neq \ell$; $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in R(A_k)$ $\forall k = \overline{1,m}$ $\Rightarrow f \in R(A)$, причём
$\int\limits_A f\,dx = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{A_k} f\,dx$. (1)

▶ Усл. $T \Rightarrow f\cdot\chi_{A_k} \in R(I)$, $k = \overline{1,m}$.
Имеем: $f\cdot\chi_A = f\cdot(\chi_{\bigcup A_k}) \overset{\text{лемма}}{=} f\sum\limits_{k=1}^{m}\chi_{A_k} = \sum\limits_{k=1}^{m} f\chi_{A_k} \overset{\text{см. Т1}}{\Rightarrow} f\cdot\chi_A \in R(I)$, причём
$\int\limits_I f\chi_A\,dx = \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_I f\chi_{A_k}\,dx$
$\Rightarrow \int\limits_A f = \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{A_k} f\,dx$ ◀

интегр. по сумме промежутков

$B = \{0\} \subset [0,1]$

Т5. $A \subset I$, $B \subset A$, B — изм. $f \in R(A) \Rightarrow f \in R(B)$.

контр-пр-р с Дирихле

▶ Надо: $f\chi_B \in R(I)$. Имеем: $f\chi_B = f\chi_B\chi_A = (f\chi_A)\chi_B$. Но $f\chi_A \in R(I)$ по усл.;
$\chi_B \in R(I)$ по критерию измеримости для B $\overset{T3}{\Rightarrow}$ $f\chi_B \in R(I) \Rightarrow f \in R(B)$ ◀

придумать (будущ. Д)

Зам. Впадла

Сл-ие. $A = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k \subset I$; $A_k \cap A_\ell = \varnothing$ $(k \neq \ell)$, A_k — измеримые $\forall k$, $f \in R(A) \overset{T5}{\Rightarrow} f \in R(A_k)$ $\forall k \overset{T4}{\Rightarrow}$ (1) ◀

2015 К. 3. Оценки интеграла. §12.

Т1. $A \subset I$, $f \in R(A)$, $f \geq 0$ на $A \Rightarrow \int_A f\,dx \geq 0$.

▶ Имеем: $\int_A f\,dx = \int_I f\chi_A\,dx = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(f\chi_A, P) \geq 0$ ◀

сл-ия. 1. $A \subset I$, $f, g \in R(A)$, $f \geq g$ на $A \Rightarrow \int_A f\,dx \geq \int_A g\,dx$

2. $A \subset I$, $f \in R(A)$, A-измеримо. $\Rightarrow \inf_A f \cdot |A| \leq \int_A f\,dx \leq \sup_A f \cdot |A|$

▶ $\inf_A f \cdot |A| \leq \int_A f\,dx = \int_I f\chi_A\,dx \leq \sup_A f \int_I \chi_A\,dx = \sup_A f \cdot |A|$ ◀

3. $B \subset A \subset I$, A, B – измер. $\Rightarrow |B| \leq |A|$

▶ $|B| = \int_I \chi_B\,dx \leq \int_I \chi_A\,dx = |A|$ ◀

$\chi_B \leq \chi_A$ (по опр. измер. $\exists$, см. 2)

Т2. $A \subset I$, A – измеримо, $f \in R(A) \Rightarrow |f| \in R(A)$ (1)

и $\left|\int_A f\,dx\right| \leq \int_A |f|\,dx$ (2).

▶ 1) Доказ-во (1)

Имеем: $f \in C(X) \Rightarrow |f| \in C(X)$ т.к. $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$

$\Rightarrow E(|f|) \subset E(f)$, но (кр. Лебега, A-измер.) $\mu(E(f)) = 0 \Rightarrow \mu(E(|f|)) = 0$

$\Rightarrow$ кр. Леб. (1)

2) Имеем $-|f| \leq f \leq |f|$ на A $\overset{сл1}{\Rightarrow} -\int_A |f|\,dx \leq \int_A f\,dx \leq \int_A |f|\,dx \Rightarrow \left|\int_A f\,dx\right| \leq \int_A |f|\,dx$ ◀ (2)

з-ие $A \subset I$, $|A| = 0$ (объём), $f \in B(A) \Rightarrow f \in R(A)$, причём $\int_A f\,dx = 0$

▷ 1. Заметим, что A – измеримо, т.к. $|A| := \int_I \chi_A\,dx$; $\mu(E(f)) = 0$, т.к. $E(f) \subset A$, $\mu(A) = 0$, т.к. $|A| = 0$ ($E(f, A)$)

$\Rightarrow f \in R(A)$. по кр. Лебега

2. Имеем: $0 \leq \left|\int_A f(x)\,dx\right| = \left|\int_I f(x)\chi_A(x)\,dx\right| \overset{\text{Т2. } A}{\leq} \sup_A |f| \cdot \underbrace{\int_I \chi_A\,dx}_{=|A|=0} = 0$. ◁

Т3. $A \subset \mathring{I}$, $f \in R(A)$, $f \geq 0$ на A, $\int_A f\,dx = 0$, $B := \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ (*)

$\Rightarrow \mu(B) = 0$.

▶ 1) $\exists F := f \cdot \chi_A \in R(I)$ ($f \in R(A)$) $\Rightarrow B = \{x \in \mathring{I} / F(x) > 0\}$. Из условия $f \in R(A) \Rightarrow F \in R(I)$.

кр. Леб. $\Rightarrow \mu E(F, I) = 0 \Rightarrow \mu(E(F, \mathring{I})) = 0 \Rightarrow$ достаточно д-ть, что $B \subset E(F, \mathring{I})$

2) Итак, достаточно д-ть, что $CB \supset CE(F, \mathring{I})$

$\exists x \in C E(F, \mathring{I})$, т.е. $(x \notin E(F, \mathring{I})) \vee (x \notin \mathring{I})$:

Если $x \notin \mathring{I} \Rightarrow$ см. опр. B (*) $x \notin B$.

Если $x \notin E(F, \mathring{I})$, $x \in \mathring{I} \Rightarrow F \in C(x)$. $\exists\, x \in B \Rightarrow x \in A$, $f(x) > 0 \Rightarrow f(x) \geq c(x) > 0$ (const)

$\exists I_1(x) \subset \mathring{I} / f|_{I_1(x)} \geq c(x)/2$

$\Rightarrow \int_{I_1(x)} f\,dx \geq \frac{c(x)}{2} \cdot |I_1(x)| > 0$ (т.к. $|I_1(x)| > 0$) или $\int_I F\,dx \geq \int_{I_1} F\,dx \geq c > 0$, но $\int_A f\,dx = 0$ ▶◀

$\Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow x \in C(B)$

Следствие (1) $\forall I \subset \mathbb{R}^n$, $f \in R(I)$, $f \geq 0$ на $I \Rightarrow \int_I f dx \geq 0$.

▷ $f \geq 0 \Rightarrow f \geq 0$ на $A \overset{T1}{\Rightarrow} \int_I f dx \geq 0$

Пр: $\int_I f dx = 0 \overset{T3}{\Rightarrow} \mu(\{x \in I \mid f(x) > 0\}) = 0 \overset{T3}{\Rightarrow} \mu(I) = 0$ Р.

т.к. $\mu(I) \neq 0$ (отрицание $\neg(\mu(I) = 0)$) ◁

(2) $A \subset I$, A – откр, изм, $f \in C(A)$, $f \geq 0$ на A, $f \in R(A)$, причём $\int_A f dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ на A.

▷ Пр: $\exists x \in A / f(x) > 0$, $f(x) \geq c > 0$.

Но A – откр, $f \in C(A) \Rightarrow \exists I_1(x) \subset A$, $f(I_1(x)) \geq \frac{c}{2} > 0 \overset{T3}{\Rightarrow} \mu(I_1) = 0$ Р ◁

(3) A изм., открыто, $f \in C(A)$, $\int_I f dx = 0 \ \forall I \subset A \Rightarrow f \equiv 0$ на A

▷ Пр: $\exists x / f(x) \neq 0$. Не огр. общ. $f(x) \neq 0$ $\overset{\text{анал.}}{\Rightarrow} \exists I_1(x) \subset A / f(I_1(x)) \geq \frac{c}{2} > 0$

$\int_I f dx \geq \int_{I_1} f dx \geq \frac{c}{2} |I_1| \neq 0$ Р условием ($\forall I \int_I f dx = 0$) ◁

§3. Теорема Фубини для бруса (о сведении кратного ∫а к повторному) δ3

T1. (Фубини для бруса о сведении кратного к повторному)

] $I := I^m \times I^n$, где $I^m \subset \mathbb{R}^m$, $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $m \geq 1, n \geq 1$

$f \in R(I)$

$J_H(x) := J_H(f(x, \cdot))$; $J_B(x) := J_B(f(x, \cdot))$, $x \in I^m$

(интегр. берут по y)

Тогда: $J_H \in R(I^m)$, $J_B \in R(I^m)$, причём $J := \int_I f(x,y) dx dy = \int_{I^m} J_H(x) dx$ (1)

$J = \int_{I^m} J_B(x) dx$. (2)

▷ (1) Д-м (1) (2) д-ся аналогично)

] $P_2 P^m \times P^n$ – прост. разбиение бруса I, где P^m (P^n) – соотв. разбиение P бруса I^m (I^n)

Индуцирует прост. $I = \bigcup_{i=1}^{N_m} \bigcup_{j=1}^{N_n} I_i^m \times I_j^n$ (3)

Положим $m_{ij} := \inf_{(x,y) \in I_i^m \times I_j^n} f(x,y)$, $M_{ij} := \sup_{(x,y) \in I_i^m \times I_j^n} f(x,y)$

$m_j(x) := \inf_{y \in I_j^n} f(x, y)$ $\quad m_{ij} \leq m_j(x) \ \forall x \in I_i^m \Rightarrow m_{ij} \leq \inf_{x \in I_i^m} m_j(x)$ (*).

$M_j(x) = \sup_{I_j^n} f(x, \cdot)$

Заметим, что $f(x,y) \geq \inf_{y \in I_j^n} f(x,y) = m_j(x) \geq m_{ij}$ $\forall x \in I_i^m$ $\overset{\text{переходя к } \inf_x}{\Rightarrow}$

$m_j(x) \geq m_{ij}$ (4)

Аналогично $M_j(x) \leq M_{ij}$ $\quad M_{ij} \geq \sup_{x \in I_i^m} M_j(x)$ (**)

Имеем: $S(f,P) \underset{\text{см}(3)}{=} \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_n} m_{ij} |I_i^m \times I_j^n| \leq \sum_{i=1}^{N_m} |I_i^m| \sum_{j=1}^{N_n} \inf_x m_j(x) |I_j^n|$

$\leq$ (обозн. $\inf_{x \in I_i^m} m_j(x)$) $\leq \sum_{i=1}^{N_m} \inf_{x \in I_i^m} \left(\sum_{j=1}^{N_n} m_j(x) |I_j^n| \right) |I_i^m| \leq$ (см (*)) $\sum_{i=1}^{N_m} \inf_{x \in I_i^m} J_H(x) \cdot |I_i^m| \overset{\text{def}}{=} \underline{S}(J_H, P^m) \leq$

$\leq J_H(x)$, т.к. $J_H = \sup(\underline{S})$ $\qquad \underline{S}(J_H, P^m)$

$\leq \sum_{i=1}^{N_m} \sup_{x \in I_i^m} J_H(x) |I_i^m| = \overline{S}(J_H, P^m) \leq \sum_{i=1}^{N_m} \sup_{x \in I_i^m} J_B(x) |I_i^m| \leq \sum_{i=1}^{N_m} \sup_{x \in I_i^m} \sum_{j=1}^{N_n} M_j(x) |I_i^m| \cdot |I_j^n| \leq$

$\inf \overline{S}$

(см (**)) $\leq \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_n} M_{ij} |I_i^m \times I_j^n| = S(f,P)$.

Итак, $s(f,P) \le s(J_H, P^m) \le S(J_H, P^m) \le S(f,P)$ — (3')

② Имеем: (3') $\Rightarrow$ $\Omega(J_H) = S(J_H) - s(J_H) \le S(f,P) - s(f,P) = \Omega(f) \to 0$ (пред. крит. интегр. по Риману $f \in R(P)$)

$\Rightarrow \Omega(J_H) \to 0 \Rightarrow J_H \in R(I^m)$

притом, переходя к $\lim_{d(P)\to 0}$ в (3'): $\exists \lim s(J_H) = \lim S(J_H) = J$

$\Rightarrow \int_{I^m} J_H(x)\,dx = J \Rightarrow$ (1). ◁

сл-ие ... $\left(\exists \int_{I^m \times I^n} f\,dx\,dy \overset{?}{=} \int_{I^m} dx \int_{I^n} f(x,y)\,dy\right)$

① ∃ выполн. усл. T1 $\Rightarrow \exists \int_{I^n} f(x,y)\,dy$ п.вс. в I^m

▷ а) Имеем: $\exists B := \{x \in I^m \mid J_B(x) > J_H(x)\}$. Заметим, что в силу T1

$\exists$ [illegible]: $\int_{I^m} [J_B(x) - J_H(x)]\,dx = 0$ (опред. по T1; $J_B - J_H \ge 0$ по T3 и 2.3) $\overset{T3,\ n.2.3}{\Rightarrow} \mu(B) = 0$

б) $\forall x \in I^m \setminus B \Rightarrow J_H(x) = J_B(x) \Rightarrow \exists \int_{I^n} f(x,y)\,dy$ (кр. Дарбу; $J_H(x) = J_B(x)$ по кр. Дарбу) $\forall x \in I^m \setminus B$ ◁

② ! $\exists f \in R(I)$, $\exists \int_{I^n} f(x,y)\,dy$, $\forall x \in I^m \Rightarrow \exists \int_{I^m} dx \int_{I^n} f(x,y)\,dy = \int_{I^m \times I^n = I} f(x,y)\,dx\,dy$ (4)

($J_H = J_B(x)$ — критерий Дарбу)

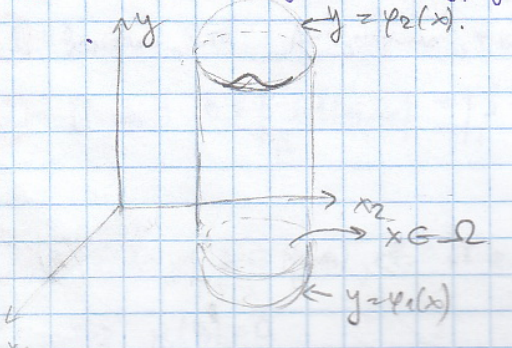
T1: $\exists \int_I f = \int_{I^m} J_H\,dx = \int_{I^m} J_B\,dx$ ($J_H = J_B$)

зам-я ① $\exists f \in R(I)$, $\exists \int_{I^n} f(x,y)\,dy$ $\forall x \in I^n \setminus B$, где $\mu(B) = 0$

$\Rightarrow$ верно (4') (Колмогоров, с. 318)

② В.т. (4') неверно при единств. условии T1. (Колмогоров, с. 319)

T2 Формула для вычислений.



