2 семестр.

1. Неопр. интегр
2. Опред. интегралы (+несобств) } коллоквиум
3. Функ многих переменных

Часть II. Интегральное исчисление функ одной переменной

Глава 1 Неопределённый интеграл

§1. Св-ва производных дифференцируемых функ

Напоминание: $f \in D[a;b] \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f \in D(a,b)) \wedge (\exists f'_+(a) =: f'(a)) \wedge (\exists f'_-(b) =: f'(b))$, $\in \mathbb{R}$

Т1 (о промежуточных значениях производной)

$f \in D([a,b])$; $f'(a) \underset{(>)}{<} f'(b) \Rightarrow \forall M \in (f'(a), f'(b))$ (или $(f'(b), f'(a))$) $\exists c \in (a,b) / f'(c) = M$

▶ Не огр. общ-ти, $\exists f'(a) < f'(b)$

1) Рассмотрим частный случай: $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ и д-жем, что $\exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$

• Имеем $f \in C[a,b]$ (т.к. $f \in D[a,b]$) $\overset{\text{II т. Вейт.}}{\Longrightarrow} \exists c \in [a,b] / f(c) = m := \min\limits_{[a,b]} f$

• $c \neq a$: в с.р., пт: $c = a \Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq f(c) = f(a)$ (1)

С другой стороны $f'(a) = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ (по условию) $\Rightarrow \exists \delta > 0 / \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ $\forall x \in (a, a+\delta)$

$\Rightarrow f(x) - f(a) < 0$ $\forall x \in (a, a+\delta)$

$\boxed{P}$

• $c \neq b$: пт: $c = b \Rightarrow \forall x \in (a,b]$ $f(x) \geq f(c) = f(b) \Rightarrow f'(b) = \lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq 0$, но $f'(b) > 0$

В итоге: $c \in (a,b)$, причём $f \in C(a,b) \cap D(c)$, c точка лок. min (extr) $\overset{\text{т. Ферма}}{\Longrightarrow} f'(c) = 0$

2) Рассм. теперь случай $f'(a) < f'(b)$. Надо д-ть: $\forall M \in (f'(a), f'(b))$ $\exists c \in (a,b) / f'(c) = M$. $\exists M \in$ (2) про-но

Положим $g(x) = f(x) - Mx$. Тогда $g \in D[a,b]$ (Σ 2х дифф. функ)

$g'(a) = f'(a) - M < 0$; $g'(b) = f'(b) - M > 0 \Rightarrow$ п. 1 $\exists c \in (a,b) / g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = M$ ◀

Замечание $f \in D[a,b] \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f' \in C[a,b]$: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

• $x \neq 0$ $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ не имеет $\lim\limits_{x \to 0}$.

• $x = 0$ $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$.

Итак, $f \in D(\mathbb{R})$, но $f' \notin C(0)$, причём разрыв f' в т. 0 II рода

Лемма $f \in C[a,b] \wedge D(a,b)$, причём $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = A \in \mathbb{R}$ (или $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f'(x) = B \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow \exists f'_+(a) =: f'(a) = A$ (соотв. $\exists f'_-(b) = f'(b) = B$)

▶ $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 /$ $|f'(x) - A| < \varepsilon$, $\forall x \in (a, a+\delta)$ $\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A \right| \overset{\text{т. Лагр}}{=}$

$\xi \in (a, x)$ $C(a, a+\delta)$

$= \left| \frac{f'(\xi)(x-a)}{x-a} - A \right| < \varepsilon$ $\forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \Rightarrow f'_+(a) = A$ ◀

Зам-ия 1 обр. утв к лемме неверно, в.г. ($\exists f'_+(a) \not\Rightarrow \lim\limits_{x \to a+0} f'(x) = A$) $\boxed{x^2 \sin\frac{1}{x}}$

2 Утв. леммы верно и для $A = \pm\infty$ ($B = \pm\infty$)

Пр-р $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, $f \in C[-1,1] \wedge D(-1,1)$

$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ $x \in (-1, 1)$ $\to (\pm)\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'_+(-1) = f'(-1) = -\frac{\pi}{2}$

$f'_-(1) = f'(1) = \frac{\pi}{2}$

T2. $f \in \mathcal{D}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$, $f' \notin C(x_0) \Rightarrow x_0$ – т. разрыва f' II рода.

▶ $\boxed{П}$! x_0 – т разрыва I рода. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f'(x) = A \underset{\in \mathbb{R}}{} \xRightarrow{\text{лемма}} \exists f'_-(x_0) = f'(x_0)$ $(f \in \mathcal{D}(a,b))$

Аналогично $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B \underset{\in \mathbb{R}}{} \Rightarrow \exists f'_+(x_0) = f'(x_0)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) \Rightarrow f' \in C(x_0)$ $\boxed{P}$ ◀

Сл-е $f \in \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow f'$ не может иметь разрывов I рода

§2. Первообразные функции. Неопределённый интеграл

2.1. Первообразные функции

Опр $\exists f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Тогда функция $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ – первообразная функции f на (a,b) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(F \in \mathcal{D}(a,b)) \wedge (F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b))$

Зам-ия ① Иногда F из опр. называют точной первообразной

② Задачу отыскания п/обр для данной $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ можно интерпретировать след. образом: найти решение обыкн. дифер. ур-ия (ОДУ) $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$

очев, что реш (if $\exists$) не !, т.к if F – первообр, то $F + C$ – $\underset{\text{дана}}{f(x)}$ тоже.

③ If F-первообр для f на (a,b)! $\Rightarrow dF(x) = f(x)\,dx$ $\forall x \in (a,b)$

Пр-ры: ① $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$

а) $(a,b) \ni \{0\} \Rightarrow f$ не имеет первообр (разрыв не II рода)

б) на $(0, +\infty)$ $\exists F(x) = x$

$(-\infty, 0)$ $\exists F(x) = -x$

② $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A \neq 0, & x = 0. \end{cases}$ а) $(a,b) \ni \{0\}$ нет п/обр на (a,b)

б) $(0, +\infty)$ $F(x) = \ln x$

$(-\infty, 0)$ $F(x) = \ln(-x)$

③. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\exists (a,b) \supset \{0\}$ $\nexists$ п/обр F для f на (a,b)

▶ $\boxed{П}$: $\exists F \in \mathcal{D}(a,b) / F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Тогда $\lim\limits_{x \to +0} F'(x) = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty \xRightarrow{\text{замеч } A = +\infty} F'_+(0) = +\infty \Rightarrow \nexists F'(0)$ ◀

F на f или f на F здесь заменить (описки)

13.02.08

Зам-я! ① $f \in C(a,b) \Rightarrow \exists$ п/обр для f на (a,b) (будет доказано позже в т. определ. интегралы)

② $f \notin C(a,b) \overset{в.з}{\Rightarrow} \nexists$ п/обр для f на (a,b)

$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $f(x) := \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; $f \notin C(0)$

F – первообр. для f на $\mathbb{R}$

Лемма $\exists F \in \mathcal{D}(a,b)$. Тогда $F \equiv const$ на $(a,b) \Longleftrightarrow F' \equiv 0$ на (a,b)

▶ ① $\Rightarrow$ очев

② $\Leftarrow$ $F' \equiv 0$ на (a,b) $\boxed{П}$: $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$; $x_1 < x_2$ / $F(x_1) \neq F(x_2)$

Имеем: т. Лагранжа! $\underset{F \in C[x_1, x_2] \text{ – кайтесь (-:}}{F(x_2) - F(x_1)} = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{F'(\xi)}}(x_2 - x_1)$ $\xi \in (x_1, x_2)$

$\Rightarrow F(x_2) = F(x_1)$ $\boxed{P}$ ◀

Т. $\exists f: (a,b) \to \mathbb{R}$, f имеет на (a,b) п/обр-ю $F_0 \in \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow$ Мн-во всех первообр для f на (a,b) им. вид $\{F_0(x) + C, x \in (a,b), C \in \mathbb{R}\}$

▶ $A := \{$м-во всех п/обр-х f на $(a,b)\}$

$B := \{F_0(x) + C, x \in (a,b), C \in \mathbb{R}\}$

• $A \subset B$! $\exists F \in A \Rightarrow F' \equiv f$ на $(a,b) \Rightarrow (F - F_0)' = f - f \equiv 0$ на (a,b)

По лемме $F - F_0 \equiv const = !C$ на $(a,b) \Rightarrow F = F_0 + C \Rightarrow F \in B$.

• $B \subset A$: $\exists F \in B \Rightarrow F \equiv F_0 + C$ на $(a,b) \Rightarrow F' = F_0' = f$ на $(a,b) \Rightarrow F \in A$

$\Rightarrow A = B$

<u>сл-ие</u> Задача для известной функ $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ найти функ $F \in D(a,b)$ — решение ОДУ: $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$ (1)

Если F_0 — реш (1) $\Rightarrow$ мн-во $\forall$ решений (1) имеет вид $F_0 + C$, $C \in \mathbb{R}$

<u>ПР-Р</u> Изв-о, что точка двигается по прямой с известной скоростью $v(t) = t^2$, $t \geq 0$. Найти положение точки $s(t)$ в $\forall$ момент времени $t \geq 0$, если в начальный момент $s(0) = 0$ (нач. усл-ие).

Математ. модель: найти решение ОДУ $s'(t) = v(t) = t^2$, $t > 0$; с нач усл $s(0) = 0$ (задача Коши: ур-ие + нач. условие)

Имеем: $s(t) = \frac{t^3}{3} + C$, $t > 0$ $\quad s(0) = C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3/3$.

Ответ: $s(t) = t^3/3$, $t > 0$.

2.2 Неопределённый интеграл

<u>Опр</u> $\exists f: (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет первообразную на (a,b). Тогда <u>неопределённый интеграл</u> от функ f на (a,b) := мн-во всех первообразных функ f на (a,b)

<u>Обознач</u>: $\int f(x)\,dx$. f назыв. <u>подынтегральной функц.</u>

<u>ПР-Р</u>: $\int x z^2\,dx = z^2 \frac{x^2}{2} + C(z)$ $\qquad \int x z^2\,dz = x \frac{z^3}{3} + C(x)$ для $\forall x$ $\exists C$

<u>Табл. неопр инт-ов</u>

$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C_1$, $x > 0$ $\quad \ln|x| + C$ удобная запись, но не совсем аккуратно

$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C_2$, $x < 0$

$\int x^\alpha dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, $x > 0$ $= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$x < 0$: $= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, α / определена функ $x \to x^\alpha$, $x < 0$ $(\alpha \neq \frac{1}{2})$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $x \in (-1, 1)$

<u>ЗАМ.</u> (эл-я ф-я)$'$ = эл. ф.

$\int$(эл-я ф-я) $\neq$ эл. ф $\quad \int e^{x^2} dx$; $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$. $\quad (0) = 1$

<u>Обозн</u>: $\exists f: (a,b) \to \mathbb{R}$.

1. $\exists \int f(x)\,dx \overset{def}{\Leftrightarrow} f$ имеет на (a,b) первообразную
2. A, B — мн-ва; $\alpha A + \beta B = \{\alpha f + \beta g,\ f \in A, g \in B\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. $F \in D(a,b)$; $A = \{F \in D(a,b) / \ldots\}$ какое-то мн-во
   $dA := \{dF, F \in A\}$

<u>Связь дифференцирования и интегрирования (неопределённого)</u>

1. $\exists f: (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет на (a,b) п/обр $F \in D(a,b)$. Тогда $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$
Следовательно, если $\exists \int f(x)\,dx$, то $\boxed{d \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\{F(x)+C\}} = \underbrace{f(x)\,dx}_{1\ эл-т}}$ ← р-во множеств $x \in (a,b)$

2. $\exists F \in D(a,b)$. Тогда F' имеет на (a,b) п/обр-ю $F \Rightarrow \boxed{\int dF(x) := \int F'(x)\,dx = F(x) + C, x \in (a,b)}$
(р-во мн-в)

2.3 Основные св-ва неопределенного интеграла

Т1 (линейность интегрирования)

$\exists\ f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\exists \int f(x)dx$, $\exists \int g(x)dx$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx =$
$= \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$ $\quad x \in (a,b)$ $\quad (1)$

▶ $\exists\ F$ - п/обр f на (a,b), G - п/обр g на (a,b); Положим $H(x) := \alpha F(x) + \beta G(x)$, $x \in (a,b)$
Имеем: $H'(x) = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) =: h(x)$, $x \in (a,b)$

$\Rightarrow h$ имеет на (a,b) первообразную $H(x) \Rightarrow \exists \int h(x)\,dx = H(x) + C = (\alpha F(x) + C) + \beta G(x) \in$
$\in$ пр.ч. (1), лев.ч. (1)

Наконец, $H_1 \in$ пр.ч. (1) $\Rightarrow H_1 = \underbrace{\alpha(F(x) + C_1)}_{\text{для неё } C_1} + \underbrace{\beta(G(x) + C_2)}_{\text{для неё } C_2} = \underbrace{\alpha F + \beta G}_{H} + \underbrace{(C_1 + C_2)}_{=:C} =$

$= H + C \in$ лев.ч. (1)