$\exists \Omega \subset \mathbb{R}^n$ огран. и измерима.

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in \Omega,\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\bar\Omega)$

$f \in C(\bar A) \Rightarrow f \in R(A)$, причем

$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ (5)

▶ ① Д-жем, что A измерима

Рассмотрим $[c,d] \supset c \le \varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le d$ $\forall x \in \bar\Omega$ — компакт

Имеем: $\partial A \in \left(\Gamma(\varphi_1, \bar\Omega) \cup \Gamma(\varphi_2, \bar\Omega)\right) \cup ([c,d] \times \partial\Omega)$

($\Gamma(\varphi_1, \bar\Omega)$ — график, компакт, $\mu = 0$; $\Gamma(\varphi_2, \bar\Omega)$ — график непр. функ., $\mu = 0$; $[c,d] \times \partial\Omega$ — боковая граница, $\mu = 0$?)

Д-жем, что $\mu(\partial\Omega \times [c,d]) = 0$

$\forall \varepsilon > 0$ — произвольно.

$\exists$ конечная система $\{I_k\}$ / $\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ и $\sum_{k=1}^{m} |I_k| < \frac{\varepsilon}{d-c}$ ($\mu(\partial\Omega) = 0$, Ω — измерима)

$\Rightarrow \partial\Omega \times [c,d] \subset \bigcup_1^m I_k \times [c,d]$, $\sum_1^m |I_k \times [c,d]| < \varepsilon$

$\Rightarrow \mu(\partial\Omega \times [c,d]) = 0$ ✓

$\Rightarrow A$ — измерима.

② Имеем: $\bar A$ — огр. измерима, $f \in C(\bar A) \Rightarrow E(f, \bar A) = \varnothing \Rightarrow f \in R(\bar A)$, $f \in R(A)$ (комп. $\Rightarrow$ огр; кр. Лебега)

③ Д-жем (5):

Положим $A(x) \subset \mathbb{R}$, $A(x) := \begin{cases} [\varphi_1(x), \varphi_2(x)], & x \in \bar\Omega \\ \varnothing, & \text{иначе} \end{cases}$

$\exists \Omega \subset I^n \Rightarrow A \subset I^n \times [c,d]$

Имеем: $\chi_{A(x)}(y) = \chi_\Omega(x) \cdot \chi_{A(x)}(y)$ (проверка: $x \in A \Rightarrow$ ... $x \notin A \Rightarrow$ ...)

$\Rightarrow \int\limits_{I^n \times [c,d]} \chi_A(x,y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{I^n \times [c,d]} \chi_\Omega(x)\, \chi_{A(x)}(y) f(x,y)\,dx\,dy =$

$\exists$ $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, т.к. это интеграл Римана об непр. функции

$= \int\limits_{I^n} \chi_\Omega(x) \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \overset{T1}{=} \int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow (5)$

см. случай 2 I^n

непр. $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \chi_{A(x)}(y) f(x,y)\,dy$ $\forall x \in \Omega$

$\int\limits_c^d$ — непр.

§4. Замена переменных в кратном интеграле

Напоминание $\exists$ $\Omega_t \subset \mathbb{R}^m$ (откр.), $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ (обл.); $\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$, $\Omega_t \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$; $\psi: \Omega_x \to \mathbb{R}^k$, $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$;

причём $\varphi \in \mathcal{D}(t^0)$, $t^0 \in \Omega_t$, $\psi \in \mathcal{D}(x^0)$, $x^0 := \varphi(t^0) \in \Omega_x$

Тогда $\psi \circ \varphi \in \mathcal{D}(t^0)$ и верно р-во:

$(\psi \circ \varphi)'(t^0) = \underset{k \times n}{\psi'(\varphi(t^0))} \cdot \underset{n \times m}{\varphi'(t^0)}$, где $\to k \times m$

$$\varphi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}_{n \times m}, \quad \psi' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k \times n}$$

сл-ие $\Omega_t, \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – диффеоморфизм.

$\Rightarrow \varphi'_{|t} = d\varphi(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Omega_t$.

В.с.ф., имеем: $Id = \varphi \circ \varphi^{-1}$

$\det = 1 \quad \det \neq 0$

09.04.19

4.1 Замена переменной в одномерном интеграле Римана

Напоминание

T1. $[a,b], [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, $f \in R[a,b]$, $\varphi: [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi \uparrow\uparrow (\downarrow\downarrow)$ на $[\alpha,\beta]$, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ ($\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$)

$\Rightarrow (f \circ \varphi)\varphi' \in R[\alpha,\beta]$, причём $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\,\varphi'(t)\,dt$ $\left(= \int\limits_\beta^\alpha (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,dt \right)$ (1)

как частный

[Переформулируем T1 ($n=1$).

T1' $I_x, I_t \subset \mathbb{R}$, $f \in R(I_x)$, $\varphi: I_t \to I_x$ – диффеоморфизм $\varphi \in C^1$

якобиан $\neq 0$ $\Rightarrow$ φ' одного знака $\Rightarrow$ $\varphi \uparrow\uparrow$ или $\downarrow\downarrow$

$\Rightarrow (f \circ \varphi)\,|\det \mathcal{D}\varphi| \in R(I_t)$, причём $\int\limits_{I_x} f(x)\,dx = \int\limits_{I_t} f\circ\varphi(t) \cdot |\det \mathcal{D}\varphi(t)|\,dt$ (2)

▷ Выполнены все условия T1 ◁

T2 T1' верна для нижних (верхних) интегралов – Зорич, 2 том, с 168

4.2 Замена переменной в случае простейшего диффеоморфизма

Л1. $\Omega_t, \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченные открытые мн-ва ($\mathbb{R}^n$)

$\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – диффеом

$\Rightarrow$ 1) $A \subset \Omega_t$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(\varphi(A)) = 0$.

2) $A \subset \bar{A} \subset \Omega_t$, $v(A) = 0 \Rightarrow v(\varphi(A)) = 0$

3) $A \subset \bar{A} \subset \Omega_t$, A – измерим $\Rightarrow \varphi(A)$ – измерим

ограничен

4) Сл-ет из T об инвариантности меры $\mu(A) = 0$ при C^1 отображении $\subset \mathbb{R}^n$ (для n)

2) Имеем: объём $v(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \overset{\text{п.4}}{\Rightarrow} \mu(\varphi(\bar{A})) = 0$. Но $\varphi(\bar{A})$ – огр и замкн (т.к. $\bar{A}$ – комп $\Rightarrow$ $\varphi \in C(\bar{A}) \Rightarrow \varphi(\bar{A})$ – компакт).

($\varphi(\bar{A})$ – компакт) $\wedge$ $\mu(\varphi(\bar{A})) = 0 \Rightarrow v(\varphi(\bar{A})) = 0 \Rightarrow v(\varphi(A)) = 0$

3) см. п.3 (после т. о св-ве диффеоморф – о сохр. измеримости по Жордану при C^1 отобр.)

Опр $\Omega_t, \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ – откр

Отображение $\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – простейший диффеоморфизм $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ φ – диффеом, причём $\exists k \in \{1,\dots,n\}$ / $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) = t_1 \\ \dots \\ x_{k-1} = \varphi_{k-1}(t) = t_{k-1} \\ x_k = \varphi_k(t) \\ x_{k+1} = \varphi_{k+1}(t) = t_{k+1} \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t) = t_n \end{cases}$ — тождественное, функция, тождественное

$t = (t_1, \dots, t_n)$

Т. (замена перем. в случае простейшего диффеом)

$B_t \subset \mathbb{R}^n$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное откр. мн-во.

$\varphi: B_t \to \Omega_x$ – простейший диффеом

$f \in R(\Omega_x) \Rightarrow (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi| \in R(B_t)$, причём

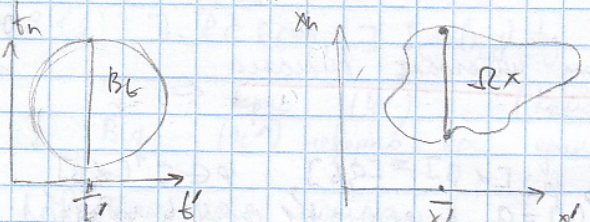
$$\exists \int_{\Omega_x} f(x)\,dx = \int_{B_t} f\circ\varphi\,|\det D\varphi|\,dt. \quad (1)$$

▷ Не ограничивая общности считаем $k = n$.

1) Имеем:

$$D\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \Rightarrow \det D\varphi(t) = \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n}$$

2)



Обозн.: $t' := (t_1, \dots, t_{n-1})$, $x' := (x_1, \dots, x_{n-1})$

Положим: $B(\bar{t}') = \{(t', t_n) \in B_t \mid t' = \bar{t}'\}$ – прообраз $\bar{t}'$ при проекции $t \to t'$

$\Omega_x(\bar{x}') = \{(x', x_n) \in \Omega_x \mid x' = \bar{x}'\}$ – прообраз $\bar{x}'$ при проекции $x \to x'$

3) $\exists\ I_x = I^{n-1} \times I^1_{x_n} \supset \Omega_x$ – ограниченное, и $I_t = I^{n-1} \times I_{t_n} \supset B_t$

Имеем: $\int_{\Omega_x} f(x)\,dx = \int_{I_x} f(x)\,\chi_{\Omega_x}(x)\,dx \overset{\text{т. Фубини для отрезков}}{=} \int_{I^{n-1}} dx' \int_{I_{x_n}} f(x', x_n)\,\chi_{\Omega_x}(x', x_n)\,dx_n =$ (нижний интеграл здесь ... (пока непр.) — нижний раз — нижний раз — что нужно чтобы он писать)

$= \int_{I^{n-1}} dt' \int f(t', x_n)\,\chi_{\Omega_x}(t', x_n)\,dx_n \overset{\text{т.2, п.1, замена перем в нижн инт}}{=} \int_{I^{n-1}} dt' \int_{B_{t_n}(t')} f\circ\varphi(t', t_n)\,|\det D\varphi(t)|\,\chi_{\Omega_x}(t', t_n)\,dt_n =$

$\Omega_{x_n}(t') = I_{x_n}$ — нижн. инт. — $\chi_{B_t}(t', t_n)$ — 1 пост — т. Фубини — здесь = 1 — 1 пост

$= \int_{I^{n-1}} dt' \int_{I_{t_n}} f\circ\varphi(t)\,\chi_{B_t}(t)\,|\det D\varphi(t)|\,dt_n = \int_{I_t} f\circ\varphi(t)\,\chi_{B_t}(t)\,|\det D\varphi(t)|\,dt = \int_{B_t} f\circ\varphi(t)\,|\det D\varphi(t)|\,dt.$

Что ? где ? какое бре ?

4.3. Замена переменной для криволинейной функции (Зорич с.171) (§ 15)

Л.1 (Зорич, с.171) $\Omega_x, \Omega_t, \Omega_\tau \subset \mathbb{R}^n$ – откр и ограниченные

$\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – диффеом

$\psi: \Omega_\tau \to \Omega_t$ – диффеом

Если (1) $\forall f \in R(\Omega_x)$ функция $f\circ\varphi \cdot |\det D\psi| \in R(\Omega_t)$, причём $\int_{\Omega_x} f(x)\,dx = \int_{\Omega_t} (f\circ\varphi)(t)\,|\det D\psi(t)|\,dt$. и

(2) $\forall g \in R(\Omega_t)$ функция $g\circ\psi\,|\det D\psi| \in R(\Omega_\tau)$, причём $\int_{\Omega_t} g(t)\,dt = \int_{\Omega_\tau} (g\circ\psi)(\tau)\,|\det D\psi(\tau)|\,d\tau$

$\Rightarrow \forall f \in R(\Omega_x)$ $(f\circ\psi\circ\varphi)\,|\det(\psi\circ\varphi)| \in R(\Omega_\tau)$, причём $\int_{\Omega_x} f(x)\,dx = \int_{\Omega_\tau} (f\circ\psi\circ\varphi)(\tau)\,|\det D\psi\circ\varphi(\tau)|\,d\tau$

▷ — Зорич, с.171

Опр. $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω — отк., $A := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$!!!

Тогда f — финитна в Ω $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\overline{A} \subsetneq \Omega$ (или др. обозн.: $\overline{A} \subset\subset \Omega$)

$\overline{A}$ — носитель...

Обозн. $\overline{A} =: \operatorname{supp} f$ — носитель f на Ω. (support)

12.04.19.

(12) Ω_t, Ω_x — ограниченные, открытые в $\mathbb{R}^n$.

$\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ — диффеоморфизм.

$f \in R(\Omega_x)$, $(f: \Omega_x \to \mathbb{R})$, f — финитна в Ω_x $\Rightarrow$ $g := f \circ \varphi \cdot |\operatorname{Det} D\varphi| \in R(\Omega_t)$

▶] брус $I_t \supset \Omega_t$. Достаточно р-ть (т. Лебега для брусов):

$$\mu^* (E(g \cdot \chi_{\Omega_t}, I_t)) = 0 \quad (1)$$

1) Положим $K_x := \operatorname{supp} f$ $\Rightarrow$ $K_t = \varphi^{-1}(K_x)$ (2)

$K_t := \operatorname{supp} g$

В с.р.: положим $A_x := \{x \in \Omega_x \mid f(x) \neq 0\}$

$A_t := \{t \in \Omega_t \mid g(t) \neq 0\}$

Для (2) дост. р-ть, что $A_t = \varphi^{-1}(A_x)$

Имеем: $t \in A_t \iff g(t) \neq 0 \iff (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) \neq 0$. $\iff$ $\varphi(t) \in A_x \iff$ $t \in \varphi^{-1}(A_x)$

(для замыкания! $\tau \in \text{зам} \Rightarrow \exists$ п-ть $\to \tau$ к точке $\Rightarrow$ перех. к пределу, φ^{-1} — диффеоморфизм $\Rightarrow$ по опр.)

2) Имеем: Ω_t — откр. огр. $\Rightarrow$ $K_t = \varphi^{-1}(K_x) \subset \Omega_t$, K_t — компакт (замкн. огранич. в $\mathbb{R}^n$)

$\Rightarrow$ $K_t \subset\subset \Omega_t$ (откр.)

Поэтому $E(g \cdot \chi_{\Omega_t}, I_t) = E(g, K_t) \overset{(2)}{=} E(g; \varphi^{-1}(K_x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(E(g \cdot \chi_{\Omega_t}, I_t)) = \varphi^{-1}(E(f, K_x)) = \varphi^{-1}(E(f \chi_{\Omega_x}, I_x))$

($g = f \circ \varphi$; $K_t \subset\subset \Omega_t$; $\chi_{\Omega_t} = 1$ на K_t; аналог компактов; φ — биекция; $I_x \supset \Omega_x$; $=: B$)

Но $\mu(B) = 0$, т.к. $f \in R(\Omega_x)$ — кр. Лебега для f.

$\Rightarrow$ $\mu(E(g \chi_{\Omega_t}, I_t)) = \mu(\varphi^{-1}(B)) \overset{(*)}{=} \mu(B) = 0$. $\Rightarrow$ $g \in R(\Omega_t)$

(сохр. инвар. мэо при C^1-отобр.; $\varphi^{-1} \in C^1$; кр. Лебега для брусов)

◀

Вопрос (необх. усл. $g = f \circ \varphi$ — финитна $\Rightarrow$ комп. $\Rightarrow$ комп. $\Rightarrow g$ огранич) — подумать

(13) (Разложение диффеом. в композицию простейших) 16.04.19

] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω — открытое, $\varphi: \Omega \to \varphi(\Omega)$ — д/м-м $\Rightarrow$ $\forall x \in \Omega$ $\exists$ шар $B(t; \delta(t)) \subset \Omega$ / $\varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_m$, где ψ_k — простейшее д/м-м

(д/м-мы, простейшие — Зорич, с. 589)

▶ ✕ ◀

(T) Замена переменной для финитной функ.

] выполнены все условия 12. $\Rightarrow$ функ. $\int_{\Omega_t} (f \circ \varphi) \cdot |\operatorname{Det} D\varphi| \, dt = \int_{\Omega_x} f \, dx$ (3).

($= g(t)$)

▶ 1) Положим $K_t := \operatorname{supp} g$ ($= \varphi^{-1}(K_x)$, где $K_x := \operatorname{supp} f$, $K_x \subset\subset \Omega$ — по 12.)

Имеем: φ — д/м-м по условию $\Rightarrow$ $\forall t \in K_t$ $\exists B(t, \delta(t)) \subset \Omega_t$ / $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \circ \psi_m$ (простейшие д/м-мы)

(см. 13)

Получаем: $K_t \subset \bigcup_{t \in K_t} B\left(t, \frac{\delta(t)}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $\exists$ конечное п/покр-ие $\left\{B_l := B\left(t_l, \frac{\delta(t_l)}{2}\right)\right\}$, $l = 1, \dots, L$

(K_t — компакт)

$\delta := \min_{l=\overline{1,L}} \frac{\delta(t_l)}{2}$

2) Рассмотрим произв. брус I / $I \cap K_t \neq \varnothing$, $d(I) < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ (*)

Имеем: $\exists t' \in I \cap K_t \cap \Omega_t$. Тогда $\forall t \in I \quad \|t-t'\| = \sqrt{(t_1-t_1')^2 + \dots + (t_n-t_n')^2} \le$

$\le d(I)\sqrt{n} < \delta$. (см (*))

$I = [a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n]$

Т.к. $t' \in K_t \Rightarrow \exists \ell' \in \{1,\dots,L\} \;/\; t' \in B_{\ell'} = B\left(t_{\ell'}, \frac{\delta(t'_{\ell'})}{2}\right)$.

Поэтому $\|t - t_{\ell'}\| \le \|t-t'\| + \|t'-t_{\ell'}\| < \frac{\delta_{\ell'}}{2}, 2 = \delta_{\ell'} \Rightarrow t \in B_{\ell'}$

$\Rightarrow I$ (см δ_{ℓ_0} (*)) $\subset B_{\ell'}$ для нек $\ell' \in \{1,\dots,L\}$

3) Рассмотрим брус $I_t \supset \Omega_t$ (рад $\delta_{\ell'}$, а не $\frac{1}{2}\delta_{\ell'}$) и $\exists$ ρ-разбиение бруса I_t с $d(\rho) < \min\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}, d\right)$, где

$d := \rho(K_t, \partial\Omega_t) = \min_{t_1 \in K_t,\, t_2 \in \partial\Omega_t} \|t_1 - t_2\|$

(комп, т.к. Ω огр; комп)

Тогда $I_t = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$

Имеем: (см п.2) $\exists \int_{\Omega_t} g\,dt = \int_{I_t} g\,\chi_{\Omega_t}\,dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} g\,\chi_{\Omega_t}\,dt =$

$= \sum_{s=1}^{S} \int_{I_{k_s}} g\,\chi_{\Omega_t}\,dt$, где $I_{k_s} \cap K_t \ne \emptyset$ (=)

(иначе $g=0$ в шаре $B_{\ell'}$)

7.2) Заметим, что (см п.2) $I_{k_s} \subset \Omega_t$, $\chi_{\Omega_t}|_{I_{k_s}} = 1$ (3.5)

(=) $\sum_{s=1}^{S} \int_{I_{k_s}} g\,dt$ (A.d)

(т.к. в шаре $B_{\ell'}$, т.к. $d < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$)

4) Имеем: для $s \in \{1,\dots,S\}$

$I_{k_s} \subset \Omega_t$, I_{k_s} измеримое мн-во $\Rightarrow$ ($\varphi(I_{k_s})$ – измер, $\subset \Omega_x$ (с отобр))

Положим $A := \bigcup_{s=1}^{S} \varphi(I_{k_s})$ – компакт, измерим (как (конечное) объединение изм), $\subset\subset \Omega_x$, причём $K_x \subset A$.

($\varphi \ne 0$, $\chi_{\Omega_t} \ne 0$, $g \ne 0$ $\Rightarrow f \circ \varphi \ne 0$, $\Rightarrow f \ne 0$ (обр обр отобр))

Имеем $\exists \int_{\Omega_x} f\,dx \overset{\text{по усл}}{=} \int_{I_x} f \cdot \chi_{\Omega_x}\,dx = \int_{A} f\chi_{\Omega_x}\,dx + \int_{I_x \setminus A} f\chi_{\Omega_x}\,dx =$ (не огр вне Ω_x; вне $\Omega_x = 0$)

($=0$ (либо $f=0$, либо $\chi_{\Omega_x}=0$ – вне suppf))

$= \int_{A \subset\subset \Omega_x} f\chi_{\Omega_x}\,dx = \int_{A} f\,dx = \sum_{s=1}^{S} \int_{\varphi(I_{k_s})} f\,dx$ (=)

($\chi_{\Omega_x} = 1$ – изм)

Но $I_{k_s} \cap K_t \ne \emptyset$, $d(I_{k_s}) < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \Rightarrow I_{k_s} \subset B_{\ell} \subset \Omega_t$ для нек ℓ

$\Rightarrow$ (=) $\sum_{s=1}^{S} \int_{I_{k_s}} g\,dt \overset{(**)}{=} \int_{\Omega_t} g\,dt$

В итоге $\int_{\Omega_x} f\,dx = \int_{\Omega_t} g\,dt$

4.4 Замена переменной в общем случае

Т $\exists \Omega_t, \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ – откр, ограни, измер, $\Omega_x \subset \overline{\Omega_x} \subset D_x$ – откр, измеримое, $\Omega_t \subset \overline{\Omega_t} \subset D_t$ – откр, измер

$\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – р/м-м, $f \in R(\Omega_x)$ ($f: \Omega_x \to \mathbb{R}$)

$\Rightarrow g(t) := (f\circ\varphi)(t)\,|\det \partial\varphi(t)|$ обл. сверху: $g \in R(\Omega_t)$ и $\int_{\Omega_x} f\,dx = \int_{\Omega_t} g\,dt$.

▶ Имеем:

$$\int_{\Omega_x} f\,dx = \int f\chi_{\Omega_x}\,dx = \int_{\Omega_x\cap\partial\Omega_x} f\chi_{\Omega_x}\,dx + \int_{\Omega_x\setminus\partial\Omega_x} f\chi_{\Omega_x}\,dx = \int_{\partial\Omega_x} f\chi_{\Omega_x}\,db =$$

Ω_x — ограничена, $\partial\Omega_x$ — кусочно гладкая, $\int_{\partial\Omega_x} = 0$, т.к. $\overline{\Omega_x}\subset\partial\Omega_x$, $f\chi_{\Omega_x}=0$ вне Ω_x

$$= \int_{\partial\Omega_b} g\,\chi_{\Omega_b}\,db = \int_{\Omega_b} g\,db + \int_{\partial\Omega_b\setminus\Omega_b} g\,\chi_{\Omega_b}\,db = \int_{\Omega_b} g\,db$$

(ПЗ $\exists$ по т. о грн. функ., $g=0$) ◀

Сл-ие. $\exists A\subset\mathbb{R}^n$, огр и измеримо $\Rightarrow$ $|A|$ не зависит от $\{$мы к-т (если $|J|\neq 0$)

ПРЕНЕБРЕЖИМЫЕ МН-ВА.

▶ Зорич с. 174. ◀

§5. Несобственные кратные $\int$ы

§ 16

Опр 1. $G\subset\mathbb{R}^n$, G-откр., $\{$мо компактов $\{K_\ell, \ell\in\mathbb{N}\}$ называется исчерпывающей $\{$мо компактов для G, если

1) $K_\ell \subset \overset{\circ}{K}_{\ell+1} \subset K_{\ell+1}$, $\ell\in\mathbb{N}$
2) $G = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_\ell$

Зам. Например, $K_\ell := \{x\in G \,/\, \rho(x,\partial G)\geq \frac{1}{\ell},\ \|x\|\leq \ell, \ell\in\mathbb{N}\}$.

Л. $\exists$ $\{K_\ell, \ell\in\mathbb{N}\}$ — исчерпывающая $\{$мо компактов для G, $\exists K$-компакт, $K\subset G \Rightarrow \exists \ell_0\in\mathbb{N}$ / $K\subset \overset{\circ}{K}_{\ell_0}\subset K_{\ell_0}$.

▶ В сер. $K\subset G = \bigcup_{\ell=1}^{\infty}\overset{\circ}{K}_{\ell_0} \Rightarrow \{\overset{\circ}{K}_\ell\}$ — откр. покрытие компакта K. $\Rightarrow \exists$ конечное п/покрытие $\{K_{\ell_s}, s=\overline{1,S}\}$ / $K\subset \bigcup_{s=1}^{S}\overset{\circ}{K}_{\ell_s}$, $\ell_1<\ell_2<\dots<\ell_S \Rightarrow K\subset \overset{\circ}{K}_{\ell_S}$ (самый большой) $(\overset{\circ}{K}_\ell\subset K_{\ell+1})$ ◀

19.04.19

Опр 2. $G\subset\mathbb{R}^n$, G-открыто, $f: G\to\mathbb{R}$. Тогда f — локально ограничена в G ($f\in B_{loc}(G)$)
$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x\in G$ $\exists O(x)\subset G$ / $f|_{O(x)}$ — ограничена.
G всё время открыто!!! по умолчанию!!!

Зам. $f\in B_{loc}(G)$, $K\subset G$ компакт $\Rightarrow$ $f\in B(K)$.

Опр 3. $G\subset\mathbb{R}^n$, G-огр, $f: G\to\mathbb{R}$, f — лок. огр и почти всюду непрер в G (не обяз. ограничена)
Тогда f интегр на G (в несобств. смысле) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ исчерпания измеримыми компактами (и.и.к) $\{K_\ell, \ell\in\mathbb{N}\}$ $\exists \lim\limits_{\ell\to\infty}\int_{K_\ell} f\,dx =: \int_G f\,dx$, причём $\lim$ не зависит от выбора $\{K_\ell\}$.

Зам-ия ① Опр 3 корректно, а именно $\forall$ измеримого компакта $K_\ell\subset G$ $\exists \int_{K_\ell} f\,dx$, ограниченная — см. Зам

② $f\geq 0$, $\exists \int_G f\,dx =: J \Rightarrow \int_G f\,dx = \sup_{K_\ell}\int_{K_\ell} f\,dx$ (пот. Вейерштрасса) $\Rightarrow$ $\exists$ мн-ва μ кр-Лебега : $\mu(P)=0$, $\exists$ бан в вопр

▶ $\exists \alpha_\ell := \int_{K_\ell} f\,dx$. Тогда, т.к. $K_\ell\subset K_{\ell+1}$, то $\alpha_\ell\uparrow$. $(f\geq 0)$
Кроме того (усл) $\exists \lim \alpha_\ell = J\in\mathbb{R}$. $\Rightarrow J=\sup\alpha_\ell$. ◀

③ G откр, огр, измеримо $f\in B(G)$, непрерывна по т.Лб всюду $\Rightarrow$ $\forall$ исч. и. к. для G $\exists \lim\limits_{\ell\to\infty_K}\int_{K_\ell} f(x)\,dx = \int_G f\,dx$.

▶ ✕ ◀
Зорич., стр 180 ; + в Камынине где-то.