$\Rightarrow$ мн-ва совпадают ◀

Т2 интегрирование по частям

$u, v \in \mathcal{D}(a,b)$ $\exists \int u'(x)v(x)\,dx$. Тогда $\exists \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$, $x \in (a,b)$ $\quad (2)$

▶ $\exists\ F$ - первообр $u'(x)v(x)$. Имеем: $\underbrace{(u(x)v(x))'}_{\text{есть перв}} = \underbrace{u'(x)v(x)}_{\text{есть перв}} + u(x)\cdot v'(x)$

$\Rightarrow \exists \int u(x)v'(x)\,dx$ (разность ф-ций)

$\int u(x)v'(x)\,dx \overset{T1}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$ ◀

16.02.18

Замеч. $\exists \int u(x)v'(x)\,dx =: \int u(x)\,dv(x)$
обозначение, не дифф

Тогда (2) переписывается в виде $\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x)$

Пр-р: $\int \ln x\,dx = \int \ln x\,(x)'\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$
$x > 0$

Напом-е (дифф-ие композиции)
$\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\alpha,\beta)$, $F \in \mathcal{D}(a,b)$
$\Rightarrow F \circ \varphi \in \mathcal{D}(\alpha,\beta)$, причём $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in (\alpha,\beta)$

Т3 (о замене переменной) $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$; $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
$\varphi \in \mathcal{D}(\alpha,\beta)$, $\exists \int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x \in (a,b)$ $\quad (3)$
(не дифф, а просто значок)

$\Rightarrow \exists \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$, $t \in (\alpha,\beta)$ $\quad (4)$

▶ Дифф. правую часть (4)

$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \overset{\text{см (3)}}{=} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \Rightarrow (4)$ верно ◀

Зам: Выполнены усл Т3. Тогда (4) переписывается в виде (в смысле обознач)

$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$, $t \in (\alpha,\beta)$

Пр-р: $f(y) = e^y$, $y \in \mathbb{R}$; $\varphi(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$

$\int e^y\,dy = e^y + C \overset{T3}{\Rightarrow} \int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(x^2)'\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

~~Или: $\int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}$~~

Т4 (замена переменной/подстановка) $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$
из Т о дифф обр функ
$\varphi \uparrow\uparrow (\downarrow\downarrow)$ на $[\alpha,\beta]$; $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (если $\downarrow\downarrow$ то (b,a)) $(\varphi(\alpha) = b,\ \varphi(\beta) = a)$

$\varphi \in C[\alpha,\beta] \cap \mathcal{D}(\alpha,\beta)$ ($\exists$ обр)

$\exists \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(t)+C,\ t\in(\alpha,\beta)$ (5)

$\Rightarrow \exists \int f(x)\,dx = F(\varphi^{-1}(x))+C$ (6) $x\in(a,b)$

▶ Дифф. в (6) правую часть

производная обратной функ

$$[F(\varphi^{-1}(x))]' = F'(\underbrace{\varphi^{-1}(x)}_{t})\cdot\frac{1}{\varphi'(\underbrace{\varphi^{-1}(x)}_{t})} \overset{\text{см. 5}}{=} f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\cdot\frac{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{x \text{ (по опред обр функц)}}) =$$

$F'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$

$\sin' x = \cos x$, $(\arcsin x)'_x$, $\cos(\arcsin x)$, $\sqrt{1-x^2}$

$= f(x),\ x\in(a,b)$ ◀

ПР-Р. $I := \int\sqrt{1-x^2}\,dx,\ |x|<1$

Положим, $\varphi(t) = \sin t,\ t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ $\uparrow\uparrow$ $t = \arcsin x$ $x\in(-1,1)$

$\varphi'(t) = \cos t,\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$\varphi\uparrow\uparrow$ $\cos t > 0$

$$\int\sqrt{1-\varphi^2(t)}\,\varphi'(t)\,dt = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + C =$$
$$= \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t) + C$$

$F(t)+C$

$$\overset{\text{т4}}{\Rightarrow} \exists\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C,\ x\in(-1,1)$$

$x\in(-1,1)$

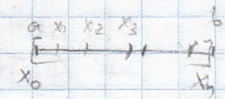
δ2

Глава 2. Определённый интеграл

§1 Определение интеграла Римана

1.1 Опред. интеграла. Интегрируемость.

С...: Пусть дан отрезок $[a,b]$



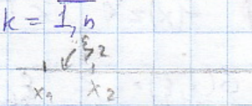
ОПР1. • Разбиением P отрезка $[a,b]$ называем мн-во (упоряд) точек $\{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

• Диаметром разбиения P $d(P)$ назыв. число $\max(x_k - x_{k-1}),\ k=\overline{1,n}$

• Отрезки $[x_{k-1}, x_k],\ k=\overline{1,n}$ назыв. частичными отрезками разбиения P.

ОПР2] дано р-ие P. Фиксируем произвольно $\xi_k\in[x_{k-1},x_k],\ k=\overline{1,n}$

Разбиение P вместе с „меткой" $\xi = (\xi_1,\ldots\xi_n)$ назыв. размеченным разбиением и обозн (P,ξ)



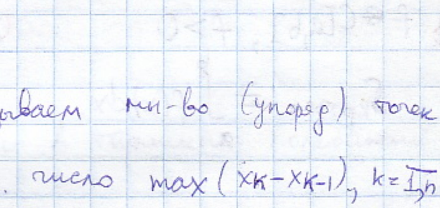
ОПР3] задана ф-ия $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и фиксировано размеченное разбиение (P,ξ) отрезка $[a,b]$. Тогда число

$$\boxed{\sigma(f;P,\xi)} = \sigma(P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\overbrace{(x_k - x_{k-1})}^{=:\Delta x_k} =$$

(иногда если f неважно)

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется интегральной суммой (Римана) f относит. р-ия (P,ξ)



ПР-Р: $f\in C[a,b]$, $f\geq 0$ на $[a,b]$

Рассм р-ие $P = \{x_0,\ldots x_n\}$, $\xi_k = x_k,\ k=\overline{1,n}$

$\sigma(P,\xi)$ – сумма площадей соотв. прямоуг.

ОПР4. Число $I\in\mathbb{R}$ назыв пределом интегр-ых сумм $\sigma(P,\xi)$ при $d(P)\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 /$
$|\sigma(P,\xi) - I| < \varepsilon\ \forall(P,\xi)$ с $d(P)<\delta$.

Пусть $\mathcal{B}$ — мн-во всех размеченных разбиений фикс. отрезка $[a,b]$ (P,ξ) на мн-ве $\mathcal{B}$ рассмотрим базу, эл-ты γ есть мн-во $\boxed{B}_\delta := \{(P,\xi) \in \ d(P) < \delta\}, 0<\delta\leq b-a$

Определ. корректно: $B_\delta \neq \varnothing \ \forall \delta \in (0, b-a]$ взять $\xi_1 = a, \xi_2 = b$ (база $\mathcal{B}$)

$\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, b-a) \ \exists B_{\delta_3} \subset B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2}$

Тогда ОПР4 м.б. переписано в виде:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B_\delta \in \mathcal{B} / \ |\sigma(P,\xi) - I| < \varepsilon \ \forall (P,\xi) \in B_\delta$

$\Rightarrow I = \lim\limits_{\mathcal{B}} \sigma(P,\xi)$ по базе $\mathcal{B}$. Поэтому обозн. $d(P) \to 0$ — база $\mathcal{B}$.

обозн. базу $\mathcal{B}$ символом $d(P) \to 0$

$\Rightarrow$ для пред по базе доказаны линейность, критерий Коши и пр — см т. пределов

ОПР 5. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда f интегрируема (по Риману) на $[a,b]$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) =: I \in \mathbb{R}$

В этом случае число I называется определённым инт-ом Римана функ f на $[a,b]$ и обознач. $I =: \int\limits_a^b f(x)\,dx$. $\int\limits_a^b f(t)\,dt$

Обознач: $R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f$ — интегр по Риману на $[a,b]\}$

20.02.18 Т1. (критерий Коши интегрируемости f на $[a,b]$) ($\exists$ интеграла)

Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \ |\sigma(P', \xi') - \sigma(P'', \xi'')| < \varepsilon$

$\forall (P', \xi'), (P'', \xi'')$ с усл: $d(P') < \delta, \ d(P'') < \delta$ $(\in B_\delta)$

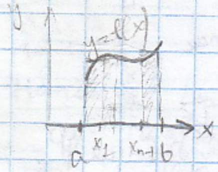
▶ Кр. Коши $\exists$ предела функц по базе ◀

Т2 (линейность) $f, g \in R[a,b] \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R[a,b] \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

▶ Составить интегр Σ ◀

$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists B_{\delta_1} > 0 / \ |\sigma(f, P_1, \xi_1) - I_1| < \varepsilon_1 \ \forall (P_1, \xi_1) \in B_{\delta_1}$ ... $\varepsilon/2\alpha$ ... B_{δ_2} ... $\exists B_\delta \in B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2}$ / ... $\alpha\sigma_f - \alpha I_1| + |\beta\sigma_g - \beta I_2| < \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 = \varepsilon \Rightarrow \exists \lim$

ПР-РЫ 1) $f \in C[a,b], \ f > 0$



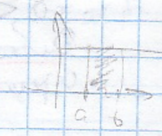
$S_{\text{кр трап}} := \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2) $f \equiv const = c \quad \forall x \in [a,b]$

$\sigma(P,\xi) = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^n c \cdot \Delta x_k =$

$= c \sum\limits_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a)$

$\int\limits_a^b c\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) = c(b-a)$



3) $f(x) = x, \ x \in [a,b]$

$\sigma(P,\xi) = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k \Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^n \frac{x_{k-1} + x_k}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n (x_k^2 - x_{k-1}^2) + A = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + A$

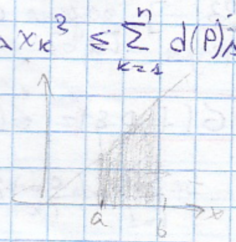
$+ \sum\limits_{k=1}^n \left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)\Delta x_k = A$

$|A| \leq \left|\sum\limits_{k=1}^n \left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)\Delta x_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^n \left|\left(\xi_k - \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)\right| \Delta x_k \leq \sum\limits_{k=1}^n \Delta x_k^2 \leq \sum\limits_{k=1}^n d(P)\Delta x_k =$

$|\Sigma| \leq \Sigma| \ |$ $\quad \leq \Delta x_k$

$= d(P) \sum\limits_{k=1}^n \Delta x_k = d(P)(b-a) \to 0$ при $d(P) \to 0$

$\Rightarrow \int\limits_a^b x\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) = \frac{b^2 - a^2}{2}$



4) Ф-ция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \overline{\mathbb{Q}} \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$

Д-жем: $f \notin R[a,b] \quad \forall [a,b]$

$\exists \varepsilon > 0 / \ \forall \delta > 0 \quad |\sigma(P', \xi') - \sigma(P'', \xi'')| \geq \varepsilon$, для $\exists (P', \xi'), (P'', \xi'') \in B_\delta$

P — произв. разбиение, $d(P) < \delta$; $\xi^{(1)} = \{\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}\}$, $\xi_k^{(1)} \in \mathbb{Q}$, $\xi^{(2)} = \{\xi_1^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}\}$, $\xi_k^{(2)} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$|\sigma(P,\xi^{(1)})-\sigma(P,\xi^{(2)})| = |\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} 0\,\Delta x_k| = b-a \geq \varepsilon := \frac{b-a}{2}>0$

Итак, $\exists\, \varepsilon=\frac{b-a}{2}>0 \;/\; \forall \delta>0 \;\; \exists\, \underbrace{(P,\xi^{(1)})\;(P,\xi^{(2)})}_{d(P)<\delta} \;/\; |\sigma(P\xi^{(1)})-\sigma(P\xi^{(2)})|\geq\varepsilon$

$\Rightarrow$ По критерию Коши $f\notin R[a,b]$ ▲

1.2 Необходимое условие интегрируемости функции.

Обозн: $B[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f$ огр на $[a,b]\}$ $\exists M>0 \,/\, |f(x)|\leq M \;\; \forall x\in[a,b]$

bounded

Т (необх. усл. интегр.) $f\in R[a,b]\Rightarrow f\in B[a,b]$

▶ $\boxed{\text{П}}$: $f\in R[a,b]$ $f\notin B[a,b]$

$\exists \int_a^b f(x)dx = I$. По опред интеграла для $\varepsilon=1$ $\exists\,\delta>0 \,/\, |\sigma(P,\xi)-I|<1$ $\forall (P,\xi)$ с $d(P)<\delta$.