④ эквив опр: $\exists \lim\limits_{\ell\to\infty}\int_{K_\ell}|f|\,dx$ (Камынин)

Т 1 (достаточное условие $\int$ы в несобственном смысле)
$G\subset\mathbb{R}^n$, G-откр $f: G\to\mathbb{R}$, f — лок. огр и п.в. непрерывна. f непр $\Rightarrow |f|$ непр
$\exists$ и.и.к $\{K_\ell, \ell\in\mathbb{N}\}$ / $\exists \lim\limits_{\ell\to\infty}\int_{K_\ell}|f|\,dx =: J\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$
① $\exists \int_G |f|\,dx = J$
② $\exists \int_G f\,dx$ ↙

▶ (1) Рассм. произвольное исчерпание $\{K_s\}_{s\in\mathbb{N}}$.

Лемма $\Rightarrow$ $\forall s\ \exists \ell=\ell(s)$ / $K_s \subset \hat{K}_{\ell(s)}$ $\Rightarrow \beta_s = \int\limits_{K_s} |f|dx \le \int\limits_{K_{\ell(s)}} |f|dx \le \sup\limits_{\ell} \int\limits_{\hat{K}_\ell} |f|dx = J$ (см. Зам 2 и усл. т.)

Сдругой стороны $\forall \ell\ \exists s(\ell)$ / $\hat{K}_\ell \subset K_{s(\ell)} \Rightarrow \alpha_\ell = \int\limits_{\hat{K}_\ell} |f|dx \le$ (!) $\beta_{s(\ell)}$

$\le \int\limits_{K_{s(\ell)}} |f|dx = \beta_{s(\ell)}$

$\Rightarrow J = \sup\limits_{\ell} \alpha_\ell \le \beta_{s(\ell)}$

В итоге $J \le \beta_s \le J \Rightarrow \sup\limits_s \beta_s = \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_{K_s} |f|dx = J$.

(2) Положим

$f_1 := |f| \ge 0$, $f_2 := |f| - f \ge 0$

Тогда $f \overset{?}{=} f_1 - f_2$. (?? интегр. по Бе $\Rightarrow$ кр. любого отрезка)

$\Rightarrow \int\limits_{K_\ell} f\,dx = \int\limits_{K_\ell} f_1\,dx - \int\limits_{K_\ell} f_2\,dx$ (*).

$\exists$ инт. 1 $\forall$ 0

Но $|f_2| \le 2|f|$ ($f_2 = |f| - f$) $\Rightarrow 0 \le \int\limits_{K_\ell} f_2\,dx \le 2\int\limits_{K_\ell} |f|dx \le 2 \sup\limits_{\ell} \int\limits_{K_\ell} |f|dx = 2J$

$=: \alpha_\ell$

$\Rightarrow \alpha_\ell \uparrow$, α_ℓ огр $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\ell\to\infty} \alpha_\ell = \lim\limits_{\ell\to\infty} \int\limits_{K_\ell} f_2\,dx \overset{(n.1)}{=} \int\limits_G f_2\,dx$.

$\Rightarrow$ можем перейти к $\lim$ при $\ell\to\infty$ в (*) и получить $\exists \lim\limits_{\ell\to\infty} \int\limits_{K_\ell} f\,dx = \int\limits_G |f|dx - \int\limits_G (|f| - f)\,dx$.

$\forall \{K_\ell\}$ (верна $\forall K_\ell$ $\Rightarrow$ верна для любого)

$\Rightarrow \exists \int\limits_G f\,dx$. ◀

Сл-ие Для $n=1$ и $f \ge 0$ опред. 3 совпадает с опр. для $n=1$.

Т2 $G \subset \mathbb{R}^n$, G откр. и измерим., f лок. огранич. и п.вс. непр. в G, $\exists \int\limits_G f\,dx$ (см. опр 3)

$\Rightarrow \exists \int\limits_G |f|dx$

▶ ✗ ◀ Кам., т. II, приложение 1.

Монотонный признак замены перем. – всё верно с компактов на σ-компакты. Зорича

Часть 6. Криволинейные и поверхностные интегралы

Глава 1 Криволинейные интегралы

§1 Криволинейный интеграл I рода

§17.

1.1. Определения

Напоминание: мн-во $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma := \{x = \varphi(t), y = \psi(t), t_0 \le t \le T\}$ – простая непрер. кривая, если $\varphi, \psi \in C[t_0, T]$ и $t_1 \neq t_2 \Rightarrow (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$, кроме, б.м., $t_1 = t_0$, $t_2 = T$ (тогда кривая назов. замкнутой).

S_Γ (длина кривой Γ) $:= \sup |L|$, где L – вписанная ломаная.

Γ – спрямляемая кривая $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\sup S_\Gamma < +\infty$

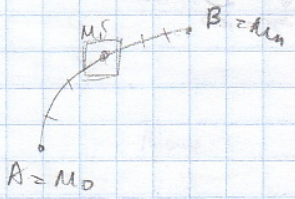
Т. $\varphi, \psi \in C^1[t_0, T] \Rightarrow \Gamma$ спрямляемая, $\boxed{S_\Gamma = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt}$

Лемма $\exists$ Γ – простая, спрямляемая, непрерывная кривая $\Rightarrow$ Γ ограничена $\Rightarrow$ $|\Gamma|$ (мера Жордана Γ, „площадь“) $= 0$.

▲ $\exists$ $\Gamma = \overset{\smile}{AB}$, $A = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $B = (\varphi(T), \psi(T))$.

Рассмотрим разбиение (полигон, вписанный в спрямляемую) $\overset{\smile}{AB}$ на частичные дуги $M_{i-1}M_i$, $i = \overline{1,n}$

$M_0 = A$, $M_n = B$, $|M_{i-1}M_i| = \frac{\ell}{n}$, где ℓ – длина $\overset{\smile}{AB}$. ($\ell < |AB|$ спрямляемая).



$\exists \varepsilon > 0$ произвольно

$\exists K_i$ – квадрат ребра $\frac{2\ell}{n}$, описанный вокруг $B\left(M_i, \frac{\ell}{n}\right) = B_i$

Имеем: $\exists M \in \overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ для некот. $i \in \{1, n\}$.

Тогда $\rho_{\text{евкл. расст.}}(M, M_i) \le \frac{\ell}{n} \Rightarrow \overset{\smile}{AB} \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

Кроме того, $\sum_{i=1}^{n} |K_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{4\ell^2}{n^2} = \frac{4\ell^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \sum_{1}^{n} |K_i| < \varepsilon$ для $n > \frac{4\ell^2}{\varepsilon}$ – мало

$\Rightarrow |\overset{\smile}{AB}| = 0$ ▲

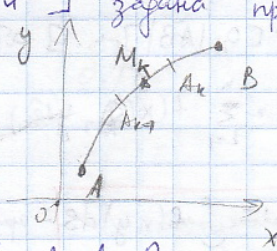
Сл-ие $\exists \Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω – огр., $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых кривых $\Rightarrow$ Ω изм. по Жордану $\Rightarrow$ определ. $|\Omega| \left(= \int_\Gamma \chi_\Omega\, dx\right) \Rightarrow \Omega$ квадрируема

(квадр. $\overset{\text{для нас}}{\Leftrightarrow}$ изм. по Жордану – термин из учебников)

Рассмотр. прямоуг. сист. координат xOy в $\mathbb{R}^2$ и $\exists$ задана простая спрямляемая кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

$\Gamma = \{x = \varphi(t), y = \psi(t), t_0 \le t \le T\} = \overset{\smile}{AB}$

$\exists f : \overset{\smile}{AB} \to \mathbb{R}$



1) Рассмотр. „разбиение“ дуги $\overset{\smile}{AB}$, а именно „мн-во“ $P = \{A_k \in \overset{\smile}{AB},\ k = \overline{0,n}\}$, $A_0 = A$, $A_n = B$

Обозн. соотв. длины дуг $\ell_{\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}} =: \Delta S_k$

Положим $d(P) := \max_{k=\overline{1,n}} \Delta S_k$.

2) Фикс. произвольно разметку $\{M_k \in \overset{\smile}{A_{k-1}A_k},\ k = \overline{1,n}\}$

3) Определяем „интегр. сумму“ $\sigma(f, P, M) = \sigma(P, M) = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k$

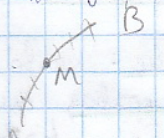
Опр] $\breve{AB}$ - простая спрямляемая кривая, $f: \breve{AB} \to \mathbb{R}$, Тогда $J = \int\limits_{\breve{AB}} f\,ds := \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P, M)$ –

– криволин. Бан I рода (вдоль дуги $\breve{AB}$)

$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \begin{array}{l} \forall (P,M)\ c\ d(P) < \delta \\ \sigma(P,M) - J | < \varepsilon \end{array}\right.$ (если $\exists$)

Зам-я ① Если $A = B$ (т.е. $\breve{AB}$ – замкн.), то обозн: $\oint\limits_{\breve{AB}} f\,ds$

② Интеграл I рода не зависит от направления обхода дуги $\breve{AB}$



Пр-р: (Масса «дуги»).

] ин. плотность «дуги» $\rho: M \in \breve{AB} \to \rho(M) \in \mathbb{R}$

Рассмотрим разбиение $P = \{\overset{A}{A_0}, A_1, \ldots \overset{B}{A_n}\}$ дуги $\breve{AB}$

$m(A_{k-1}, A_k) = m_k \approx \rho(M) \underset{M \in (A_{k-1}, A_k)}{|A_{k-1}, A_k|} = \rho(M)\,\Delta s_k$

$m(A,B) = m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(M)\,\Delta s_k \underset{d(P)\to 0}{\Rightarrow} \boxed{\int\limits_{\breve{AB}} \rho(x,y)\,ds =: m}$

• Аналогично вводится Бан I рода для $\breve{AB} \subset \mathbb{R}^3$ (простая, спрямляемая)

$A_0 = A, A_1 \in (\breve{AB}), \ldots A_n = B$ $\quad M_k \in \breve{A_{k-1}A_k}$ $\quad \sigma(f,P,M) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\,\underbrace{\Delta s_k}_{|\breve{AB}|} \underset{d(P)\to 0}{\to} \int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,ds$

Пр-р Масса кривой $\breve{AB} \subset \mathbb{R}^3$ (спрям., пространств.), $m := \int\limits_{\breve{AB}} \rho(x,y,z)\,ds$.

1.2. Вычисление криволинейного интеграла I рода

] дана простая спрям. кривая $\breve{AB} \subset \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$ с условиями

$x, y \in C^1[t_0, T]$, и кроме того $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$ (значит, что кривая не имеет особых точек)

Введём натуральный параметр $s(t) = |A_0 = (x(t_0), y(t_0)), A(x(t), y(t))|$, $t \in [t_0, T]$,

т.к. $\sqrt{x^2+y^2} > 0$, $\boxed{s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}$ ↑↑ $\Rightarrow$ $\exists$ обр. ф-ция (*)

$\Rightarrow$ $\boxed{s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$ $\quad s^{-1}(s) = t(s)$ непрерыв. бан по верхн. пределу

$s: [t_0, T] \to [0, |\breve{AB}|]$ $\exists$ обратная ф-ция (см (**)) $s^{-1}: s \in [0, |\breve{AB}|] \to [t_0, T]$

Зам-ие. $\sigma(f,P,M) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x(\xi_k), y(\xi_k))\,\Delta s_k \underset{d(P)\to 0 \text{ (если } \exists \lim)}{\Rightarrow} \int\limits_{0}^{|\breve{AB}|} f(x(s), y(s))\,ds = : I_2$ – Бан Римана

$= \boxed{I_1 := \int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,ds}$ – криволинейный (1)

$\Rightarrow$ ① $\breve{AB}$ – см. выше условия, $f \in C(\breve{AB}) \Rightarrow \exists \int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,ds$

Тогда — см (1)

Вычисление J_2 ($= J_1$, см (1)).

Замена в J_2:

$t = t(s)$, $s \in [0, |AB|]$ – бижекция.

$x(t^{-1}(t))$

$f(x(s), y(s)) = f(x(t), y(t)) \Rightarrow$ $s = s(t)$

$\int_0^{|AB|} f(x(s), y(s))\, ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t))\, s'(t)\, dt$

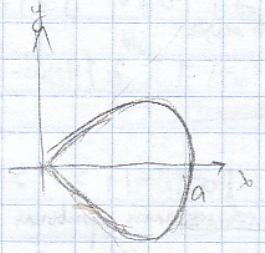
$s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

$(t(s(t)) = s^{-1}(s(t)) = t)$

$\Rightarrow$ замена $\int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$ (2)

Замечание: $\forall t \in (t_0, T)$ $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ достат. рассмат в (t_0, T) при t_0 или $T = +\infty$ – смотреть сх-ть

ПР-Р (1).



Γ: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Γ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi. \end{cases}$ $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = r$

Имеем: $x'_\varphi = -a\sin\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} + a\cos\varphi\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = -\frac{a(\sin\varphi\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\cos\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}} =$

$= -a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$

Проще: $(ds)^2 = [(r'_\varphi)^2 + r^2](d\varphi)^2$ (r – полярный сектор)

$r'_\varphi = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \Rightarrow (r'_\varphi)^2 + r^2 = a^2\frac{\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$. – в $\frac{\pi}{4}$ – плохо

$I = \int_{AB} \sqrt{x^2+y^2}\, ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (a\sqrt{\cos 2\varphi})\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi = \frac{a^2\pi}{2}$

(2). Γ: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2/2 \\ z = \frac{\sqrt{2}}{3}t^{3/2} \end{cases}$ $0 \le t \le 1$ $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = t \\ z' = \sqrt{2}t^{1/2} \end{cases}$

$f(x,y,z) = xyz$ $\int_\Gamma f(x,y,z)\, ds = \int_0^1 t\cdot\frac{t^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\sqrt{1+t^2+2t}\, dt =$

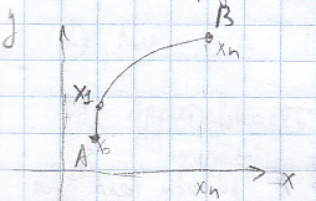
$= \int_0^1 t^3\frac{\sqrt{2}}{3}t^{3/2}(t+1)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 (t^{11/2} + t^{9/2})\, dt = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\frac{2}{13} + \frac{2}{11}\right) = \frac{48\sqrt{2}}{3\cdot 143} =$

$= \frac{16\sqrt{2}}{143}$

§2 Криволинейные интегралы II рода

стр 18

2.1 Определение



$f: \overset{\frown}{AB} \to \mathbb{R}$

$\overset{\frown}{AB}$ – простая, спрямляемая кривая. спрямляемость

Разбиение $P = \{A_0 = A, A_1, \dots A_n = B\}$, $\Delta s_k = |\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}|$,

$d(P) = \max_{k=\overline{1,n}} \Delta s_k$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $A_k = (x_k, y_k)$

Составим $\sum$ую сумму $\sigma_1(f, P, M) := \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k$

Опр1] $\exists \lim_{d(P)\to 0} \sigma_1(P, M) =: \int_{AB} f(x,y)\, dx$. (если $\lim \exists$)

Зам. 1) $P(x,y) = f(x,y)$ и рассм инт-л $\int_{\overrightarrow{AB}} P(x,y)\,dx$

2) Инт II рода зависит от направл обхода — изменение обхода приводит к изменению знака

Аналогично, рассматривая другую инт сумму (для функ $Q: AB \to \mathbb{R}$) $\sigma_2(Q, P, M) := \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\,\Delta y_k$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $A_k = (x_k, y_k)$

приходим к определению 2. $\int_{\overrightarrow{AB}} Q(x,y)\,dy := \lim_{\lambda_2 \to 0} \sigma_2(Q, P, M)$.

Опр 3. Интегралом II рода по кривой $\overrightarrow{AB}$ общего вида

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy.$$

Зам. $\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\overrightarrow{BA}} P\,dx + Q\,dy$.

Аналогично определяется криволин. инт II рода по пространственным кривым

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Зам. $\overrightarrow{AB} \parallel Oy \Rightarrow \int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx = 0$. ($x_k - x_{k-1} = 0$)

26.04.19

2.2. Вычисление интеграла II рода.

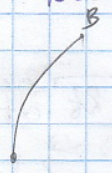
$\overrightarrow{AB}$ – простая, непрер. $\overrightarrow{AB} = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$, где $A = (x(t_0), y(t_0))$, $B = (x(T), y(T))$.

т.е. $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$

Т $x, y \in C^1[t_0, T]$ нет особых точек на $\overrightarrow{AB}$, $P, Q \in C(\overrightarrow{AB})$. Тогда $\exists \int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{t_0}^{T} \{P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\}\,dt$ (1)

(это не доказать!)

Доказ. док-ть (1) для $\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx$



1) Рассм. произвольное разбиение $\hat{P}$ дуги $\overrightarrow{AB}$, имеющее вид (с $d(\hat{P})$)

$\hat{P} = \{A_0 = A, A_1, \dots A_n = B\}$ и составим соотв интегральную сумму

$\sigma_1(P, \hat{P}, M) = \sum_{k=1}^{n} P(M_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k))(x(t_k) - x(t_{k-1}))$

где $M = (M_1, \dots M_n)$, $M_k \in A_{k-1}A_k$

где $A_k = (x(t_k), y(t_k))$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$

$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)\,dt$

Но $x \in C^1[t_0, T]$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(\tau_k), y(\tau_k))\,x'(t)\,dt \quad (2)$$

2) Положим $J := \int_{t_0}^{T} P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)\,dt$ (3)

Рассм разность $\Delta := \sigma_1(\hat{P}, M) - J$ — инт сумма Римана от непр функ

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$$

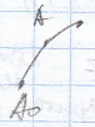
3) Оценим $|\Delta|$. Фиксируем $\varepsilon > 0$

а) Положим $F(t) := P(x(t), y(t))$, $t \in [t_0, T] \Rightarrow F \in C[t_0, T]$ (композиц) $\Rightarrow F$ равном непр на сегменте $[t_0, T]$

$\Rightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) / |F(t') - F(t'')| < \varepsilon \quad \forall t', t'' \in [t_0, T]$: усл $|t' - t''| < \delta$

б) Имеем: $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [F(\tau_k) - F(t)] \cdot x'(t)\,dt$ (4)

Рассм. функц. длины дуги (см п.2) $s = s(t),\ t \in [t_0, T]$
$|A_0, \overset{\smile}{A}(x(t), y(t))|$



Заметим, что $s \uparrow\uparrow,\ s \in C^1[t_0, T] \Rightarrow \exists$ обратная функция
$t = t(s),\ s \in [0, |AB|]$ $\quad t: [0, |AB|] \to [t_0, T]$,
примем $t \in C^1[0, |AB|]$ $(\uparrow\uparrow)$ $\quad t' \le M = \text{const}$

Имеем: $|t_k - t_{k-1}| = \underset{\text{Лагр}}{t'(\tilde{s}_k)} \cdot |s_k - s_{k-1}| \le M d(\hat{P})$
(непр на $[\,]$; $t^{-1}(t_k)\ t^{-1}(t_{k-1})$; $\le d(P)$)

(б) $\exists\ d(\hat{P}) < \delta/M \Rightarrow |F(\tau_k) - F(t)| < \varepsilon$ по п. а) т.к $|t_k - t_{k-1}| \le M \cdot \frac{\delta}{M} = \delta$
($\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$)

Но $= |x'(t)| \le L\ \forall t \in [t_0, T]$ для нек $L \ne 0$ $\quad (x \in C^1[t_0, T] \Rightarrow x'$ огр.)

В итоге - см (3): $\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} [F(\tau_k) - F(t)]\, x'(t)\, dt\right| \le \int_{t_{k-1}}^{t_k} |F(\tau_k) - F(t)|\, L\, dt \le L \cdot \varepsilon\, (t_k - t_{k-1})$
($|F(\tau_k) - F(t)| < \varepsilon$ для Δ; $\le L$)

$\Rightarrow |\Delta| < L\varepsilon |T - t_0| \Rightarrow \delta_1(\hat{P}, M) \to \exists$ $\quad d(\hat{P}) \to 0$
(как отрезок)

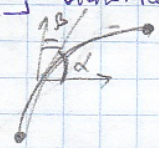
Зам-ия. ① Достаточно считать, что $x, y \in C[t_0, T]$, $\subset \mathcal{D}(t_0, T)$,
причем $x', y' \in \mathcal{B}(t_0, T)$ и $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \ge \frac{1}{M}$ $\forall t \in (t_0, T)$.

② В теореме предполагалось, что параметризация $\overset{\smile}{AB}$ соотв. обходу кривой от A до B
$(A_0 = (x(t_0), y(t_0)),\ B - ?)$

③ $\overset{\smile}{AB}$ назыв. кусочно-гладкой, если она состоит из кон. числа гладких дуг
(т.е. простых, непрер. заданн. x', y', без особых точек).
Теорема сохраняется для кусочно-гладких кривых

④ Теорема переносится на пространственную кривую ($+ R\,dz$)

Сл-ие (связь 2ого рода с 1ым первого рода)
$\exists$ выполнены условия Теоремы, $|AB| =: L$. $\exists$ s-натур. парам., $s \in [0, L]$



Имеем: $x'(s) = \cos\alpha$, где $\cos\alpha, \cos\beta$ – направляющие косинусы
$y'(s) = \cos\beta$ вектора касат-ой

$T \Rightarrow \int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^L [P(x(s), y(s))\cos\alpha(s) + Q(x(s), y(s))\cos\beta(s)]\,ds$ (1)
(2ой Римана; кривая)

– см §1, 1.2 фор-ла (1) $\quad = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds$
(кривол. эл-т длины; 1ого Г рода)

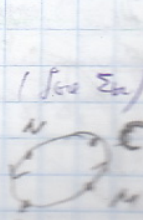
2.3. Свва криволин 2ого II рода §19

① Изменение направления обхода кривой меняет знак у 2ого II рода

$$\int_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\overrightarrow{BA}} P\,dx + Q\,dy \quad \text{(из опред)}$$

② Линейность (из опр, у/с суммы), верно и для II рода

③ Аддитивность: $\overset{\smile}{AB}$ разбита на конечное число дуг $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$
примем $\exists \int_{\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}} P\,dx + Q\,dy \Rightarrow \exists \int_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \sum_{k=1}^{N} \int_{\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}} P\,dx + Q\,dy$ (2ого Σ_k)



④ $\exists \overset{\smile}{AB}$ – замкнутая $\Rightarrow \int_{\overset{\smile}{AB}}$ не зависит от точки начала обхода

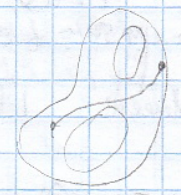
$\exists \Gamma = \overset{\smile}{AB}$ По п.3. $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\overset{\smile}{AMC}} + \int_{\overset{\smile}{CNA}} = \int_{\overset{\smile}{CNA}} + \int_{\overset{\smile}{AMC}} = \int_{\overset{\smile}{CC}}$

5. $\exists\ P \equiv 1$; $A = (x(t_0), y(t_0))$, $B = (x(T), y(T))$.

$$\Rightarrow \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 1 \cdot dx = \lim_{d(\hat{P}) \to 0} \sigma_1(\hat{P}, M) = \lim_{d(\hat{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = x(T) - x(t_0)$$

$\overset{\frown}{AB}$ – спрям., простая, – для замкн. кривых $= 0$

Аналогично $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} 1\,dy = y(T) - y(t_0)$.



ОПР. $\exists\ \Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω – область (т.е. открыта и связна) / Уые т. соед. кривой, лежащей

Говорим, что $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от пути $\int$ в Ω,

если $\int_{\Gamma}$ – путь $\int$ия. кусочно-гладкая

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall A, B \in \Omega$, $\int\limits_{\Gamma_1} = \int\limits_{\Gamma_2}$ $\forall$ двух кривых (путей), связывающих т. A и B. $(\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega)$.

30.04.19

Т1. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω – область, $P, Q, R \in C(\Omega)$. (*)

(критерий незав-ти от пути $\int$ия)

Тогда $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ (Γ – куск./гладк.) не зависит от пути $\int$ия $\Leftrightarrow$ (есть дифференциал)

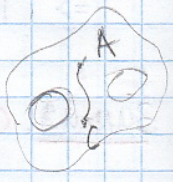
$\exists\ U : \Omega \to \mathbb{R}$ / $U \in D(\Omega)$, причём $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ (1)

(**)

▶ **1.** „$\Rightarrow$" $\exists$ (*).

Фиксируем произвольно $A \in \Omega$, $\exists\ C \in \Omega$ – произвольная точка

Полагаем $U(C) = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Опр. корректно, т.к. (*).



Достаточно доказать, что $\exists\ \frac{\partial U}{\partial x} = P$; $\exists\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\exists\ \frac{\partial U}{\partial z} = R$ всюду в Ω (непр.)

Докажем, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ в Ω.



$\exists\ C \in \Omega$ – произв. $C = (x^0, y^0, z^0)$. Ω – откр. $\Rightarrow \exists$ шар $B(C; h) \subset \Omega$

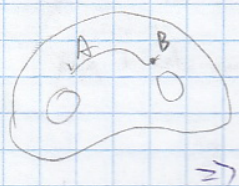
$\forall \Delta x$ / $|\Delta x| < h/2$ $\Rightarrow$ $\Delta_x U := U(x^0 + \Delta x, y^0, z^0) - U(x^0, y^0, z^0) =$ (интеграл по отрезку)

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \;(z) \overset{\text{т. о среднем для } \int \text{ Римана}}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P\,dx = P(x^0 + \theta\Delta x, y^0, z^0)\,\Delta x, \quad (0 < \theta < 1)$$

$\overset{\frown}{CB}$ – отрезок $B = (x^0 + \Delta x, y^0, z^0)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x^0 + \theta\Delta x, y^0, z^0) \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} P(x^0, y^0, z^0) \quad (P \in C(\Omega)) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = P$$

2. „$\Leftarrow$" $\exists\ U \in D(\Omega)$, причём $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ в $\forall$ точке



$\exists\ \Gamma$ – произв. к/гладкая кривая $\overset{\frown}{AB}$, Γ: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$, x, y, z – кусочно-гладкие

$$\Rightarrow \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{t_0}^{T} \left[P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), _)\,y'(t) + R(x(t), _, z'(t) \right] dt$$

(∃ кратн. конечн. точек – куски)

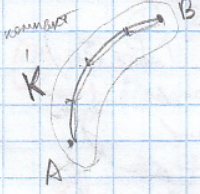
Положим: $V(t) = U(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [t_0, T]$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{t_0}^{T} \left[\frac{\partial U}{\partial x}(\ldots)x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}\,y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}\,z'(t) \right] dt = \int\limits_{t_0}^{T} \frac{dV}{dt}(t)\,dt \overset{\text{непр.}}{=} V(T) - V(t_0) =$$

$(x(t), y(t), z(t))$

$= U(B) - U(A)$. – не зависит от Γ. ◀

Т2. Об аппроксимации криволинейного $\int$а



$$\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t_0 \le t \le T, \quad x, y, z \in C^1[t_0, T]$$

Рассм. р-ие $\hat{P} = (A_0 = A, A_1, \ldots, A_n = B)$ дуги AB с $d(\hat{P})$ – диаметром и соответ. ломаную $\Lambda_{\hat{P}}$ (вписанную в Γ).

Предполагается, что $\Gamma, \Lambda_{\hat{P}} \subset K$ – компакт; $\exists P, Q, R \in C(K)$

Тогда $\lim\limits_{d(\hat{P})\to 0} \int\limits_{\Lambda_{\hat{P}}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$.

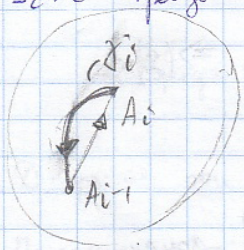
▶ Достаточно доказать, что $\lim\limits_{d(\hat{P})\to 0} \int\limits_{\Lambda_{\hat{P}}} P\,dx = \int\limits_{\Gamma} P\,dx$ (*).