Фиксируем произв. разбиение $P^{(0)}=\{a=x_0^{(0)}<x_1^{(0)}<\dots<x_n^{(0)}=b\}$, $d(P^{(0)})<\delta$

$|\sigma(P^{(0)},\xi)| \leq \overbrace{|\sigma(P^{(0)},\xi)-I|+|I|}^{-I+I} < |I|+1$

$f\notin B[a,b] \Rightarrow \exists\, k_0=\overline{1,n} \,/\, f$ неогр на $[x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}]$ (иначе разогр на отр. $\Rightarrow$ на $\cup$ огр)

Рассмотрим метку $\xi(\tau)=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{k_0-1}^0, \tau, x_{k_0+1}^0, \dots x_n^0)$; $\sigma(P^{(0)},\xi(\tau)) = \underbrace{\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{=\sigma^*} + f(\tau)\Delta x_{k_0}$

$=\sigma^*+f(\tau)\Delta x_{k_0}$

f не огр на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}] \Rightarrow \exists\,\tau_0\in[x_{k_0-1},x_{k_0}] \,/\, |f(\tau_0)| > \frac{1+|I|+|\sigma^*|}{\Delta x_{k_0}}$

Тогда $|\sigma(P^{(0)},\xi(\tau_0))| \geq |\sigma^*+1+|I|+|\sigma^*|| \geq 1+|I|$ $\boxed{\text{P}}$ $|a-b|\geq|a|-|b|$

$|\sigma^*+f(\tau_0)\Delta x_n| \geq |f(\tau_0)|\Delta x_n - |\sigma^*|$ нер-во Δ ▲

Замечание: $\not\Leftarrow^{\text{б.г.}}$ пр-р: Дирихле

$f\in B[a,b] \underset{\text{б.г.}}{\not\Rightarrow} f\in R[a,b]$

б3

1.3 Достаточное условие интегрир функции в терминах колебаний функции на частичных отрезках.

ОПР1 Разбиение $\tilde{P}$ назыв измельчением разбиения P, если $\tilde{P}\supset P$ (+new points)

Замеч ① $P=\{x_k, k=\overline{0,n}\} \Rightarrow \tilde{P}=\{x_{kl}, k=\overline{0,n}; l=\overline{0,m_k}\}$

② $P=P^{(1)}\cup P^{(2)}$ – измельчение разб как $P^{(1)}$, так и $P^{(2)}$.

ОПР2 $\exists\, f\in B[a,b]$ Колебанием функции f на $[a,b]$ назыв $\omega(f,[a,b])=\sup\limits_{x',x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')|$

$\sup\limits_A f := \sup\{f(x), x\in A\}$

Замеч: ① Если $f\in B[a,b]$, т.е. $\exists\, M>0 \,/\, |f(x)|<M \;\; \forall x\in[a,b]$, то

$0\leq\omega(f,[a,b])\leq 2M$ $|f(x')-f(x'')|\leq|f(x')|+|f(x'')|\leq 2M$

② Если $f\in B[a,b] \Rightarrow \omega(f,[a,b]) = \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$. (могут не достигаться)

▶ $\exists$ $M=\sup\limits_{[a,b]} f$, $m=\inf\limits_{[a,b]} f$

① Покажем, что $\omega(f,[a,b])\leq M-m$ (sup), т.к. $\forall x', x''$

$-(M-m)=m-M \leq f(x')-f(x'')\leq M-m$ $\forall x', x''\in[a,b] \Rightarrow |f(x')-f(x'')|\leq M-m$

② $\omega(f,[a,b])\geq M-m$ $m\leq$ $\leq M$ $m\leq$ $\leq M$

$\exists\, x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\in[a,b] \,/\, f(x_n^{(1)})\to M$, $f(x_n^{(2)})\to m$ при $n\to\infty$

$\exists\, x \,/\, f(x)>M-\varepsilon$ $\varepsilon=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ по об-ву sup, inf

$\omega(f,[a,b]) = \sup\limits_{x',x''\in[a,b]}|f(x')-f(x'')| \underset{\text{как sup}}{\geq} |f(x_n^1)-f(x_n^2)|$ $\forall n$

Перейдём к пределу при $n\to\infty$
$w(f,[a,b]) \geq M-m$. ◀

$\exists\ \mathcal{B}^* = \{B^*_\delta, 0\delta \leq b-a\}$, $B^*_\delta = \{P$ отр $[a,b] \mid d(P)<\delta\}$ (без метки)

омега большое
$\Omega(P) = \Omega(f,P) = \sum_{k=1}^{n} w(f,[x_{k-1},x_k])\,\Delta x_k$ длина >0, не обозн. т.к. $\Omega(P)=\sum$ неотр величин

ОПР 3 $\boxed{\lim_{d(P)\to 0}\Omega(P)=0} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, |\Omega(P)|<\varepsilon\ \forall P\in B^*_\delta$ $\left(\lim_{d(P)\to0}\Omega(P) = \lim_{B^*}\Omega(P)\right)$

Лемма (критерий интегр.) (достаточность) $\exists\ f\in B[a,b]$, $\lim_{d(P)\to0}\Omega(P)=0 \Rightarrow f\in R[a,b]$

27.02.18
▶ Д-во по Кр. Коши $f\in R[a,b]$

(1) $\exists\ P$ – разб. $[a,b]$, $\tilde{P}$ – его измельчение $\Rightarrow |\sigma(P,\xi)-\sigma(\tilde{P},\tilde{\xi})| \leq \Omega(P)$ (*) не важно

В с.д. имеем: $|\sigma(\tilde{P},\tilde{\xi}) - \sigma(P,\xi)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k} f(\xi_{kl})(x_{kl}-x_{kl-1}) - \right.$
$\left.-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[x_k-x_{k-1}]\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}\underbrace{[f(\xi_{kl})-f(\xi_k)]}_{\leq w(f,\Delta x_k)}\cdot[x_{kl}-x_{kl-1}]\right| \leq$

$\sum_{l=1}^{m_k} f(\xi_k)[x_{kl}-x_{kl-1}] = f(\xi_k)\underbrace{\sum_{l=1}^{m_k}(x_{kl}-x_{kl-1})}_{x_k-x_{k-1}}$

$\leq \sum_{k=1}^{n} w(f,\Delta x_k)\cdot\sum_{l=1}^{m_k}|\Delta x_{kl}| = \sum_{1}^{n} w(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| = \Omega(P)$.
длина отр Δx_{kl}

(2) Д-жем 1 по Кр. Коши интегр. по Риману.

$\exists\ \varepsilon>0$ прно. Т.к. $\Omega(P)\to0$, то $\exists\delta>0 \,/\, 0\leq\Omega(P)<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall P\in B^*_\delta$, т.е. $d(P)<\delta$

Рассм прно разбиение (P',ξ') и (P'',ξ'') с диам. $P<\delta$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cap B_\delta \qquad \cap B_\delta$

Имеем $|\sigma(P',\xi')-\sigma(P'',\xi'')| \leq |\sigma(P',\xi')-\sigma(\tilde{P},\tilde{\xi})| + |\sigma(\tilde{P},\tilde{\xi})-\sigma(P'',\xi'')|$, где
$\tilde{P} := P'\cup P''$ – измельчение P' и P'' $\Rightarrow |\sigma(P',\xi')-\sigma(P'',\xi'')| \leq \Omega(P')+\Omega(P'')<\varepsilon$
$\qquad\qquad \wedge \frac{\varepsilon}{2}$ ◀

1.4 Классы интегрируемых функций

Т1 $f\in C[a,b] \Rightarrow f\in R[a,b]$

▶ $f\in C[a,b] \Rightarrow f$ равном. непр на $[a,b] \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \,/\, |f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
огранич. $\forall x',x''\in[a,b]$ с усл $|x'-x''|<\delta$
$\Rightarrow w(f,[x_{k-1},x_k]) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, если $\Delta x_k<\delta$

Поэтому для $P\in B^*_\delta$ $\quad 0\leq\Omega(P) = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{w(f,[x_{k-1},x_k])}_{<\frac{\varepsilon}{b-a}}\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon$
$\Rightarrow \Omega(P)\xrightarrow{d(P)\to0}0 \overset{\text{Лемма}}{\Rightarrow} f\in R[a,b]$ ◀

Т2 $f\in B[a,b]$, $f\in C([a,b]\setminus\{x_1,\dots,x_m\}) \Rightarrow f\in R[a,b]$
сл. из 1

▶ Усл. $f\in B[a,b] \Rightarrow \exists\ C>0 \,/\, |f(x)|\leq C\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow w(f,M)\leq 2C$, $\forall M\subset[a,b]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (C-(-C))$

$\exists\ \delta_0 = \frac{1}{2}\min_{i,j=\overline{1,m}}|x_i-x_j|\quad \exists\ \varepsilon>0$ пр-но, $\exists\ \delta_1 := \min\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{16Cm}\}$

Рассм мн-во $A := \bigcup_{j=1}^{s} O_{\delta_1}(x_j)$ и мн-во $[a,b]\setminus A = A^*$.

Заметим, что $A^* = \bigcup_{l=1}^{s}\Delta l\quad s=s(m)$
отрезки $\subset[a,b]$

$\Rightarrow \forall \ell$ f - равном. непр на Δ_ℓ. $\Rightarrow f$ - равн. непр на A^*

$\Rightarrow \exists \delta_2 > 0 / \; |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall x', x'' \in A^*$ с усл $|x' - x''| < \delta_2$

Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Рассмотрим р-ие $P \in B^*_\delta$ (без метки)

Имеем $0 \le \Omega(P) = \sum_{k=1}^{n} w(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k = \sum_{[x_{k-1}, x_k] \cap A = \varnothing} w(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k +$

$+ \sum_{[x_{k-1}, x_k] \cap A \ne \varnothing} w(f)[x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k =: \Sigma' + \Sigma''$

Оценим отд-но Σ' и Σ''.

- Σ' т.к. $[x_{k-1}, x_k] \subset A^*$ и $\Delta x_k < \delta$, то $w(f) x_{k-1}, x_k) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (f - равн непр на A^*)

  <- есть доряки

  $\Rightarrow 0 \le \Sigma' \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \underbrace{\Sigma \Delta x_k}_{\le b-a} \le \frac{\varepsilon}{2}$

- Σ'' Имеем: $0 \le \Sigma'' < 2C \sum_{[x_{k-1}, x_k] \cap A \ne \varnothing}^{m} \Delta x_k, \; [x_{k-1}, x_k] \cap A \ne \varnothing \le 8Cm\delta_1 < 8Cm \frac{\varepsilon}{18Cm} = \frac{\varepsilon}{2}$

  $[x_{k-1}, x_k] \cap A \ne \varnothing \le 4m\delta_1$ (вокр пересеч). $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ δ - d разб. (1)

  штук

  $2\delta_1$

В итоге $0 \le \Omega(P) \le \Sigma' + \Sigma'' < \varepsilon$ —

(T3) Об: $f \in M[a,b] \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \uparrow(\downarrow)$ на $[a,b]$

$f \in M[a,b] \Rightarrow f \in R[a,b]$

Не огр общности $(f \uparrow) \wedge (f(a) < f(b))$

если $f(a) = f(b)$, то $f \equiv const$

$\exists \varepsilon > 0$ пр-но $\delta := \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. Заметим, что $w(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \overset{(f\uparrow)}{=}$

$= f(x_k) - f(x_{k-1})$

Имеем: $\forall P \in B^*_\delta$ $0 \le \Omega(P) = \sum_{k=1}^{n} w(f[x_{k-1}, x_k]) \underbrace{\Delta x_k}_{\le \delta} \le \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^{n} w(\_) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_1) -$

$- f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon$

Б4

15. Критерий интегрируемости по Лебегу.

Обозн: $\exists \Sigma$ инт-в (отр-в) $I_k, k \ge 1$ - и Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |I_k|$ (если $\exists \lim$)

Опр. $\exists A \subset [a,b]$ (огранич) Тогда A имеет Лебегову меру нуль (обозн: $\mu(A) = 0$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \{$инт-ов $\{I_k\} /$
- $\{I_k\}$ не б. чем счётно
- $A \subset \bigcup I_k$
- $\Sigma |I_k| < \varepsilon$

Замеч: (1) Вопр рассм $\bigcup_{k=1}^{m(\varepsilon)} I_k$ и $\sum_{k=1}^{m(\varepsilon)} I_k$, если сост $\{$ конечна

если $\{I_k\}$ счётна, то пишем $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} I_k$

(2) Можно рассматр $\{$ не инт, а отрезков

Пр-ры. (1) $A = \{x_1 \ldots x_m\} \Rightarrow \mu(A) = 0$

$\exists \varepsilon > 0$ пр-но. Рассм интерв $I_k := \{x_k - \frac{\varepsilon}{3m}, x_k + \frac{\varepsilon}{3m}\}, k = \overline{1, m}$

Тогда $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$. $\sum\limits_{k=1}^{m} |I_k| = m \cdot \frac{2\varepsilon}{3m} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$ ◀

② $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ – счётное мн-во $\Rightarrow \mu(A) = 0$

▶ $\exists\, \varepsilon > 0$ – прно. Рассм $I_k = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right)$. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{4}\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{=2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ◀

$q = \frac{1}{2}$ $\quad 1 \cdot \frac{1 - q^{\infty}}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Замечание. A – несчётно $\not\Rightarrow \mu(A) \neq 0$
пр-р: Канторово мн-во. Зорич, гл VI, §1, зад. 2

Предв. зам. $\exists\, f\uparrow$ на $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $f \notin C(x_0) \Rightarrow \exists\, f(x_0 - 0) = \sup\limits_{a<x<x_0} f(x)$;
$\exists\, f(x_0+0) = \inf\limits_{x_0<x<b} f(x)$

Имеем: если $x < x_0 \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$ (т.к. $f\uparrow$) $\Rightarrow f(x_0 - 0) \le f(x_0)$
$x > x_0 \Rightarrow f(x_0) \le f(x) \Rightarrow f(x_0) \le f(x_0+0)$ $\Big\} \Rightarrow f(x_0-0) \le f(x_0+0)$
$\Rightarrow$ т.к. $f \notin C(x_0)$, $f(x_0-0) < f(x_0+0)$