Рассмотрим $\hat{P} = (A_0, \dots A_{k-1}, A_k, \dots A_n)$ и рассмотрим соотв. разность.

$$\int\limits_{\Lambda_{\hat{P}}} P\,dx - \int\limits_{\Gamma} P\,dx = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\overrightarrow{A_{i-1}A_i}} - \int\limits_{\overrightarrow{A_{i-1}A_i}} \right) P\,dx. \quad =: \Delta_i \qquad (3).$$

отрезок

1. $\exists \varepsilon > 0$ произвольно. Т.к. $P \in C(K) \Rightarrow P$ равн. непр. на $K \Rightarrow$ для точки A_i $\exists$ шар $B(A_i, r)$ / $|P(M) - P(A_i)| < \varepsilon$ $\forall M \in K$ с условием $M \in B(A_i, r)$, r не зависит от ε (равн. непр.)



2. Для выбр. $r = r(\varepsilon)$. $\exists \delta = \delta(r(\varepsilon)) > 0$ / $\overrightarrow{A_{i-1}A_0}, \overrightarrow{A_{i-1}A_0} \subset B(A_i, r)$, если $d(\hat{P}) < \delta$

3. Имеем $\Delta_i = \left(\int\limits_{\overrightarrow{A_{i-1}A_0}} - \int\limits_{\overrightarrow{A_{i-1}A_i}} \right) P\,dx = \left(\int\limits_{\overrightarrow{A_{i-1}A_0}} + \int\limits_{\overrightarrow{A_iA_{i-1}}} \right) P\,dx = \int\limits_{\gamma_i} P\,dx = \int\limits_{\gamma_\delta} P\cos\alpha\,ds \Rightarrow$

γ_i: $\overrightarrow{A_{i-1}A_0}$ $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$

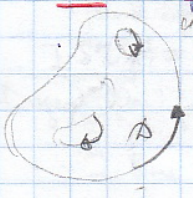
$\int\limits_{\gamma_i} [P(x,y,z) - P(A_i)]\,dx + P(A_i) \int\limits_{\gamma_i} ds$ (св-во 5) $= 0$

$$|\Delta_i| \le \int\limits_{\gamma_i} |P(x,y,z) - P(A_i)|\,|\cos\alpha|\,ds < \varepsilon \cdot \sum \Delta s_i$$

см п 2; сумма пути обхода

$$\Rightarrow \text{см (3)} \quad \left| \int\limits_{\Lambda_{\hat{P}}} P\,dx - \int\limits_{\Gamma} P\,dx \right| \le \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| < 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = 2L\varepsilon, \text{ где } L = |AB|$$

2.4. Формула Грина (на плоскости) §20

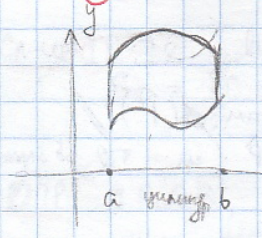


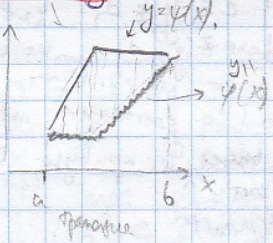
Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ область D, ограниченную кусочно-гладким контуром Γ.

$\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$, x, y – кус. гладкие

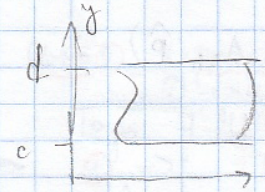
Обход контура Γ назов. положит. (Γ^+), если он оставляет область D при обходе слева.

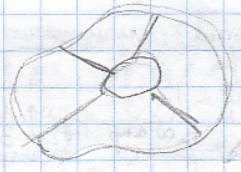
ОПР (1) Обл. D – простая относ. Oy $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $D = \{ a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x), \varphi, \psi$ – кус.-гладки на $[a,b] \}$





(2) Аналог обл D – простая отн. Ox $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $D = \{ c < y < d, \varphi(y) < x < \psi(y) \}$, φ, ψ – кус.-н. $[c,d]$, не прив.-кус.-непр. функ.



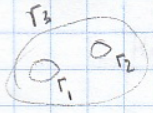


(3) D – простая $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ (D – прост. отн. Ox) $\vee$ (D прост. отн. Oy)

Говорят, что огранич. обл. D разрезана на конечное число простых областей D_m, $1 \le m \le M$, если: (1) $\bigcup D_m \subset D$ (3) $D_m \cap D_k = \emptyset$, $k \ne m$

(2) $\bigcup_1^M \overline{D}_m = \overline{D}$ (4) $\partial D_m \cap \partial D_k \cap D = \emptyset$, или точка, или промежуток

Лемма. $\exists D \subset \mathbb{R}^2$, D-обл, $\Gamma = \partial D = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$, кус/гл., причем $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$. Тогда D может быть разрезана



на конечное число простых областей

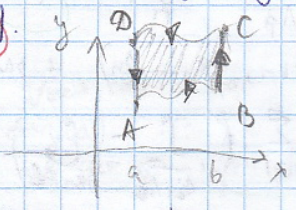
▶◀ О.В. Бесов – лекции по матанализу. (20/42.)

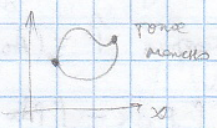
с 318

Т. (Ф-ла Грина) $\exists D \subset \mathbb{R}^2$, D-ограничена, $\partial D = \bigcup_{\delta=1}^{N} \Gamma_\delta$ (усл. Жордана), где Γ_δ – кус-гладкие, причём $\Gamma_\delta \cap \Gamma_j = \emptyset$ при $\delta \neq j$ (физ. смысл) 7.05.19

$$\exists P, Q,\ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(\overline{D}) \Rightarrow \int_{\partial D^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy \quad (1)$$

▶ Достат. доказать, что $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D^+} P\,dx$ (2).





1. D-простая отн. Oy, т.е.

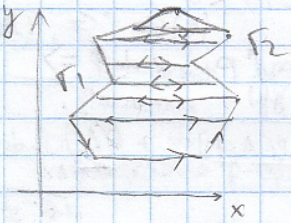
$D = \{a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}$

Имеем: $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \overset{\text{Тф}}{=} \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b \{P(\psi(x)) - P(\varphi(x))\}\,dx =$

$= -\int_{\overrightarrow{CD}} P(x,y)\,dx \overset{\text{был}}{=} \int_{\overrightarrow{AB}} P(x,y)\,dx - \int_{\overrightarrow{BC}} P\,dx - \int_{\overrightarrow{DA}} P\,dx = -\int_{\partial D^+} P\,dx \Rightarrow (2)$

(обход против часовой)

2. D – простая отн. Ox при доп. усл.: „боковые границы".



$\Gamma_1 := \{c \le y \le d,\ x = \varphi(y)\}$, $\Gamma_2 := \{c \le y \le d,\ x = \psi(y)\}$ – ломаные (ломаная)

$\exists$ разбиение $\{c_i, i = \overline{0,N}\}$ отрезка $[c,d]$ /

$D_i := \{c_{i-1} < y < c_i,\ \varphi(y) < x < \psi(y)\}$, где D_i – трапеция $(i = \overline{1,N})$

Тогда D_i – прост. отн. Ox и Oy $\Rightarrow$ п. 1.

$(2) \Rightarrow \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_i^+} P\,dx \quad (\overline{D} = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{D_i})$

$\Rightarrow \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{N} \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\sum_{i=1}^{N} \int_{\partial D_i^+} P\,dx = -\int_{\partial D^+} P\,dx \Rightarrow (2)$

(интегр. по „внутр." отрезкам сократятся.)

3. D – простая отн. Ox при доп. условии:

$\exists h_0 > 0 /\ \psi(y) - \varphi(y) \ge 3h_0 \quad \forall y$



$\exists h \in (0, h_0)$ – произвольно.

Рассмотрим область $D_h := \{c < y < d,\ \varphi(y) + h < x < \psi(y) - h\}$ – без лин., т.к. $3h_0$ было

с „боковыми" границами $\Gamma_{1,h} := \{c \le y \le d,\ x = \varphi(y) + h\}$

$\Gamma_{2,h} := \{c \le y \le d,\ x = \psi(y) - h\}$

Выберем разбиение $\hat{P}$ отрезка $[c,d]$ с достаточно малым диаметром $d(\hat{P})$ /

соотв. ломаные: $\Lambda_{1,h}(\hat{P})$ – ломаная, вписанная в кривую $\Gamma_{1,h}$ соотв. $\hat{P}$ (см. Т2 об аппрокс.)

и $\Lambda_{2,h}(\hat{P})$ – h – $\Gamma_{2,h}$ соотв. $\hat{P}$,

причём $\Lambda_{1,h}, \Lambda_{2,h} \subset D$ ($d(\hat{P})$ – мал)

Обозн.: $D_h(\hat{P})$ – соотв. область с „боковыми" границами $\Lambda_{1,h}(\hat{P})$ и $\Lambda_{2,h}(\hat{P}) \Rightarrow$

$\overset{\text{п. 2}}{\Rightarrow} \iint_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_h^+(\hat{P})} P\,dx$ (ломаная)

$d(\hat{P}) \to 0$, $D_h(\hat{P}) \to D_h$, т.к. $h > 0$ ← теорема с ЛБ1 $\quad -\int_{\partial D_h^+}$ (по контуру $\Gamma_{1,h}$ и $\Gamma_{2,h}$ соотв. $\hat{P}$)

$\Rightarrow \iint_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_h^+} P\,dx \overset{?}{=} -\int_{\partial D^+} P\,dx$ (*) (3)

Аналогично $\{D_{h_n} \to D\}$ исчерпание D.

Имеем $\iint_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y} \xrightarrow[h\to+0]{} \iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y}$ — предел по включению.

Кроме того, р-хем (*). Имеем: $\left| \int_{\Gamma_{1,h}} P(x,y)\,dx - \int_{\Gamma_1} P(x,y)\,dx \right| = \left| \int_c^d P(\psi(y)+h, y)\cdot \psi'(y)\,dy - \int_c^d P(\psi(y),y)\psi'(y)\,dy \right| =: A.$

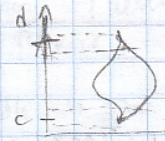
$\exists\, w(h,P)$ — модуль непрер. функ $P: \vec{D} \to \mathbb{R}$.

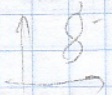
Тогда $0 \le A \le \int_c^d w(h,P)\cdot|\psi'(y)|\,dy \le w(h,P)\cdot M(d-c) \xrightarrow[\to 0]{h\to+0} 0 \Rightarrow (*)$.

(M — кус.-непр. const; модуль непр. непр. функ.)

$\Rightarrow$ переходя к $\lim_{h\to+0}$ в (3) получаем (2).

(4)° D — простая отн. Ox.





Положим $D_\varepsilon := \{ c+\varepsilon < y < d-\varepsilon,\ \varphi(y) < x < \psi(y) \}$.

Тогда п.3): $\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_\varepsilon^+} P\,dx \xrightarrow[\text{(лемма 6.3)}]{\lim_{\varepsilon\to+0}} (2)$.

(5) Общий случай. P удовл. усл. Т-мы $\Rightarrow$ D удовл. усл. Леммы.

$\Rightarrow$ D может быть разрезана на конечное число простых областей.



$\overline{D} = \bigcup_{m=1}^{M} \overline{D_m}$ $\quad \partial D_m \cap \partial D_k \cap D \in \{\varnothing, \text{точка, дуга}\}$

$\Rightarrow$ п. 1) и п. 4) $\quad \iint_{D_m} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\partial D_m^+} P\,dx$ (4)

$\exists\, \partial' D_m := \partial D_m \cap D$ — внутренняя граница

$\partial'' D_m := \partial D_m \cap \partial D$ — "внешняя" граница.

$\exists\, E_{mk} = \partial' D_m \cap \partial' D_k = \varnothing$, точка или отрезок.

$m \ne k$ $\quad \int_{\text{т}} \Rightarrow \int_{\text{т}=0}$ $\quad +\int -\int$

$\Rightarrow$ ⊕ в (4) по m — получим (2)

Сл-ие 1 $\exists D$ — удовл. усл. Т. Вычислим S_D! = площадь D (опред. т.к. D — изм. по Жк, по усл.)

$S_D = \iint_D 1\,dx\,dy \overset{\text{(по опр)}}{=} \overset{\text{ст(2)}}{\int_{\partial D^+}} x\,dy = \overset{P:=0}{\underset{Q:=x}{\cdots}} = -\int_{\partial D^+} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D^+} x\,dy - y\,dx$.

ОПР $\exists D \subset \mathbb{R}^2$, D-область (об, отр). Тогда D — односвязная область $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ G огр. зам. $\subset \mathbb{R}^2$ имеет место импликация: $(\partial G \subset D) \Rightarrow (G \subset D)$ (т.е зам. без "дырок").

Сл-ие 2 (критерий полного дифференциала)

$\exists D$ — односвязная обл. в $\mathbb{R}^2$, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$

Тогда $\exists\, U: D \to \mathbb{R}$ / U дифф. в D и $dU = P\,dx + Q\,dy \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ в D (5)

$\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ " $\exists$ дифф. функция $U: D \to \mathbb{R}$ / $dU = P\,dx + Q\,dy$ D — ?, что $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ в D.

Π: $\exists M_0 \in D$ / $\frac{\partial P}{\partial y}(M_0) - \frac{\partial Q}{\partial x}(M_0) \ne 0$. Не огр. общн. пусть > 0

Но D-открытая $\Rightarrow$ т.к. $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$ $\exists B(M_0,\varepsilon) \subset D$ / $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big|_{B(M_0,\varepsilon)} > 0$

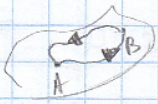
$\Rightarrow \iint_{B(M_0;\varepsilon)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy > 0 \Rightarrow$ (см. ∀ 4 п.3 (нед-то от пути инт.)) $I = \int_{\partial B(M_0,\varepsilon)} P\,dx + Q\,dy > 0$ (фла Грина)

Но $I=0$ – см. р-во Т1 п.3 часть 2. $\Rightarrow$ (P).