(Т1) $f \in M[a,b]$, $A := \{x \in [a,b] \,/\, f \notin C(x)\} \Rightarrow A$ не б., чем счётно

▶ Не огр. общности, $f\uparrow$ на $[a,b]$. Достаточно рассмотреть случай, когда $A - \infty$.
Достат. д-ть, что в этом случае мн-во $A^* := \{x \in (a,b) \,/\, f \notin C(x)\}$ счётно
Положим от-ие $F: x \in A^* \to (f(x-0), f(x+0))$ $\quad$ < по предв. замеч. $\quad \exists\, B := \{(f(x-0), f(x+0)), x \in A^*\}$
Имеем 1) $F: A^* \to B$ сюръективно.
2) F – инъективно, в с.д. $\exists\, x_1, x_2 \in A^*$, $x_1 < x_2 \Rightarrow (f(x_1-0), f(x_1+0)) \cap (f(x_2-0), f(x_2+0)) = \varnothing$
$\inf\limits_{(x_1, b)} \le \sup\limits_{(a, x_2)}$
$F: A^* \to B$ – биективно
Док-ем, что B – счётно. $\forall x \in A^*$ фикс. пр-но. $q(x) \in \mathbb{Q} \cap (f(x-0), f(x+0))$ $\quad \inf(x_1,x_2) \quad \sup(x_1,x_2)$
$\exists\, C := \{q(x) \in \mathbb{Q} \cap (\,), x \in A^*\}$, $B \sim C$
Но $C \in \mathbb{Q}$ – счётное $\Rightarrow C$ – не б. чем счётно, $\infty \Rightarrow$ счётно $\Rightarrow A$ – счётно ◀

Лемма $\exists\, [a,b] \subset \bigcup I_k$, I_k – интервал. Тогда $\sum |I_k| > b - a$
▶ По индукции.
① $[a,b] \subset (\alpha_1, \beta_1) \Rightarrow \beta_1 - \alpha_1 > b - a$
② $[a,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$. Предположим, $\sum\limits_{k=1}^{n} |I_k| > b - a$
③ $\exists\, [a,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} I_k$. Не огр. общности считаем, что $a \in (\alpha_1, \beta_1)$
• Тогда $\alpha_1 < a < \beta_1$. Если $\beta_1 \ge b$, то $\beta_1 - \alpha_1 \ge b - \alpha_1 > b - a \Rightarrow \sum\limits_{1}^{n} > b - a$
• $\beta_1 < b$. Тогда $[\beta_1, b] \subset \bigcup\limits_{k=2}^{n+1} I_k$.
По предпол. индукции $\sum\limits_{k=2}^{n+1} |I_k| > b - \beta_1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n+1} |I_k| > b - \beta_1 + \beta_1 - \alpha_1 =$
$= b - \alpha_1 > b - a$ ◀

(Т2) $\exists\, [a,b] \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mu[a,b] \neq 0$. ▶ См. лемму ◀

(Т3) (Критерий Лебега интегрируемости ф-ции)
$\exists\, f \in B[a,b]$ и $A := \{x \in [a,b] \,/\, f \notin C(x)\}$. Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \mu(A) = 0$
▶ ◀
Сл-ие п.4 Т1, Т2, Т3 (+).
Дирихле: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $A = [a,b]$, $\mu(A) \neq 0$ $\quad f \notin R[a,b]$

Пр-р. Ф-ция Римана: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\},\ x = \frac{m}{n} \text{ – несокр.} \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cup \{0\} \end{cases}$

Д-жем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (тогда она м.б. разрывна на $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow$ точек разрыва счётно)

▶] $a \in \mathbb{R}$ - пр-но,] $\varepsilon > 0$ - пр-но. Рассмотрим $[a-1, a+1] \cap (\mathbb{Q}\setminus\{0\})$

Тогда $N \in \mathbb{N}$ / $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$.

Имеем: $x = \frac{m}{n}$ - несокр. дробь, $n \neq 0$, $m \neq 0$?

• Пусть $n \geq N+1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$.

• Пусть $n \leq N \Rightarrow |x| = \frac{|m|}{n} \leq |a|+1 \Rightarrow |m| \leq N(|a|+1)$
$\frac{|m|}{n}$ где $f(x) \geq \varepsilon$ возможно

$\Rightarrow$ Мн-во $\{x \in [a-1, a+1] \cap (\mathbb{Q}\setminus\{0\}) \mid x = \frac{m}{n}, n \leq N\}$ - конечное
n, m - кон. число

$\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$

$\delta := \min|x_k - a|$; $\forall x \in \mathring{O}_\delta(a)$, $|f(x)| < \varepsilon$ (остаётся 1 случай, мн-во вне $O_\delta(a)$) ◀

$\Rightarrow$ функц. Римана $\in R$.

§5

1.6. Два критерия интегрируемости функц. на отрезке

Опр 1.] $f \in B[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ - разбиение $[a,b]$

$m_k := \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$, $M_k := \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$, $k = \overline{1,n}$

Тогда числа $s(f,P) = s(P) := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$, $S(f,P) = S(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ называются нижней и верхней суммами Дарбу соответств.

Опр 2.] $f \in B[a,b]$. Тогда • $\boxed{\lim\limits_{d(P)\to 0} s(P)} = I_s \in \mathbb{R} \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{B^*} s(P) = \boxed{I_s} \in \mathbb{R}$.

• $\boxed{\lim\limits_{d(P)\to 0} S(P)} = I_S \in \mathbb{R} \overset{def}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{B^*} S(P) = \boxed{I_S}$

06.03 **Зам-е.** Имеет место нер-во $\overline{s}(P) \leq \sigma(P,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \underline{S}(P)$, $\forall P, \forall(\xi)$ (1)

Т1 (Кр. Дарбу)] $f \in B[a,b]$. Тогда $\Big(f \in R[a,b] \Leftrightarrow \big(\exists\, I_{\underline{S}} := \lim\limits_{d(P)\to 0} \underline{S}(P)\big) \wedge \big(\exists\, I_{\overline{s}} := \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{s}(P)\big) \wedge \big(I_{\underline{S}} = I_{\overline{s}}\big)\Big)$ (*) Причём в этом случае $I_{\underline{S}} = I_{\overline{s}} = I := \int\limits_a^b f(x)\,dx$

▶ (1) $\Rightarrow$] $f \in R[a,b]$. Д-м, что $\exists\, I_{\underline{S}} = I$. (верхние)

] $\varepsilon > 0$. Имеем $\forall$ разб. P $\exists$ метка $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ / $f(\bar{\xi}_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (sup)

Тогда $M_k < f(\xi_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Rightarrow$ см (1) $\sigma(P,\bar{\xi}) \leq \underline{S}(P) < \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)\cdot\Delta x_k}_{\sigma(P,\bar{\xi})} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k}_{\varepsilon/2}$

$\Rightarrow 0 \leq \big[\underline{S}(P) - \sigma(P,\bar{\xi})\big] < \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

Но $\lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) = I \Rightarrow \exists\delta > 0$ / $|\sigma(P,\bar{\xi}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall P \in B^*_\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(P,\bar{\xi}) < I + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ см. (2). $I - \frac{\varepsilon}{2} < S(P) < I + \varepsilon$

В итоге $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ / $|S(P) - I| < \varepsilon$ $\forall P \in B^*_\delta$.

Аналогично док. что $\exists\, I_{\overline{s}} = I$.

(2) $\Leftarrow$] верно (*). Д-жем, что $f \in R[a,b]$. $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \underline{S}(P) = I_{\underline{S}} = I_{\overline{s}}$

] $\varepsilon > 0$ пр-но. $\exists\delta_1 > 0$ / $|\underline{S}(P) - I_{\underline{S}}| < \varepsilon$, $\forall P \in B^*_{\delta_1}$. $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \overline{s}(P) = I_{\underline{S}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\delta_2 > 0$ / $|\overline{s}(P) - I_{\underline{S}}| < \varepsilon$ $\forall P \in B^*_{\delta_2}$

Пусть теперь $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Тогда $\forall (P, \xi) \in B_\delta$ имеем (см 1):
$$I_S - \varepsilon < \overline{S}(P) \le \sigma(P,\xi) \le \underline{S}(P) < I_S + \varepsilon \Rightarrow |\sigma(P,\xi) - I_S| < \varepsilon \quad \forall (P,\xi) \in B_\delta$$
$$\Rightarrow \lim_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) = I_S = I_{\underline{S}}$$
◄

Т2 ~~(предельный критерий интегрир по Риману)~~ $\exists f \in B[a,b]$
Тогда $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \lim_{d(P)\to 0} \Omega(f,P) = 0$

► "$\Leftarrow$" – см 27.02.18 (1) – доказано (п 1.3) ~~изменчение кр Коши~~
"$\Rightarrow$" $\exists f \in R[a,b]_n$
Имеем: $0 \le \Omega(P) = \sum_{k=1} w(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k \overset{\text{см п 1.3}}{=} \sum_{k=1} (M_k - m_k)\Delta x_k = \underline{S}(P) - \overline{S}(P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0$ (по Т1) ◄

! **ЗАМ-я** ! (1) $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$ $\quad ||a|-|b|| \le |a-b|$
► Имеем: $||f(x')| - |f(x'')|| \le |f(x') - f(x'')|$
$\Rightarrow w(|f|, [\alpha,\beta]) \le w(f, [\alpha,\beta])$
$\Rightarrow 0 \le \Omega(|f|, P) = \sum_{k=1} \underbrace{w(|f|, [x_{k-1}, x_k])}_{\le w(f, [x_{k-1}, x_k])} \Delta x_k \le \Omega(f,P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0$, если $f \in R[a,b]$

$\Rightarrow \Omega(|f|, P) \to 0 \quad d(P) \to 0 \Rightarrow |f| \in R[a,b]$ ◄

(2) $|f| \in R[a,b] \overset{\text{вообщ}}{\not\Rightarrow} f \in R[a,b]$
Например: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ (или Дир $-\frac{1}{2}$) ~~верхн и нижн Σ Дарбу~~

(3) $f \in R[a,b]$, $g \neq f$ на $[a,b] \setminus \{x_1^*, \dots x_m^*\}$.
$(g \in B[a,b]) \Rightarrow g \in R[a,b]$, причём $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

► (1) D-ем, что $g \in R[a,b]$
$\exists M := \max\{\sup_{[a,b]} |f|, |g(x_i^*)|, i = \overline{1,m}\}$

Тогда $|g| \le M$ на $[a,b] \Rightarrow w(g; [x_{k-1}, x_k]) \le 2M$

$g - f = 0$ почти всюду $\Rightarrow \int_a^b (g-f)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b g dx = \int_a^b f dx$

f-огранич

множество

Имеем: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 / \ 0 \le \Omega(f;P) < \varepsilon/2 \ \forall P \in B^*_{\delta_1}$
(т.к. $f \in R[a,b]$ – см Т2)
$\exists \delta_2 := \frac{\varepsilon}{8mM}$, $\exists \delta := \min(\delta_1, \delta_2)$
$\exists A := \{x_1^*, \dots x_m^*\}$
Тогда $0 \le \Omega(g,P) = \left(\sum_{[x_{k-1},x_k]\cap A = \varnothing} + \sum_{[x_{k-1},x_k]\cap A \neq \varnothing}\right) w(g,P)\Delta x_k =: \Sigma' + \Sigma''$

- Оценим Σ':
$0 \le \Sigma' = \sum_{[\,]\cap A = \varnothing} w(\overset{g}{f}, [\,])\Delta x_k \le \sum_{k=1}^n w(f, [\,])\Delta x_k = \Omega(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall P \in B^*_\delta$
- Σ'':
$0 \le \Sigma'' \le 2M(2m\delta) \le \frac{4Mm \cdot \varepsilon}{8Mm} = \frac{\varepsilon}{2}$

(2) D-ем, что $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$
п. 1 $\Rightarrow \lim_{d(P)\to 0} \sigma(g, P, \xi, \xi_k \notin A) = \int_a^b g(x)dx$
$\lim_{d(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi_{\xi \notin A}) = \int_a^b f(x)dx$ ◄

Зам-ие $f \in R[a,b]$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g = f$ на $[a,b] \setminus A$, где $\mu(A) = 0$, $g \in B[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow g \in R[a,b]$ (крит. Лебега)

$$\S 2.$ Св-ва интеграла Римана

2.1 Линейность интеграла. Интегрируемость произведения и частного.