(2) $\Leftarrow$: $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ в D.

Надо доказать, что $\exists$ диффер-ая $U: D \to \mathbb{R}$ / $dU = Pdx + Qdy$

Т1 п.3 $\Rightarrow$ достаточно доказать, что $\int_\Gamma Pdx+Qdy$ не зависит от пути $\forall \Gamma$



Рассмотрим $A, B \in D$ и кус.-гладкий путь Γ_1: $\overrightarrow{BA}$

Другой путь: Γ_2: $\overrightarrow{AB}$.

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

Ясно Т.: $\int_{(\overrightarrow{BA})_1} Pdx+Qdy = \int_{(\overrightarrow{BA})_2} Pdx+Qdy \Rightarrow$ не зависит от пути $\forall \Gamma$.

односвязность нужна чтобы не было "рыжих" иначе ещё бы добавили

ГЛАВА 5. Поверхностный интеграл

§1 Поверхность в пространстве

1.1 Задание поверхности в пространстве

Разн. способы задания в $\mathbb{R}^3$

1. Поверхность задана явно:

$z = f(x,y)$ (или $x = g(y,z)$, или $y = h(x,z)$), $f \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Пр-р: $z = x^2+y^2$ параболоид.



2. Неявно задана:

$F(x,y,z) = 0$

Пр-р: $x^2+y^2+z^2 = R^2$.



3. Пов-ть задана параметрически.

поверхность Φ: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ (1)

$x, y, z \in C(\overline{D})$ (мы будем брать $C^1(\overline{D})$)

Пр-р: $\begin{cases} x = R\cos u \cos v \\ y = R \sin u \cos v \\ z = R \sin v \end{cases}$ $0 \le u \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$.

Далее всюду рассмотр. пов-ть Φ, заданную ф-лами (1). с условиями:

1) D – огранич. область в $\mathbb{R}^2$, причем ∂D – простой кусочно-гладкий контур $\Rightarrow$ ограничена
2) $x, y, z \in C^1(\overline{D})$
3) отображение (1) $F: (u,v) \in D \to F(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ – см (1) – биекция.

без замыкания

Если усл. 3) для Φ выполн в $\overline{D}$, то пов Φ наз простой. В этом случае $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, где $(u,v) \in \partial D\}$ назыв. краем пов-ти

образ границы при отобр 1.

Пов-ть без края – пов-ть, у кот нет края

Точка $M \in \Phi$ назыв внутренней точкой пов-ти, если $M \notin$ краю пов-ти (если нет края, то все – внутренние)

образ внутр точки области

Пр-р



$\begin{cases} x = u\cos v & 0 < a \le u \le b \\ y = u \sin v & 0 \le v \le \pi \\ z = u \end{cases}$

края:



1.2. Гладкая поверхность

Опр 1 Повть Φ (с условиями 1–3) назыв. **гладкой**, если $\forall$ т. $M_0 \in \Phi$ т. M_0 – внутр. $\exists$ окрть $O(M_0) \subset \mathbb{R}^3$ / $O(M_0) \cap \Phi$ – может быть задано явно. (т.е. одним из 3х уравнений), причём f (или g, или h) $\in C^1(G)$, G – прообраз $O(M_0) \cap \Phi$.



Рассмотрим матрицу Якоби отобр (1).

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$ и соотв. векторы $\vec{r}'_u := \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix}$ $\vec{r}'_v = \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix}$.

(Заметим, что (1) м.б переписано в виде $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$)

Т: $M \in \Phi$ назыв. **регулярной (неособой)**, если векторы $\vec{r}'_u(M)$ и $\vec{r}'_v(M)$ не коллинеарны (т.е. матр Якоби полного ранга)
Иначе – M наз. **особой точкой**

M – регул. $\Leftrightarrow$ матр Якоби в этой точке имеет ранг 2.

$M \in \Phi$ – регулярна, тогда Φ **не вырождена** в т. M

Зам. Повть Φ не имеет особых точек $\Rightarrow$ Φ – гладкая. не будем использовать

$\not\Leftarrow$ Зорич.

Зам. Т: $M \in \Phi$ – регул, то $\vec{r}'_u(M) \times \vec{r}'_v(M) \neq (0,0,0)$ (неколлинеарные векторы)

Опр 2. $\exists M \in \Phi$ внутр, регулярная. Плоскость, проходящая через т. M параллельно векторам $\vec{r}'_u(M)$, $\vec{r}'_v(M)$, назыв. **касат. пл-тью** к повти Φ в точке M
корректно, т.к M внутр регулярная

Опр 2 $\Rightarrow$ урне касат. пл-ти в т. M_0 (смотрим на транспон. матр Якоби: $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$)

$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix} = 0$$

Пр-р. Явное задание повти. $z = f(x,y)$

$\Phi = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$ Урне касат. пл-ти: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0) \end{vmatrix} =$ (=)

(=) $(x-x_0)(-f'_x) - (y-y_0)f'_y + z - z_0 = 0$

$z - z_0 = f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)$

Опр 3. $M \in \Phi$, M – внутр регулярная. **Нормаль** к повти Φ в т. M – прямая, проходящая через т. M $\perp$ касат. пл-ти. (не путать с векторами нормали!)

Единичный вектор нормали: $\vec{n}(M) := (\pm)\dfrac{\vec{r}'_u(M) \times \vec{r}'_v(M)}{|\vec{r}'_u(M) \times \vec{r}'_v(M)|}$

$A := \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ – минор $\begin{pmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ $\quad B := \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ $\quad C := \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$\vec{n}(M) = \pm\left(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$ направл. косинусы

Пр-ры. (1) Явное задание повти $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{pmatrix}$ $\quad A = -z'_x$, $B = -z'_y$, $C = 1$

$\vec{n} = \pm\dfrac{(\mp f'_x, \mp f'_y, \mp 1)}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}$

(2) Конус $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases}$ $u \geq 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$. $\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} A = z - u\cos v = -x \\ B = z - u\sin v = -y \\ C = u^0 = 1 \end{cases}$ $\vec{n} = \pm\left(\underbrace{-\frac{x}{z\sqrt{2}}}_{\cos\alpha}, \underbrace{-\frac{y}{z\sqrt{2}}}_{\cos\beta}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\gamma}\right)$.

$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{u^2+u^2} = u\sqrt{2} = z\sqrt{2}$

17.05.19 **1.3 Ориентация гладкой пов-ти**

$\exists$ пов-ть Φ – гладкая. задана (1) (1.1) с усл 1–3 без особых точек (все т. регулярные) (*)

$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \in C(\overline{D})$ ($\vec{r}$ – непр, непр – ск опр гладкой пов-ти, $\neq 0$)

ОПР 1. Всякое непрерывное поле единичных нормалей пов-ти Φ называется ориентацией (сторонами) пов-ти Φ

Т.о выбор стороны пов-ти однозначает выбор направл. вектора нормали

Зам. (1) усл (*) $\Rightarrow$ можно выбрать сторону пов-ти. Тогда Φ – двусторонняя пов-ть

(2) Лист Мёбиуса – нельзя выбрать сторону $\Rightarrow$ Φ – односторонняя пов-ть



1.4 Площадь поверхности

Пусть Φ – гладкая пов-ть:

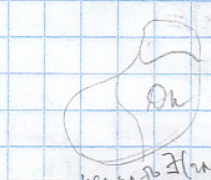
$\Phi: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $u, v \in D$: с усл 1–3. $\forall$ т. $M \in \Phi$ внутр $\exists\, O(M) / \partial(M) \cap \Phi$ – м.б задан явно

Обоснование факта для площади пов-ти Φ.

Мн-во D разбиваем на конечное число частичных областей D_k / $\overline{D} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{D_k}$,

$D_i \cap D_j = \varnothing$, ∂D_i – кус. гл-ие

$\{ D_k, k = \overline{1,N} \} =: P$ – разбиение D. $d(P) := \max\limits_{k=\overline{1,n}} |D_k|$, где $|D_k|$ – наиб из расст между т. ∂D_k – кус гл



Задание (1) $\Rightarrow$ $\forall$ D_k отображается · флост (1) на кусок Φ_k пов-ти Φ, $\partial\Phi_k$ – кус. гладкие (т.к. отобр из C^1 области)

$\forall k$ фиксируем пр-но $M_k \in (\mathrm{int}\,\Phi) \cap \Phi_k$, $\mathrm{int}\,\Phi := \{ M \in \Phi,\ M$ – внутр$\}$

Считаем $d(P)$ достаточно малым – таким, что в точке M_k $\exists$ кас. пл-ть к пов-ти Φ, причём $\exists$ взаимно однозн соответствие между Φ_k и D_k^* – областью $\subset$ кас пл-ти в M_k. (проецирование Φ_k на D_k^* вдоль вектора нормали в M_k $\vec{n}(M_k)$)

Положим $\Delta S_k := |D_k^*|$ и $S(P) := \sum\limits_{k=1}^{N} \Delta S_k$ (2)

Д-жем, что $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P)$ (=: S_Φ – площадь п-ти Φ)

На Φ_k введём так называемую "местную" (ξ, η, ζ) – ортогональная с.к с центром в т. M_k, ось $M_k\zeta$ направлена вдоль $\vec{n}$ (выбрана сторона Φ), оси $M_k\xi$, $M_k\eta$ – ортогональны и лежат в D_k^*

Имеем φ_k: $\begin{cases} \xi = \xi(x,y,z) = \xi(u,v) \\ \eta = \dots = \eta(u,v) \\ \zeta = \dots = \zeta(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \overline{D}_k$ (3)

от u, v

которое параметр. φ_k

с усл 1–3, φ_k – гладкая и т.д.

Рассмотрим $\begin{pmatrix} \xi'_u & \eta'_u & \zeta'_u \\ \xi'_v & \eta'_v & \zeta'_v \end{pmatrix}$ (4) $\vec{i}$ = орт-вектор оси $O\xi$; $\vec{j}$ = … $O\eta$; $\vec{k}$ = … $O\zeta$

и рассмотрим $\vec{r}'_u = \xi'_u \cdot \vec{i} + \eta'_u \cdot \vec{j} + \zeta'_u \vec{k}$ Но $\vec{r}'_u(M_k) \subset \overline{D}_k^*$ (как плоть по опр).

$\Rightarrow \xi'_u(M_k) = 0$ …

Аналогично $\vec{r}'_v(M_k) \subset \overline{D}_k^*$, $\xi'_v(M_k) = 0$

$\Rightarrow$ (4) в т. M_k — $\begin{pmatrix} \xi'_u(M_k) & \eta'_u(M_k) & 0 \\ \xi'_v(M_k) & \eta'_v(M_k) & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\Rightarrow$ $\vec{r}'_u(M_k) \times \vec{r}'_v(M_k) = \begin{vmatrix} \xi'_u(M_k) & \eta'_u(M_k) \\ \xi'_v(M_k) & \eta'_v(M_k) \end{vmatrix} \vec{k}$

замена перем. — якобиан

$=: J(u_k, v_k) = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}$

См. (2): имеем $\Delta S_k = |\overline{D}_k| = \iint\limits_{\overline{D}_k} d\xi\, d\eta = \iint\limits_{\overline{D}_k} |J(u,v)|\, du\, dv$

$\overline{D}_k^*$ – изм по Жк, т.к $\partial \overline{D}_k^*$ – кус-но гл.

$\overline{D}_k \to \varphi_k \to \overline{D}_k^*$ нет особых точек

Заметим, что $J(u_k, v_k) = \vec{r}'_u(M_k) \times \vec{r}'_v(M_k)$ и, кроме того, $J(u,v)$ – равном. непр функция на $\overline{D}_k$. (т.к непр на комп)

соотв M_k.

Имеем (см (2)) $S(P) = \sum\limits_{k=1}^{N} |\overline{D}_k^*| = \sum\limits_{k=1}^{N} \iint\limits_{\overline{D}_k} |J(u,v)|\, du\, dv$

При этом $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{N} \iint\limits_{\overline{D}_k} |J(u,v)|\, du\, dv = \iint\limits_{\overline{D}} |J(u,v)|\, du\, dv$ (6)

Далее рассмотрим разность $\left| \sum\limits_{k=1}^{N} \Delta S_k - \sum\limits_{k=1}^{N} |J(u_k,v_k)| \cdot |\overline{D}_k| \right| \le$ (хотим: $S_\varphi := \iint\limits_{\overline{D}} |r'_u \times r'_v|\, du\, dv$)

$|\overline{D}_k^*| = \iint\limits_{\overline{D}_k} |J(u,v)|\, du\, dv$

$\le \sum\limits_{k=1}^{N} \iint\limits_{\overline{D}_k} \left(|J(u,v)| - |J(u_k,v_k)| \right) du\, dv \le \max\limits_{k=\overline{1,N}} \left(|J(u,v)| - |J(u_k,v_k)| \right) |\overline{D}| \to 0$ при $d(P)\to 0$

$u,v \in \overline{D}_k$. $\to 0$ при разбиен $d(P)\to 0$ (равн. непр-ть)

Но $\lim\limits_{d(P)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{N} |J(u_k,v_k)|\, |\overline{D}_k| \to \iint\limits_{\overline{D}} |J(u,v)|\, du\, dv$.

$= |r'_u(M_k) \times r'_v(M_k)|$

Окончательно (см (2)) $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P) = \iint\limits_{\overline{D}} |J(u,v)|\, du\, dv \Rightarrow$ соглашение

$$S_\varphi := \iint\limits_{\overline{D}} |r'_u \times r'_v|\, du\, dv$$ – площадь пов-ти φ

$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ $E := (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$; $G := (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$; $F := x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$

$|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| = \sqrt{|EG - F^2|}$ $\Rightarrow S_\varphi = \iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{|EG - F^2|}\, du\, dv$ 21.05.19

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$ $(x,y) \in \overline{D}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{pmatrix}$ $E = 1 + f'^2_x$; $G = 1 + f'^2_y$; $F = f'_x f'_y$; $EG - F^2 = 1 + f'^2_x + f'^2_y$

§2 Поверхностные инт I и II рода

2.1 Преобр. параметров гладкой пов-ти

Задана пов-ть φ: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \overline{D}$ (1)

усл 1–3 – без особых точек, т.е $r'_u \times r'_v \neq (0,0,0)$

Инъекц. из $\mathrm{Int}(D)$ на φ Сферы: инъек-ти до $\overline{D}$ нет

Полусфера $\overline{D} \to \varphi$ с кругом

Рассм. отбор $P: (u_1, v_1) \in \overline{D_1} \subset \mathbb{R}^2 \to P(u_1, v_1) \in \overline{D}$ (2)
притом $\overline{D_1}$ идет на ∂c.