Т1. (Линейность). $f, g \in R[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in R[a,b]$; причём $\int_a^b h\,dx = \alpha\int_a^b f dx + \beta\int_a^b g dx$

▶ — ◀ Интегр Σ и переход к пределам

$\sigma(f, P, \xi)$ $\sigma(g, P, \xi)$

Л1. Если $f \in R[a,b] \Rightarrow f^2 \in R[a,b]$

▶ Через Ω $f \in R[a,b] \Rightarrow f \in B[a,b]$. $]\ M := \sup_{[a,b]} f$. Имеем

$0 \le \Omega(f^2; P) = \sum^n w(f^2; [x_{k-1}, x_k])\,\Delta x_k$

Заметим, что $|f^2(x') - f^2(x'')| = |(f(x') - f(x''))| \underbrace{|f(x') + f(x'')|}_{\le 2M} \le 2M\, w(f; [x_{k-1}, x_k])$

$\Rightarrow 0 \le \Omega(f^2, P) \le 2M\, \Omega(f, P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0$

т.о. 2х милиц.: $\Omega(f^2, P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0$ ◀

Сл-ие: Т2. ($\int$-ть произв)

$f, g \in R[a,b] \Rightarrow fg \in R[a,b]$

▶ Имеем: $(f+g)^2$ и $(f-g)^2 \in R[a,b]$ по Т1, Л1

$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in R[a,b]$ по Т1. ◀

13.03.18

Л2 $f \in R[a,b]$, $|f(x)| \ge m > 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \frac{1}{f} \in R[a,b]$

▶ Имеем: $\left|\frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')}\right| = \frac{|f(x'') - f(x')|}{|f(x')\cdot f(x'')|} \le \frac{w(f; [\alpha,\beta])}{m^2}$ $\forall x', x'' \in [\alpha, \beta]$

$\Rightarrow 0 \le \Omega\left(\frac{1}{f}; P\right) \le \sum_{k=1}^n w\left(\frac{1}{f}; [x_{k-1}, x_k]\right)\cdot \Delta x_k \le \frac{1}{m^2} \underbrace{\sum_{k=1}^n w(f; [x_{k-1}, x_k])\,\Delta x_k}_{\Omega(f; P)} =$

$= \frac{1}{m^2}\Omega(f; P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0$ (т.к. $f \in R[a,b]$) $\Rightarrow \Omega\left(\frac{1}{f}, P\right) \to 0$, $d(P) \to 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in R[a,b]$ ◀

Т3. $f, g \in R[a,b]$, $|g(x)| \ge m > 0$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \frac{f}{g} \in R[a,b]$

▶ следует из Т2 и Л2 ◀

2.2 Интегрируемость по подотрезкам

Обозн: $\cdot\ P_{[a,b]}$ — р-ие отр-ка $[a,b]$

$\cdot\ (P_{[a,b]}, \xi)$ — размеченное разбиение отрезка $[a,b]$

$\cdot\ B_{\delta, [a,b]} := \{(P_{[a,b]}, \xi) / d(P_{[a,b]}) < \delta\}$

$\cdot\ B^*_{\delta, [a,b]} := \{P_{[a,b]} / d(P_{[a,b]}) < \delta\}$

Т1. $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall [\alpha, \beta] \subset [a,b]$, $f \in R[\alpha, \beta]$

▶ $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \Omega(f; \tilde{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$ $\forall \tilde{P}_{[a,b]} \in B^*_{\delta, [a,b]}$ (ничего не значит)

$]\ P_{[\alpha,\beta]}$ — пр-ое р-ие $[\alpha, \beta] / P_{[\alpha, \beta]} \in B_{\delta, [\alpha,\beta]}$ (здесь берём δ)

К разбиению $P_{[\alpha,\beta]}$ добавим доп точки $x_\ell \in [a,b] \setminus [\alpha, \beta]$,

$\ell = \overline{1, m} / \tilde{P}_{[a,b]} \in B^*_{\delta, [a,b]}$ (новое, расширенное)

Тогда $0 \le \Omega(f; P_{[\alpha,\beta]}) = \sum_{k=1}^n w(f; [x_{k-1}, x_k])\,\Delta x_k \le \sum_{\substack{k=1 \\ [x_{k-1}, x_k] \subset [\alpha,\beta]}}^{n} w(f, [x_{k-1}, x_k])\,\Delta x_k + \sum_{\substack{\ell=1 \\ x_\ell \subset [a,b] \setminus [\alpha,\beta]}}^{m} w(f; [x_{\ell-1}, x_\ell]) \times$

$\times \Delta x_\ell = \Omega(f, \tilde{P}_{\delta[a,b]}) < \varepsilon$ ◀

Т2. $a < b < c$, $f: [a,c] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in R[a,c] \Leftrightarrow (f \in R[a,b]) \wedge (f \in R[b,c])$

Причём $\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$ (1)

▶ (1) $\Rightarrow$ $]\ f \in R[a,c] \Rightarrow$ а) см Т1 $(f \in R[a,b]) \wedge (f \in R[b,c])$

б) Д-жем (1) По п. а) $\exists$ лев ч. (1) и $\exists$ пр. ч. (1)

Интегр-мость р-на для $\forall$ разб-я $\Rightarrow$ можем взять отдельные разбиения

$\forall \varepsilon>0 \cdot \exists \delta_1>0 / \left|\sigma(f; P_{[a,b]}, \xi')-\int_a^b f\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall (P_{[a,b]}, \xi') \in B_{\delta_1,[a,b]}$

$\cdot \exists \delta_2>0 / \left|\sigma(f, P_{[b,c]}, \xi'')-\int_b^c f\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \forall (P_{[b,c]}, \xi'') \in B_{\delta_2,[b,c]}$

$\rceil$ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall (P_{[a,c]}, \xi) \in B_{\delta,[a,c]}$ с условием, что $\exists x_{k_0} \in P_{[a,c]}$ и $x_{k_0}=b$ (*)

Имеем: $|\sigma(f, P_{[a,c]}, \xi) - \text{пр. ч. (1)}| \leq \left|\sigma(f, P_{[a,b]}, \xi')-\int_a^b f\,dx\right| +$

$+\left|\sigma(f, P_{[b,c]}, \xi'')-\int_b^c f\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Итак, $\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall P_{[a,c]}$ с усл. (*), $P_{[a,c]} \in B^*_{\delta,[a,c]}$:

$|\sigma(f, P_{[a,c]}, \xi) - \text{пр. ч. (1)}|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{d(P_{[a,c]})\to 0 \\ P_{[a,c]} \text{ со } (*)}} \sigma(f, P_{[a,c]}, \xi) = \text{пр. ч. (1)}$, но этот же $\lim\limits_{\substack{d\to 0\\ P \text{ с усл. } (*)}}(\ ) = \text{лев. ч. (1)}$ частный случай, верно т.к. известно, что $\exists \int_a^c$

$\Rightarrow$ (1) р-но.

② $\Leftarrow$ $\rceil$ $f \in R[a,b]$, $f\in R[b,c] \Rightarrow \forall \varepsilon>0$ — огранич.; $\Omega \xrightarrow{d\to 0} 0$

крит. Римана

$\cdot \exists \delta_1>0 / \sum_{i=1}^{m} w(f;[x'_{i-1},x'_i])\Delta x'_i < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall P'_{[a,b]} \in B^*_{\delta_1,[a,b]}$

$\cdot \exists \delta_2>0 / \sum_{j=1}^{m} w(f,[x''_{j-1},x''_j])\Delta x''_j < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall P''_{[b,c]} \in B^*_{\delta_2,[b,c]}$

$\rceil$ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{12M})$ $\sup\limits_{[a,c]}|f|$

Рассмотрим пр-ое р-ие $P_{[a,c]} \in B^*_{\delta,[a,c]}$

а) Если $\exists k_0 / x_{k_0} \in P_{[a,c]}$, $x_{k_0}=b$, то $0 \leq \Omega(f; P_{[a,c]}) = \sum_{k=1}^{k_0} w(f,[x_{k-1},x_k])\Delta x_k +$

$+\sum_{k=k_0+1}^{n} w(f,[x_{k-1},x_k])\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$

б) Если $\exists k_0 \in \{1,..n\} / b\in (x_{k_0-1}, x_{k_0})$, то положим $0 \leq \Omega(f, P_{[a,c]}) = \left[\sum_{k=1}^{k_0-1} w(f,[\,])\Delta x_k\right.$

$\left.+ w(f,[x_{k_0-1},b])(b-x_{k_0-1})\right] + \left[\sum_{k=k_0+1}^{n} w(f[\,])\Delta x_k + w(f,[b,x_{k_0}])(x_{k_0}-b)\right] + A_3 =$

$=[\,]+[\,]+A_3 = A_1+A_2+A_3$, где $A_3 := w(f,[x_{k_0-1},x_{k_0}])\Delta x_{k_0} - w(f,[x_{k_0-1},b])(b-x_{k_0-1}) -$

$- w(f,[b,x_{k_0}])(x_{k_0}-b)$

$(x_{k_0}-x_{k_0-1})<\delta$

Имеем: $A_1+A_2 < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}$

$f\in R[a,b], f\in R[b,c] \Rightarrow f\in B[a,b] \cap B[b,c] \Rightarrow f\in B[a,c] \Rightarrow \exists M=\sup\limits_{[a,c]}|f|$

$|A_3| \leq 2M\cdot\delta + 2M\cdot\delta = 4M\delta \leq 4M\cdot\frac{\varepsilon}{12M} = \frac{\varepsilon}{3}$

$\leq |w_1|+|w_2|+|w_3|$ $2M(x_{k_0}-b)$ $2M(b-x_{k_0-1})$ $2M\delta$

$\Rightarrow A_1+A_2+A_3 < \varepsilon$

<u>Пр-р</u>: $f := \operatorname{sgn} x$, $\overset{T2}{\Rightarrow} \int_{-1}^{1} f\,dx = -\int_{-1}^{0} dx + \int_0^1 dx = (-x)\Big|_{-1}^{0} + x\Big|_0^1 = 1+(-1)=0$

<u>Опр-я</u>: 1) $\rceil f\in R[a,b] \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

2) $\rceil f: X\to\mathbb{R}, a\in X \Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx := 0$

T2' $f:[A,B]\to\mathbb{R}$, $f\in R[A,B]$, $a,b,c\in[A,B] \Rightarrow \int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$ (*)

$\rceil A \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq B$

x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
a	b	c	(1)	b	c	a
a	c	b	(2)	c	a	b
b	a	c		c	b	a

Достаточно рассмотреть (1) и (2) (переобозначая)

(1): верно по T2

(2): $a<c<b \overset{T2}{\Rightarrow} \int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^c f dx = \int_a^b f dx - \int_c^b f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx \Rightarrow (*)$ верна ◄

57 ## 2.3 Интегрирование и неравенства

(Л1). $f \in R[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$. Тогда $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ (1)

► Имеем:
$m(b-a) = m\sum_{k=1}^n \Delta x_k \le \sigma(P,\xi) \le M\sum_{k=1}^n \Delta x_k = M(b-a) \Rightarrow$ (1) верно ◄

Сл-ие $f \in R[a,b]$, $f \ge 0$ на $[a,b] \Rightarrow \overset{\text{переход к предел}}{\int_a^b f(x)dx} \ge 0$. ▲

Верно для $f > 0$: $\int_a^b f dx > 0$ – см Л2б

(Т1) $f, g \in R[a,b]$, $f \ge g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$ (1)

► усл: $f-g \ge 0$ на $[a,b] \Rightarrow$ Л1: $\int_a^b (f-g)dx \ge 0 \overset{\text{линейн.}}{\Rightarrow} \int_a^b f dx - \int_a^b g dx \ge 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (1) верно ◄

Сл-ие! $f \in R[a,b] \Rightarrow$ 1) $|f| \in R[a,b]$; (было д-но) $\overset{\text{кр-ия}}{}$ $||a|-|b|| \le |a-b|$.
! 2) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ (2).

► 1) было д-но
2) $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \Rightarrow$ Т1:
$\Rightarrow -\int_a^b |f| dx \le \int_a^b f dx \le \int_a^b |f(x)| dx \Leftrightarrow \left|\int_a^b f dx\right| \le \int_a^b |f| dx$ ◄

(Л2) $f \in R[a,b]$ $f(x) > 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$ (3)

► Л1 $\Rightarrow \int_a^b f dx \ge 0$ (*) Т. Кантора о вложе{ отрезков

[П]: (3) неверно $\overset{(*)}{\Rightarrow} \int_a^b f dx = 0$ (**)
Имеем: $f \in R[a,b]$, в т. кр. Дарбу – $\exists \lim_{d(P)\to 0} \overline{S}(f,P) = \lim_{d(P)\to 0} \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \overset{(**)}{=} 0$, (4)
где $M_k := \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$

• (4) $\Rightarrow$ для $\varepsilon = b-a$ $\exists \underbrace{P^{(1)}}_{(x_0^{(1)}=a, x_1^{(1)}, \dots x^{(n)})}$ (одно разбиение) от-ка $[a,b]$ / $\sum_{k=1}^n M_k^{(1)} \Delta x_k^{(1)} < \varepsilon = b-a$

Тогда $\exists k_1 / M_{k_1}^{(1)} < 1$, т.к. иначе $\forall k$ sup $M_k^{(1)} \ge 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n M_k^{(1)} \Delta x_k^{(1)} \ge b-a$.

Обозначим $[a_1, b_1] := [x_{k_1-1}, x_{k_1}]$.

• Заметим, что $\underbrace{\int_{a_1}^{b_1} f dx}_{\ge 0 (Л1)} = \underbrace{\int_a^b f dx}_{=0 (\text{Предп})} - \underbrace{\int_a^{a_1} f dx}_{\ge 0 (Л1)} - \underbrace{\int_{b_1}^b f dx}_{\ge 0 (Л1)} \le 0 \Rightarrow \int_{a_1}^{b_1} f dx = 0$

Аналогично $\exists [a_2; b_2] \subset [a_1, b_1]$ / $M^{(2)} := \sup_{[a_2, b_2]} f < \frac{1}{2}$ (для $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$)
...
С-ма отр-ков $[a_n, b_n]$ – вл-я { $(n \in \mathbb{N})$ со св-вом $M^{(n)} := \sup_{[a_n, b_n]} f < \frac{1}{n}$

Т. Кантора о вл. отр-ках: $\Rightarrow \exists c \in [a_n, b_n]$ $\forall n$
Тогда $c \in [a,b]$, и $f(c) \le M^{(n)} < \frac{1}{n}$ $\forall n$
переход к lim   lim не держит строгих нерв
Однако, по усл Л2 $0 < f(c) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow 0 < 0$ [Р]. ◄

(Т2) $f, g \in R[a,b]$, $f > g$ на $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f dx > \int_a^b g dx$. ► $h = f-g > 0 \Rightarrow \int_a^b h dx > 0$ ◄

Сл-ие (1) $f \in C[a,b]$ $f \ge 0$ на $[a,b]$ $\int_a^b f dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ на $[a,b]$

► Достат. д-ть, что $f \equiv 0$ на (a,b). (тогда в концах 0 по непрерывн.) окр-ть $\mathcal{U}_0$ (\[\])$_{\beta_0}$
[П]: $\exists x_0 \in (a,b)$ / $f(x_0) \ne 0$. Не огр. общн. $f(x_0) > 0$. Но $f \in C(x_0) \Rightarrow \exists [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ /
$f > 0$ на $[\alpha, \beta] \overset{Л2}{\Rightarrow} \int_\alpha^\beta f dx > 0 \Rightarrow 0 = \int_a^b f dx = \underbrace{\int_a^\alpha f dx}_{\ge 0 \text{ по Л1}} + \underbrace{\int_\alpha^\beta f dx}_{>0} + \underbrace{\int_\beta^b f dx}_{\ge 0 \text{ по Л1}} > 0$, т.е. $0 > 0$ [Р] ◄

Л2 $f\in C[a,b]$, $\forall [\alpha,\beta]\subset[a,b]$, $\int_\alpha^\beta f\,dx = 0 \Rightarrow f\equiv 0$ на $[a,b]$

▶ П $\exists x_0 / f(x_0)>0 \Rightarrow \exists[\alpha,\beta]\subset[a,b] / f(x)>0 \ \forall x\in[\alpha,\beta] \Rightarrow \int_\alpha^\beta f\,dx>0$ |P| ◀

2.4 Теоремы о среднем.

Т1 (первая т. о среднем). $f, g \in R[a,b]$, $g \geq (\leq) 0$ на $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \mu\in[m,M] / \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx$ (1), $m = \inf_{[a,b]} f$, $M=\sup_{[a,b]} f$

($\in R$ т.к. $f\in R[a,b]$)

▶ Не огр. общности, П: $g\geq 0$ на $[a,b]$

Имеем: $f(x)g(x) \leq Mg(x)$, $\geq mg(x)$ $\forall x\in[a,b]$

$\wedge 1$

$\Rightarrow m\int_a^b g\,dx \leq \int_a^b fg\,dx \leq M\int_a^b g\,dx$ (2)

а) $\exists \int_a^b g\,dx = 0$ Тогда $\left|\int_a^b fg\,dx\right| \leq \int_a^b |fg|\,dx \leq \sup_{[a,b]} |f| \underbrace{\int_a^b g\,dx}_{=0}=0 \Rightarrow \int_a^b fg\,dx = 0 \Rightarrow (1)$

б) если $\int_a^b g\,dx>0$, то разделим (2) — обе части — на $\int_a^b g(x)\,dx$. Тогда

$$m \leq \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g\,dx} \leq M$$

$=: \mu \in \mathbb{R}$.

Имеем: $m\leq\mu\leq M$, и $\int_a^b fg\,dx = \mu\int_a^b g\,dx$ ◀

Сл-ия. ① $f\in R[a,b]$, $m := \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f \Rightarrow \exists \mu\in[m,M] / \int_a^b f\,dx = \mu(b-a)$ ▶ $g=1$ ◀

② $f\in C[a,b]$, $g\in R[a,b]$, $g\geq(\leq)0$ на $[a,b]$

Тогда $\exists c\in[a,b] / \int_a^b fg\,dx = f(c)\int_a^b g\,dx$ (3)

▶ $f\in C[a,b] \xRightarrow{\text{II т. Вейерш.}} \cdot \exists x_1\in[a,b] / f(x_1) = m := \min_{[a,b]} f$ ($\inf f$ — достигается $\Rightarrow$ min)

$\cdot \exists x_2\in[a,b] / f(x_2) = M = \max_{[a,b]} f$

а) если $f\equiv const$ на $[a,b] \Rightarrow$ (3) очевидно

б) $f \not\equiv const$ на $[a,b]$, то $m<M$

Имеем: Т1 $\Rightarrow \exists \mu\in[m,M] / \int_a^b fg\,dx = \mu\int_a^b g\,dx$ (1)

- $\mu\in(m,M) \Rightarrow$ Т о промеж. знач. $\exists c / f(c)=\mu \Rightarrow$ см (1)–(3) верно
- $\mu = m \Rightarrow c = x_1 \Rightarrow (3)$
- $\mu=M \Rightarrow c=x_2 \Rightarrow (3)$ ◀

③ $f\in C[a,b] \Rightarrow \exists c\in[a,b] / \int_a^b f\,dx = f(c)(b-a)$ Геом.

▶ сл-ие 2 $g=1$ ◀

Т2 (вторая т. о среднем)

$f\in R[a,b]$, $g\uparrow(\downarrow)$ на $[a,b]$ ($f\uparrow(\downarrow)$ на $[a,b] \xRightarrow{\text{док-м}} f\in R[a,b]$)

$\Rightarrow \exists c\in[a,b] / \int_a^b fg\,dx = g(a)\int_a^c f\,dx + g(b)\int_c^b f\,dx$.

▶ ~~X~~ ◀ Зорич

86

§3. Интеграл Римана как ф-ция верхнего (нижнего) предела.

3.1 Непрерывность интеграла по верхнему параметру (пределу)

Опр $f: X\to\mathbb{R}$. Тогда f удовл. усл-ию Липшица на X (обозн: $f\in Lip(X)$) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\exists C>0 / |f(x_2)-f(x_1)| \leq C|x_2-x_1| \ \forall x_1,x_2\in X$

Зам-я ① $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$, $f' \in B(a,b) \Rightarrow f \in \mathrm{Lip}[a,b]$ $\quad$ Т.к. $f' \in B(a,b)$

▷ Т. Лагр $\Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| = |f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))| \cdot |x_2 - x_1|$, $\theta \in (0,1)$ $\le \underbrace{\sup_{(a,b)} |f'|}_{=:C} |x_2 - x_1|$ ◁

② $f \in \mathrm{Lip}[a,b] \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in D(a,b)$. Например, $f(x) = |x|$. $f \notin D(0)$, но $|f(x_2) - f(x_1)| \le ||x_2| - |x_1|| \le |x_2 - x_1|$.

Лемма. $f \in \mathrm{Lip}\,X$, $X \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на X

▷ Имеем $\forall \varepsilon > 0$ $|f(x_2) - f(x_1)| \le C|x_2 - x_1| < \varepsilon$, $\boxed{\delta := \varepsilon / C}$ $\le C\delta = C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in X$ с усл $|x_2 - x_1| < \delta$

Но $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \varepsilon/C$ ◁

20.03.18 Зам. f - равном непр на $X \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in \mathrm{Lip}[a,b]$

Например, $f(x) = x^{1/2}$ $\quad x \geq 0$

▷ ⓐ f - равном непр на $\{x \geq 0\}$, т.к. $|f(x+\Delta x) - f(x)| \le C|\Delta x|^{1/2}$ (1)

$\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} \le \sqrt{\Delta x} + \sqrt{x}$

В.с.о., д-ем (1), не огр. общн, полагаем $\Delta x > 0$, $x > 0$ ($x = 0$ верно)

• Если $\Delta x \geq x$, то $|f(x+\Delta x) - f(x)| \le |f(x+\Delta x)| + |f(x)| = (x+\Delta x)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\Delta x^{\frac{1}{2}} + \Delta x^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2}+1)\Delta x^{1/2} \Rightarrow$ (1) в этом случае

• Если $0 < \Delta x < x$, то (т. Лагр о сред.) $|f(x+\Delta x) - f(x)| = |\Delta x \cdot f'(x + \theta\Delta x)|$ $\theta \in (0,1)$ $\quad \boxed{\Delta x = \frac{1}{100}} \quad \boxed{\sqrt{\Delta x} = \frac{1}{10}}$

$(\sqrt{x+\theta\Delta x})'$

$\Delta x \cdot f'(x + \theta\Delta x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{(x+\theta\Delta x)^{1/2}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta x}{(\Delta x)^{1/2}} = \frac{1}{2}(\Delta x)^{1/2} \Rightarrow$ (1)

уменьшили знамен

Из (1) $\Rightarrow f$ равн непр на $\mathbb{R}_+$ $\quad |f(x_2) - f(x_1)| \le C(x_2 - x_1)^{1/2} \le C\sqrt{|x_2 - x_1|} < C\sqrt{\delta}$ $\leftarrow \varepsilon$ $\quad \forall x_1, x_2 \geq 0$, $|x_1 - x_2| < \delta$

$\delta := \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^2$

ⓑ Но $f \notin \mathrm{Lip}[a,b]$ $\forall b > 0$ $\quad$ В с.о. $\forall C > 0\ \exists x_1 = 0, \exists x_2 =$

$|f(x_2) - f(x_1)| = f(x_2) = x_2^{1/2} = (x_2 - x_1)^{1/2} = \frac{|x_2 - x_1|}{(x_2)^{1/2}} > C|x_2 - x_1|$, if $x_2 < \frac{1}{C^2}$ ◁

В итоге, $\mathrm{Lip}[a,b] \underset{\neq}{\subset} C[a,b]$ $\quad |x|$

$\cup\!\!\!/$

$C[a,b] \cap D(a,b)$

$\{f / f' \in B(a,b)\}$

Т1. $f \in R[a,b]$, $\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $\Psi(x) = \int_x^b f(t)\,dt \Rightarrow \Phi, \Psi \in \mathrm{Lip}[a,b]$. (фи, кси $\in C$)

▷ ① Д-жем, что $\Phi \in \mathrm{Lip}[a,b]$

Пусть $a \le x_1 < x_2 \le b$. Имеем $|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| = \left|\left(\int_a^{x_2} - \int_a^{x_1}\right) f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt\right| \le$

нормально т.к. $x_2 > x_1$ $\le \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \le M(x_2 - x_1)$, где $M := \sup_{[a,b]} |f| \in \mathbb{R} < \infty$, т.к. $|f| \in R[a,b]$ см. р. бо ранее

② $\Psi(x) = \int_a^b f\,dt - \int_a^x f\,dt$ $\Rightarrow \Psi(x) \in \mathrm{Lip}[a,b]$ как разность ◁

const $\quad$ $\Phi(x)$

Пр-р $\quad f(x) = \int_0^{\cos x} \sin\frac{1}{t}\,dt$, $f \in C(\mathbb{R})$ $\quad$ ($\sin\frac{1}{t}$) ф-ция огр, разрывна конечное (счетное) число раз на каждом сегменте $\Rightarrow R$ (мера $= 0$)

$\cos x \to$ суперпозиция непрер функ

3.2. Дифференцируемость интеграла по верхнему (нижнему пределу)

Т2 $f \in R[a,b]$, $f \in C(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$. $\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.

$\Rightarrow \Phi \in D(x_0)$, причём $\Phi'(x_0) = f(x_0)$ (1) ($x_0 = a$ произв справа, $x_0 = b$ - слева)

▷ $f \in C(x_0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ / \ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall t \in O_\delta(x_0) \cap [a,b]$ (2)

Имеем: $\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left[\left(\int_a^x - \int_a^{x_0}\right) f(t)\,dt\right] - f(x_0)\right| =$ $\quad \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt$ к константа $\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$

$= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,dt\right| \le \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \begin{cases} (x - x_0) \cdot \varepsilon, & x_0 < x \\ (x_0 - x) \cdot \varepsilon, & x_0 > x \end{cases} = \varepsilon\ \forall x \in O_\delta(x_0) \cap [a,b]$

$< \varepsilon$ при $|t - x_0| < \delta$ $\quad$ $|x - x_0|$

из (2) $\to$ если $x \in O_\delta(x_0) \cap [a,b]$ $\quad$ $\Rightarrow \Phi'(x_0) = f(x_0)$ по опр ◁

Т2'. $f \in R[a,b]$, $f \in C(x_0)$, $\underset{x_0 \in [a,b]}{}$ $\Psi(x) := \int_x^b f(t)\,dt \Rightarrow \Psi \in D(x_0)$, причём $\Psi'(x_0) = -f(x_0)$

▶ $\Psi(x) = \underbrace{\int_a^b f\,dt}_{\text{число}} - \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{=:\Phi(x)} \Rightarrow \Psi'(x_0) = -\Phi'(x_0) = -f(x_0)$ ◀

пр-ры! ① $\Phi_1(x) := \int_0^{\cos x} \operatorname{sgn}\frac{1}{t}\,dt$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$t=0$ – разрыв $\quad \cos x \neq 0$

Тогда по Т2 и т. о суперпозиции $\Phi'(x) = \left(\operatorname{sgn}\frac{1}{\cos x}\right)\cdot(-\sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

② $F(x) := \int_{x^{1/2}}^{x^{1/3}} e^{t^2}\,dt$, $x > 0$ (чтобы $(x^{1/2})' \neq \infty$) $\quad F'(x) = ?$

$$F'(x) = \left(\int_0^{x^{1/3}} e^{t^2}dt - \int_0^{x^{1/2}} e^{t^2}dt\right)' = \frac{1}{3x^{2/3}} e^{x^{2/3}} - \frac{1}{2x^{1/2}}\cdot e^{x}$$

8.9.