Повть φ: $\begin{cases} \xi = \xi(u_1, v_1) = x(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1)) \\ \eta = \eta(u_1, v_1) = y(-) \\ \zeta = \zeta(u_1, v_1) = z(-) \end{cases}$, т.е $\vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$

Замена параметров (2) наз. допустимой, если:
1) $P: D_1 \to D$ (диффр/м) притом $D_1 \leftrightarrow D$ (внутр ↔ внутр) $[\Rightarrow \partial D_1 \leftrightarrow \partial D]$
2) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \neq 0$ в D_1 $(\Rightarrow \left|\frac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)}\right| \neq 0$ в $D)$

$\rho'_{u_1} \times \rho'_{v_1} - ?$

$\left.\begin{aligned} \rho'_{u_1} &= \vec{r}'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial u_1} + \vec{r}'_v \frac{\partial v}{\partial u_1} \\ \rho'_{v_1} &= \vec{r}'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial v_1} + \vec{r}'_v \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho'_{u_1} \times \rho'_{v_1} = r'_u \times r'_v \left[\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right] = r'_u \times r'_v \underbrace{\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}}_{\neq 0 \text{ в } D_1}$
т.к. замена допуст.

Следовательно:
1) Парам. зад (1) с усл 1-3 и неособ. точками переходит при допустимой преобр (2) в усл 1-3 и с неос. точками.
2) Как пить и нормаль сохраняются

2.2 Поверхностный San I рода

Пусть задана повть φ равенств (1) с 1-3 без особ. точек
Опр $f: \varphi \to \mathbb{R}$ Тогда Sanом I рода по повти φ от функ f наз. выражение:

$$\iint\limits_{\varphi} f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \underbrace{|r'_u \times r'_v|}_{\text{эл-т повти } ds} du\,dv$$

(1), если этот San $\exists$
D - обл. парам.

Замечания: 1) $\exists \iint\limits_{\varphi} f\,ds \Leftrightarrow \tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(), z()) \in R(D)$
2) San (1) не меняется при допуст. замене параметра

$$\triangleright \iint\limits_{\varphi} \tilde{f}(\xi,\eta,\zeta)\,ds = \iint\limits_{D_1} \tilde{f}(\xi(u_1,v_1), \eta(), \zeta())\,|\rho'_{u_1} \times \rho'_{v_1}|\,du_1\,dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f[x(u(u_1,v_1), v(u_1,v_1)), y(u(),v()), z(u(),v())] \cdot |r'_u \times r'_v| \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}\,du_1\,dv_1 =$$

замена; D_1 - обл по x (доп. зам); перем

$$= \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|r'_u \times r'_v|\,du\,dv = \iint\limits_{\varphi} f(x,y,z)\,ds. \quad \triangleleft$$

3) Если φ - кус-гл $\varphi = \bigcup_{k=1}^{N} \varphi_k$, φ_k - гл-ие, $\varphi_k \cap \varphi_j =$ граница $\Rightarrow$

$$\iint\limits_{\varphi} f = \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\varphi_k} f$$

4) San I рода не зависит от стороны повти (т.к. нет выбора норм в опр

2.3 Поверхностный San II рода

φ - повть (1) с усл 1-3 без ос. точек
Тогда (Зорич) φ - двусторонняя (опред. непр поле векторов нормали)

$$\vec{n} = \pm \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Опр $P, Q, R \in C(\varphi)$ $: \varphi \to \mathbb{R}$. Тогда Sanом II рода по (ориент.) повти φ от вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$ наз. выражение:

$$\iint\limits_{\varphi \vec{n}} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R()\cos\delta]\,ds \quad (1) = \iint\limits_{\varphi \vec{n}} (\vec{a}, \vec{n})\,ds$$

т.е. зависит

Зам-ия: 1) San II рода зависит от ориентации повти
2) San (1) не меняется при допуст. замене параметров если эти замены сохр. сторону повти.
$\rho'_{u_1} \times \rho'_{v_1} = r'_u \times r'_v \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}$ знак может поменяться

3. (V) меняет знак при замене ориент. $\vec{n} \to -\vec{n}$.

4. На кусочно гладкой пов-ти $\int\int$ как $\sum \int\int$ по гладким кускам

Говорим, что пов-ть φ полож ориент, если $\vec{n} = \oplus \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|}$
В этом случае пишут $\varphi^{\vec{n}} =: \varphi^+$ и $\iint\limits_{\varphi^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy := \iint\limits_{\varphi^{\vec{n}}} (\vec{a}, \vec{n})\,ds$

Имеем: $\iint\limits_{\varphi^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{\varphi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\delta)\,ds \overset{\text{см } n2}{=}$
сторона не нужна, т.к. $\int\int$ род

$= \iint\limits_{\Delta} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,|r'_u \times r'_v|\,du\,dv$ (=)

$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ $r'_u \times r'_v = (A, B, C)$, где $A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ $B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ $C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

$\cos\alpha = \frac{A}{|\cdot|}$ $\cos\beta = \frac{B}{|\cdot|}$ $\cos\delta = \frac{C}{|\cdot|}$

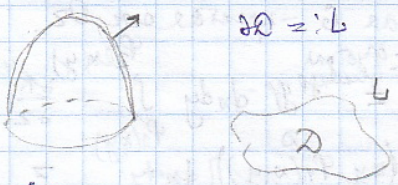
(=) $\iint\limits_{\Delta} (PA + QB + RC)\,du\,dv = \iint\limits_{\Delta} (\vec{a}, \frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|})\,du\,dv$

24 Ф-ла Стокса

$\exists$ φ-простая пов-ть т.е. $\varphi = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \overline{D_1}$ с усл 1-3 без ос точек. (1)
с краем (без орт. соотв при $\overline{D_1}$)
Тогда (край φ) $:= \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \mid t \in \partial D \}$

Досрок! 5.06. 12:00 ауд 1306 24.05.19.
Обсн. S пов-ти нет в экзамене

∂D – кус-но $\Rightarrow$ край пов-ти φ Γ = кус-но



$\partial D =: L$

Обход $\partial D = L$ индуцирует соотв обход Γ ← ориентацию края (обход Γ)

Ориентация края Γ наз. соотв-ей / согласованной с ориентацией φ (сторона пов-ти – нормаль)
(∂D индуцир соотв обх. Γ) $\wedge$ (выбир. $\vec{n} = \oplus \frac{r'_u \times r'_v}{|\cdot|}$).

(Фихтенгольц, III том, с. 620 – ориент согл. по правилу штопора)

Т (Ф-ла Стокса)
$\exists$ задана простая (с усл. (1)) пов-ть $\varphi \subset G$, G – область в $\mathbb{R}^3$, причём ∂D – гладкий и
$x, y, z \in C^2(\overline{D})$; $P, Q, R \in C^1(G)$. Тогда, если ориент. Γ согласована с ориент. φ, то справедлива ф-ла

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\varphi} \{ (Q'_x - P'_y)\cos\gamma + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (R'_y - Q'_z)\cos\alpha \}\,ds \quad (2)$$

ф-ла Грина $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ напр. cos нормали – ориент

Док-во Докаж. ф-лу $\int\limits_{\Gamma} P\,dx = \iint\limits_{\varphi} (P'_z \cos\beta - P'_y \cos\gamma)\,ds$ (3)

Кривая $L = \partial D$ $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$; Γ: $\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$.

зам. перем. п.4. ... ф-ла

Имеем: $\int\limits_{\Gamma} P\,dx = \int\limits_{t_0}^{T} P \cdot x'_t\,dt = \int\limits_{t_0}^{T} P(x'_u u'_t + x'_v v'_t)\,dt = \int\limits_{L} P(x'_u\,du + x'_v\,dv) =$

ф-ла Γ $= \iint\limits_{D} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}(P x'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P x'_u) \right\} du\,dv = \iint\limits_{D} \left\{ \left(P'_x \frac{\partial x}{\partial u} + P'_y \frac{\partial y}{\partial u} + P'_z \frac{\partial z}{\partial u} \right) x'_v - \right.$

(все сократится) $\left. - \left(P'_x \frac{\partial x}{\partial v} + P'_y \frac{\partial y}{\partial v} + P'_z \frac{\partial z}{\partial v} \right) x'_u \right\} du\,dv = \iint\limits_{D} 0 \cdot P'_x + P'_z (z'_u x'_v - z'_v x'_u) + P'_y (y'_u x'_v - y'_v x'_u)\,du\,dv =$

$= \iint\limits_{D} \left(P'_z \frac{B}{|r'_u \times r'_v|} - P'_y \frac{C}{|r'_u \times r'_v|} \right) \cdot |r'_u \times r'_v|\,du\,dv = \iint\limits_{D} (P'_z \cos\beta - P'_y \cos\gamma)\,ds = (3)$

$r'_u \times r'_v = (A, B, C)$ ds см 22 стр

Зам. (1) Фла Стокса верна для $x,y,z \in C^1(\overline{D})$ (а для кус-гл) (аппроксимируется $\to$ в фл. Γ)

(2) Верно для кус-гл. повтей

(3) Фла (2) при обозн $\vec{a} = (P,Q,R)$ м.б. записана в виде

$$\Phi(\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{\varphi} (\underset{\text{вихрь}}{\operatorname{rot}}\,\vec{a}, \vec{n})\, dS$$ — поток вихря поля $\vec{a}$. $\left(\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\right)$

$\Phi(\vec{a}, d\vec{r})$ — циркуляция вект. потока $\vec{a}$ (поля) по краю Γ.

! (4) Вывод флы Грина из флы Стокса (некорректно, т.к. Стокса фла через Грина)

(5) $\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\varphi\text{-сост сор}} (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy + (\,)\,dz\,dx + (\,)\,dy\,dz$

$\int$

25 Фла Гаусса–Остроградского

обл G наз. простой отн. Oz $\overset{\text{def}}{\iff}$ $G := \{\varphi_1(x,y) < z < \varphi_2(x,y),\ (x,y) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2,\ \varphi_1, \varphi_2 \in C(\overline{\mathcal{D}}) \cap C^1(\mathcal{D})\}$.

Аналог. опр G – простая отн. Ox (Oy).

] $G \subset \mathbb{R}^3$. Обл. G наз. правильной, если (1) G м.б. разбита (обычно) на кон. число обл $G_{z,k}^{\downarrow}, k = \overline{1,N_2}$, простых отн. Oz.

(2) — " — отн Ox

(3) — " — отн Oy

(Т) (фла Гаусса–Остроградского)

] $G \subset \mathbb{R}^3$, G – ректифицируемая область

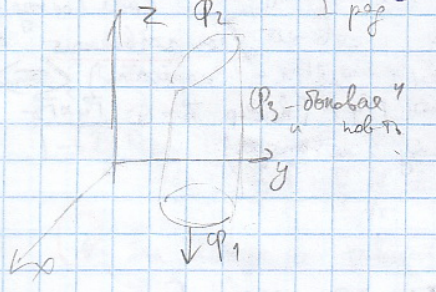
$P, Q, R \in C^1(\overline{G})$ (на внутр точки кривых на границе – предел по любому напр)

$$\Rightarrow \iint_{\varphi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$ где $\varphi = \partial G$, $\vec{n}$ – внешн. отн G (1)

▶ Дост. ф-ть флы для R:

$$\iint_{\varphi} R\cos\gamma\,dS = \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$ (2) для случая G – простая отн. Oz.

при спец сор по боковым граням



Имеем: $\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \overset{\text{т. Фубини}}{=} \iint_{\mathcal{D}} dx\,dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$ (гладкая)

$= \iint_{\mathcal{D}} [R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y))]\,dx\,dy =$ (сущ)

$\overset{\text{опр. в 1 и 2 ч.}}{=} \iint_{\varphi_2} R\cos\gamma\,dS + \iint_{\varphi_1} R\cos\gamma\,dS + \iint_{\varphi_3} R\cos\gamma\,dS = \iint_{\varphi} R\cos\gamma\,dS =$ (2)

внеш. нормаль; $\cos\gamma = 0$ на φ_3

$\Gamma_x = (1, 0, \varphi'_x)$, $\Gamma_y = (0, 1, \varphi'_y)$, $|\Gamma_x \times \Gamma_y| = |(-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)|$, $\cos\gamma = \frac{1}{|\Gamma_x \times \Gamma_y|}$

Зам. (1) Фла Г-О верна для огр. обл G с кусочно-гладкой повтью ∂G.

(2) Фла (1) м.б. записана ($\vec{a} = (P,Q,R)$.)

$$\iint_{\varphi} (\vec{a}, \vec{n})\,dS \overset{\text{I рода}}{=} \iiint_G \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz.$$

поток вект. $\vec{a}$ через φ по напр $\vec{n}$

$\vec{n}$ внеш. норм. к G

II рода

$$\iint_{\mathcal{D}} R(x,y,\varphi_2(x,y))\,dx\,dy = \iint_{\Phi_2} R(x,y,\varphi_2) \cdot \frac{|\Gamma_x \times \Gamma_y|}{|\Gamma_x \times \Gamma_y|}\,dx\,dy = \iint_{\varphi_2} R(x,y,\varphi_2) \cdot \frac{dS}{|\Gamma_x \times \Gamma_y|} =$$

$r(x,y) = (x, y, \varphi_2(x,y))$ – параметр. повть $= \iint_{\varphi_2} R(\cos\gamma)\,dS$

$\Gamma_x = (1, 0, \varphi'_{2x})$

$\Gamma_y = (0, 1, \varphi'_{2y})$

$\Gamma_x \times \Gamma_y = (-\varphi'_{2x}, -\varphi'_{2y}, 1)$