! **Т.3.** $f \in C(a,b) \Rightarrow \exists\, \Phi \in D(a,b) \,/\, \Phi'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$
т.е. $\exists\, \Phi$ – п/обр для f на (a,b)

▶ Положим $\Phi(x) := \int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(t)\,dt$, $x \in (a,b)$ $\overset{\text{T1, T2}}{\Longrightarrow} \exists\, \Phi'(x) = f(x)$ ◀
а нельзя т.к. $f \notin R[a,b]$ не ограниц $\quad \frac{a+b}{2} \in (a,b)$ (пр-р из 1ой главы $\operatorname{sgn}\frac{1}{x}$)

можно доопределить так, чтобы она была непрерывна

Т4 $f \in C[a,b]$ $\quad \exists\, \Phi \in D[a,b] \,/\, \Phi'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \Phi$ – п/обр для f на (a,b)
т.е. $\quad$ не $[a,b]$, т.к. не определяли п/обр на отрезке

▶ $\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ ◀

10б **§4** Ф-ла Ньютона–Лейбница для интегрируемой ф-ции

4.1 Теорема об интеграле для ф-ции равной 0 почти всюду.

Опр $f: X \to \mathbb{R}$. Говорим, что св-во $\mathcal{O}$ для f верно почти всюду (п. вс), если это св-во верно для $\forall x \in X \setminus A$, где $\mu(A) = 0$

Т. $f \in R[a,b]$ $\quad f = 0$ п. вс на $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0$
взять сч. число точек
$\not\Rightarrow$ ограничена

▶ $|f| \in R[a,b] \Rightarrow \exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = \int_a^b |f|\,dx = ?$ $\quad m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} |f|$ $\quad$ Но $\inf\limits_{[\alpha,\beta]} |f| = 0$ $\forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\mu[\alpha,\beta] \neq 0$

$\Rightarrow m_k = 0$ $\forall k\, \forall P$. $\Rightarrow \int_a^b |f|\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sum \underbrace{m_k}_{0} \Delta x_k = 0 \Rightarrow 0 \leq \left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx = 0$ ◀
нер-во $\quad \Downarrow = 0$

23.03.18

Замечание. $f = 0$ п. вс на $[a,b]$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\overset{\text{б.г.}}{\not\Rightarrow}$ $f \in R[a,b]$
Например, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad \mu(\mathbb{Q}) = 0$, $\quad f \notin R[a,b]$ $\forall [a,b]$

! **сл-ие** $f, g \in R[a,b]$, $f = g$ п. вс на $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$
счётное

пр-р. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ x = \frac{m}{n}\ (m,n) = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ $\quad f \in C((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\})$
ф-ция Римана $\quad \Rightarrow$ разрыв на мн-ве, где мера $= 0$
$\Rightarrow f \in R[a,b]$ $\forall [a,b]$

Т.к. $f = 0$ п. вс (на $[a,b]$) $\Rightarrow \int_a^b f\,dx = 0$ (см Т)

4.2 Ф-ла Ньютона-Лейбница

! (Т) Ф-ла Ньютона-Лейбница. $f \in R[a,b]$, $\exists\ \Phi \in C[a,b]$ / Φ - п/обр f на (a,b) $\Rightarrow$ (если $f \in C[a,b]$, то $f \in R$ не нужно)

$\Rightarrow$ (1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(x)\Big|_a^b$ (1) ! (+ линейность)

(2) $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ обл. св-вами: $F \in C[a,b]$ и F - п/обр f на (a,b)

▶ (1) $f \in R[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \ |\sigma(f,P,\xi) - \int\limits_a^b f\,dx| < \varepsilon\ \forall (P,\xi)$ с $d(P) < \delta$

• Имеем: $\forall P$ с $d(P)<\delta$: $\Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x_1) - \Phi(x_0)] + [\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] + \ldots + [\Phi(x_n) - \Phi(x_{n-1})] =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} [\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})]$, где $\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1}) = \Phi'(\xi_k)\Delta x_k$, $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ - Т. Лагранжа $\Rightarrow \forall P$ с $d(P)<\delta\ \exists \xi$ - метка / $0 \le |\Phi(b) - \Phi(a) -$

$- \int\limits_a^b f\,dx| = |\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \int\limits_a^b f\,dx| = |\sigma(f,P,\xi) - \int\limits_a^b f\,dx| < \varepsilon$

В итоге $0 \le |\Phi(b) - \Phi(a) - \int\limits_a^b f\,dx| < \varepsilon\ \ \forall \varepsilon > 0$.

Переходя к $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+}$: $0 \le |\Phi(b) - \Phi(a) - \int\limits_a^b f\,dx| \le 0 \Rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_a^b f\,dx \Rightarrow (1)$

(2) Рассмотрим $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Тогда а) $F \in C[a,b]$ (см. Т о непр. инт. по верхнему пределу);

б) п.1 $\Rightarrow F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)\ \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow F'(x) = \Phi'(x) = f(x)\ \ \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow F$ - п/обр для f на $[a,b]$ ◀

Зам-ия. (1) $f \in R[a,b] \overset{в.г.}{\not\Rightarrow} \exists\ \Phi \in C[a,b]$ / Φ - п/обр f на (a,b).

▶ Например, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\},\ (m,n)=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = R(x) \Rightarrow f \in R[a,b]\ \forall [a,b]$

П: $\exists\ \Phi \in C[a,b]$ / $\Phi'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$

Тогда см. Т-фу Н-Л. $F(x) := \underbrace{\int\limits_a^x f(t)\,dt}_{\equiv 0}$ $x \in [a,b]$ обладает св-вами

$F \in C[a,b]$, $F'(x) \equiv f(x)$ на (a,b). Но $F \equiv 0$ на $[a,b] \Rightarrow F' \equiv 0$ на $[a,b] \neq f$. ◀

(2) $F \in C[a,b]$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, F - п/обр f на (a,b) $\overset{в.г.}{\not\Rightarrow} f \in R[a,b]$

▶ Например, $F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Имеем: • $F \in C[-1,1]$.

• $x \neq 0$: $F' = 2x\sin\frac{1}{x^2} - x^2 \cdot \frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$

• $x = 0$: $F' = \lim\limits_{x\to0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0$ (б.м. на огр.)

При этом $f(x) := F'(x)$, $x \in [-1,1]$ не явл. ограниченной (в окр. $x=0$) $\Rightarrow f \notin R[-1,1]$ ◀

! **Пр-р** из Демид. $f(x) := \begin{cases} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+2^{1/x}}\right], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f \in R[-1,+1]$

В с.р. • $x \neq 0$: $f(x) = +\frac{1}{(1+2^{1/x})^2} \cdot \frac{2^{1/x}}{x^2}\ln 2$, $x \neq 0$

• $\left.\begin{array}{l} f(+0) = 0 \quad (1+2^{1/x})^2 \text{ перебивает} \\ f(-0) = 0 \quad 2^{1/x} \text{ перебивает} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)\right\} \Rightarrow f \in C[-1,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow f \in R[-1,1]$

Рассм. $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx \overset{?}{=} \int\limits_{-1}^{1} \Big[\frac{d}{dx}\overbrace{\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)}^{F(x)}\Big]dx \neq F(1) - F(-1)$ ⊖

не опред. в 0; некорректно, но принято. неверно: $F \notin C(0)$, в с.р. $F(+0) = 0$, $F(-0) = 1$

$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad F_2(x) = \begin{cases} F(x), & x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

⊖ $\int\limits_{-1}^{0} \frac{d}{dx}F\,dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{d}{dx}F\,dx = F_2(x)\Big|_{-1}^{0} + F_1(x)\Big|_{0}^{1} = \ldots$

§5. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле

5.1 Замена переменной

Напом-ие • $f \in D[a,b] \Leftrightarrow (f \in D(a,b)) \wedge (\exists f'_+(a)) \wedge (\exists f'_-(b))$

• $f \in C^1[a,b] \overset{def}{\Leftrightarrow} (f \in D[a,b]) \wedge (f' \in C[a,b])$

Зам. $f \in D[a,b] \not\Rightarrow^{\text{вообще}} f \in C^1[a,b]$, например $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Т1 Замена переменной
$f \in C[a,b]$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$ ($\in D[\alpha,\beta]$, $\varphi' \in C$): $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, тогда

$\exists$ т.к. $f \in C$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi)\,d\varphi$ (1)

▶ • $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists\ F \in C[a,b]$, F — п/обр f на (a,b) ($\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \in Lop[a,b]$, равном. непр $\Rightarrow$ Н-Л $\in C$) $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (2)

• $\exists\, g(t) := f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$. Усл Т $\Rightarrow g \in C[\alpha,\beta]$ (композ непр) $\Rightarrow g \in R[\alpha,\beta]$

Положим $G(t) := F(\varphi(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$ (см (2)).

$\Rightarrow G \in C[\alpha,\beta]$ (суперпозиция); $G'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = g(t)$, $t \in (\alpha,\beta)$

$\overset{\text{Н-Л}}{\Rightarrow} \int_\alpha^\beta g(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(\underbrace{\varphi(\beta)}_{=b}) - F(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=a}) = F(b) - F(a)$ см (2) ◀

! **Пр-ры** ① $f \in C[-a,a]$, f — нечётная $\Rightarrow I = \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$:

▷ $I = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = I_1 + I_2$

$I_1 = \int_{-a}^0 f(x)\,dx = \left|\begin{matrix} t = -x \\ dt = -dx\end{matrix}\right| = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt = -I_2$ $\Bigg\} \Rightarrow I = 0$ ◀

② $f \in C[-a,a]$, f — четная $\Rightarrow I := \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ▶ – ◀

③ $f \in C(\mathbb{R})$, f — период. с периодом T $\Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$ $\forall a \in \mathbb{R}$ ▶ – ◀

Т2. $f \in R[a,b]$, $\varphi \in D[\alpha,\beta]$ (понизили усл), $\varphi' \in R[\alpha,\beta]$ (доп услов), $\varphi \uparrow\uparrow$ ($\downarrow\downarrow$) на $[\alpha,\beta]$

$\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (соотв. $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$) $\Rightarrow (f\circ\varphi)\cdot\varphi' \in R[\alpha,\beta]$,

причём $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$ ▶ ~~–~~ ◀ Камынин(1) с 238 (т.1)

11б. 27.03.18

5.2 Интегрирование по частям

Т1. $u, v \in D[a,b]$ ($\Rightarrow \in C[a,b]$), $u', v' \in R[a,b]$.

$\Rightarrow \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$ (1)

▶ (1) $\Leftrightarrow \int_a^b \underbrace{\left\{\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)]\right\}}_{=: f(x) \text{ (непр. усл)}} dx = \underbrace{[u(x)\,v(x)]}_{\in D[a,b] \Rightarrow\ =: F(x)}\Big|_a^b$ = ?

Имеем $f \in R[a,b]$ (т.к. u, v непр), $F \in C[a,b]$, F — п/обр. f на (a,b) ($\int_a^x u v\, dx \in Lop[a,b] \Rightarrow$ равном. непр. непр) $\overset{\text{Н-Л}}{\Rightarrow} \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \Rightarrow$ (1) ◀

Замечание (1) $\underbrace{\int_a^b u\,dv}_{=\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx} = u v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

dv — $\overset{\text{def}}{=}$ (dv — значок)

Обознач.: • $f \in D^1[a,b] \Leftrightarrow f \in D[a,b]$ (произв внутри, на концах)
• $n \geq 1$, $f \in D^{n+1}[a,b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (f \in D^n[a,b]) \wedge (f^{(n)} \in D[a,b])$

Т2 (Ф. Тейлора с остаточным членом в $\int$-ой форме)

Напоминание! $0! := 1$
$\sum_{k=1}^m := 0$, если $m < 1$

$f \in D^{n+1}[a,b]$, $n \geq 0$, $x_0 \in (a,b)$ $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ (2)

$\forall x \in [a,b]$

Индукция: • $n=0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow \quad f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{0} \ldots + \frac{1}{0!} \int_{x_0}^{x} 1 \cdot f'(t)\,dt \overset{Н\text{-}Л}{=}$ [$R[a,b]$, $f \in C[a,b]$]

$= f(x_0) + f(x) - f(x_0)$ — верно

• Предположим, (2) верна для $n=m$, $m \geq 0$ (*)
Д-жем, что (2) верна для $n = m+1$:

Пусть $f \in D^{m+2}[a,b]$. Обозн. $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

В силу (*), $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0) + r_m(x)$

Имеем: $r_m(x) = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^m}_{=:v'(t)} \underbrace{f^{(m+1)}(t)}_{=:u(t)}\,dt \overset{T1}{=} \frac{1}{m!} \Big\{ \left(-\frac{1}{m+1}(x-t)^{m+1} f^{(m+1)}(t)\right)\Big|_{t=x_0}^{t=x} +$

$+ \frac{1}{m+1} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{m+1} f^{(m+2)}(t)\,dt \Big\} = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{m+1}(x_0-x)^{m+1} f^{(m+1)}(x_0) + \frac{1}{m+1} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{m+1} f^{(m+2)}(x)\,dt \right)$

$= \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0)(x-x_0)^{m+1} + r_{m+1}(x)$ — подст. в 3 $\Rightarrow$ (2) для $n=m+1$.

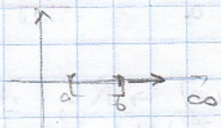
Замеч. $f \in C^{m+1}[a,b]$. Тогда + 2, Т о среднем $\Rightarrow$ ф. Т с остат. членом в форме Лагранжа.

12б

§6. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

6.1. Определение. Критерий Коши

Опр 1. $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$
$f \in R[a,b]$, $\forall b > a$



Тогда ① $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, (1)
если этот предел $\exists$!

② Если $\exists \lim$ в (1), то говорят $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится
если нет, то расходится

(если интегр. сход., то вовсе не обяз., что $f \to 0$)

③ f интегр-ма на $[a,+\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \int_a^{+\infty} f\,dx$

! Пр-р $I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$I_\alpha \begin{cases} \text{сх, если } \alpha > 1 \\ \text{расх, если } \alpha \leq 1 \end{cases}$

В сл. ① $\alpha > 1$: $\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} b^{1-\alpha} \to \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow \exists I_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$

② $\alpha = 1$: $\int_1^b x^{-1}\,dx = \ln x\Big|_1^b = \ln b \to +\infty \Rightarrow$ расх

③ $\alpha < 1$ — расход. $\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1} b^{1-\alpha} \to -\infty$ расх

Зам-ия. ① Пусть $f \geq 0$!, $f \in R[a,b]$ $\forall b > a$
Тогда если $\int_a^{+\infty} f\,dx$ расх, то пишем $\int_a^{+\infty} f\,dx = \infty$
иначе пишем $\int_a^{+\infty} f\,dx < \infty$

② Пусть $\exists \int_a^{+\infty} f\,dx \Rightarrow \lim_{c \to +\infty} \int_c^{+\infty} f\,dx = 0$ (4)

а) Имеем: $\int_c^b f\,dx = \int_a^b f\,dx - \int_a^c f\,dx \xrightarrow[b \to +\infty]{\text{по усл.}} \int_a^{+\infty} f\,dx - \int_a^c f\,dx \Rightarrow \exists \int_c^{+\infty} f\,dx$

б) из а) $\Rightarrow \int_c^{+\infty} f\,dx = \int_a^{+\infty} f\,dx - \int_a^c f\,dx \xrightarrow{c \to +\infty} \int_a^{+\infty} f\,dx - \int_a^{+\infty} f\,dx = 0$

ОПР 2 $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a,b]$, $\forall a < b$

Тогда ① $\int_{-\infty}^{b} f dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f dx$, если этот $\lim \exists$.

② $\exists \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f dx$ сходится, иначе расходится

③ f - интегр. на $(-\infty, b] \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \int_{-\infty}^{b} f dx$

ОПР 3 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exists \int_0^{+\infty} f dx, \exists \int_{-\infty}^{0} f dx$ Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} f dx := \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty}\right) f dx$.

Зам $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} f dx \overset{def}{\Leftrightarrow}$ ~~$(\exists \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} f dx)$~~ $(\exists \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f dx) \wedge (\exists \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f dx)$.

Пример 1 нечётная функ расход. $f(x) = x$ $\quad \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 x dx = \lim_{a \to -\infty} -\frac{a^2}{2} \not\exists$

Т1 (Критерий Коши $\exists \int_a^{+\infty}$) $\exists f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in R[a,b]$, $\forall b > 0$ Тогда

$\exists \int_a^{+\infty} f(x) dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists M > a /$

$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 > M$ (5)

▶ $F(b) := \int_a^b f(x) dx$, $b \geq a$. Тогда $\exists \int_a^{+\infty} f dx \Leftrightarrow \exists \lim_{b \to +\infty} F(b) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Кр Коши для $\exists \lim_{b \to +\infty} F(b)$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > a$ (>0 - без разн) $/ |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon \; \forall b_1, b_2 > M$

$\left| \left(\int_a^{b_2} - \int_a^{b_1}\right) f dx \right| = \left| \int_{b_1}^{b_2} f dx \right|$. ◀

ОПР 4 $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f \in R[a,b]$ $\forall b > a$.

Тогда ① $\int_a^{+\infty} f dx$ сход. абсолютно (f абс. интегр на $[a, +\infty)$) $\Leftrightarrow \int_a^{+\infty} \underbrace{|f|}_{\geq 0} dx < \infty$

② $\int_a^{+\infty} f dx$ сх. условно $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists \int_a^{+\infty} f dx) \wedge (\not\exists \int_a^{+\infty} |f| dx)$

Т2. $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\exists \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} f(x) dx$, причём $\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$

▶ ① $\exists \int_a^{+\infty} |f| dx \underset{кр. К}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists M > a / \int_{b_1}^{b_2} |f(x)| dx < \varepsilon \quad \forall b_1, b_2 > M$

$\left| \int_{b_1}^{b_2} f dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f| dx < \varepsilon \underset{кр. К}{\Rightarrow} \exists \int_a^{+\infty} f dx$

② $\forall b \geq a$ имеем: $\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx \Rightarrow \lim_{b \to +\infty}: \left| \int_a^{+\infty} f dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f| dx$.

модуль держит lim ◀

Замеч: $\exists \int_a^{+\infty} f dx \not\Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} |f| dx$

Например $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Д-жем позже

Св-ва $\int_a^{+\infty} f dx$

① Линейность

② $\int_a^{+\infty} f dx = \int_a^b f dx + \int_b^{+\infty} f dx$

③ Замена переменной

④ Интегр по частям

Зорич с 460

138.

6.2 Признаки сходимости

Т1 (признак сравнения / мажорантный) $f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\boxed{f, g \in R[a,b] \; \forall b > a}$, $\boxed{0 \leq f(x)} \leq g(x)$ (6) $\forall x \geq a$

Тогда ① $\int_a^{+\infty} g dx < \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f dx < \infty$

② $\int_a^{+\infty} f dx = \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} g dx = \infty$

▶ ① $\int_a^{+\infty} g dx < \infty$ (G)

Положим $G(b) := \int_a^b g dx$; $F(b) := \int_a^b f dx$. Имеем: • $G \uparrow$ на $[a, +\infty)$, т.к. $g \geq 0$

• $\exists \lim_{b \to +\infty} G(b) \in \mathbb{R}$, см (G) по условию

Т. Вейерш.

$\Rightarrow \quad \exists\, C>0 \,/\, G(b) \le C \quad \forall b \ge a$

$G\uparrow, \lim\limits_{b\to\infty} G(b) = I \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists M>0 \,/\, |G(x)-I|<\varepsilon \quad \forall x>M$

$\Rightarrow G(x) < |I| + \varepsilon = |I| + 1 \quad \forall x > M$

$G\uparrow \Rightarrow \forall x < M \quad G(x) < |I| + \varepsilon \Rightarrow$ огр

Далее. • $F\uparrow$ на $[a,+\infty)$, т.к. $f \ge 0$

• $0 \le F(b) = \int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx = G(b)$; $\quad G(b) \le C \Rightarrow F(b) \le C$ на $[a,+\infty)$

см Т-уен

$\int_a^{a+T} f\,dx = \int_0^T f\,dx$ f-периодич

$\int_a^{b+T} - \int_0^T =$

$= -\int_0^a + \int_T^{a+T}$ замена

Вейер

$\Rightarrow \quad \exists \lim\limits_{b\to+\infty} F(b) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} f\,dx$ по опр

$F\uparrow,\ F \le C \quad \forall \varepsilon>0\ \exists M>0 \,/\, |F(x)-I|<\varepsilon \quad \forall x>M$?

$F(x) \le C \quad b = \sup\limits_{[a,+\infty)} F \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists x_0 \ F(x_0) > b-\varepsilon$

$b - \varepsilon < F(x) \le b \quad \forall x \in (x_0, +\infty)$

$\exists \lim F(x)$

② $\int_a^{+\infty} f\,dx = +\infty$

П: $\int_a^{+\infty} g\,dx < \infty$ (сх-ся) $\overset{n.1}{\Rightarrow} \int_a^{+\infty} f\,dx < \infty \Rightarrow$ П

Замеч. ① $\exists \int_a^{+\infty} f\,dx \Rightarrow \forall b>a, \exists \int_b^{+\infty} f\,dx$ (напоминание)

② В Т. 1 — нер-во $0 \le f(x) \le g(x)$ достаточно быть верным для $x \ge b$ для нек $b > a$.

ПР-Р $\int_1^{+\infty} \underbrace{\sin x\, x^n e^{-x^2}}_{=:\,f(x)} dx$, $n \ge 0$ (мажоранта)

$\int |f|\,dx$ сх-ся $\Rightarrow \int f\,dx$ сх-ся; мажор признак

Имеем: $|f(x)| \le x^n e^{-x^2} = \frac{1}{x^2} \left(x^{n+2} e^{-x^2}\right)$ $\le$ Const $= C$.

$\boxed{\bullet\ z^\alpha e^{-z} \le \mathrm{Const}(\alpha),\ z \ge 0,\ \alpha \ge 0.}$

Способ 1) $\begin{cases} g(z) \to 0 & z\to+\infty \text{ (лопиталь)} \\ g \in C(\mathbb{R}_+) \end{cases} \Rightarrow \exists M>0 \,/\, 0 \le g(z) \le 1 \quad \forall z \ge M$ ($\forall \varepsilon>0$ ($\varepsilon=1$))

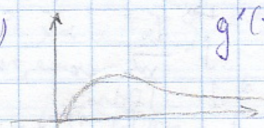
$\frac{x^{n+2}}{e^{x^2}} \to \frac{(n+2)x^{n+1}}{2x \cdot e^{x^2}} \to \dots \to 0$

$g \in C[0,M] \underset{\text{Т. В}\Rightarrow\text{огр}}{\Rightarrow} \exists B>0 \,/\, 0 \le g(z) \le B,\ 0 \le z \le M$

$0 \le g(z) \le 1,\ z > M$.

$\Rightarrow 0 \le g(z) \le B+1$.

Способ 2) $g'(z) = 0$. найти max функ.



Итак, $|f(x)| \le g(x) := C \cdot \frac{1}{x^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сх-ся $\overset{\text{пр. сравн. (Вейерштр)}}{\Rightarrow} \int_a^{+\infty} |f|\,dx < \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f\,dx$ сх-ся (но не $<\infty$)

сх, $|f| \ge 0$

Обозн.: $f = \underline{O}^*(g),\ x \to +\infty\ (a) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists K \ne 0$ (конст) $/\, f \sim Kg,\ x \to +\infty\ (a, -\infty)$

$f = O^*(g) \Leftrightarrow g = O^*(f)$.

Сл-ие $f, g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in R[a,b] \ \forall b > a$; $\boxed{f = O^*(g),\ x\to+\infty}$, ~~$f$~~ $g \ge 0$ на $[a,+\infty)$ (в силу эквив.)

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f\,dx, \ \int_a^{+\infty} g\,dx$ сх-ся/расх одновременно

см Замеч. 2

Имеем: $f(x) = K\alpha(x)g(x),\ x \ge a,\ K \ne 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 1$ (*)

не огр. общности, считаем $K>0$ (иначе берём $-f(x)$)

(*) $\Rightarrow \exists b > a \,/\, \quad 0 < \alpha(x) < 2 \quad \forall x \ge b$. ($\varepsilon = 1$)

Поэтому, т.к. $g \ge 0$, то $f \ge 0$ на $[b,+\infty)$, а кр того $f \le 2Kg(x),\ x \ge b$

Итак $\begin{cases} \bullet\ 0 \le f(x) \le 2Kg(x),\ x \ge b \\ \bullet\ \int^{+\infty} 2Kg(x)\,dx < \infty \quad (K>0) \end{cases} \overset{\text{Зам 1,2}}{\underset{\text{Т 1}}{\Rightarrow}} \int_b^{+\infty} f\,dx$ сх-ся $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f\,dx$ сх-ся

$\int_a^b f\,dx$ — сх-ся

И если $\int_a^{+\infty} f\,dx$ расх-ся $\Rightarrow \int_b^{+\infty} f\,dx = +\infty \overset{\text{Т 1}}{\Rightarrow} \int_b^{+\infty} g\,dx$ расх-ся $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g\,dx$ расх-ся

Замеч: $\left. \begin{array}{l} f \in R[a,b] \ \forall b > a, \\ \exists\, c > a \text{ — пр-но} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} f\,dx \Leftrightarrow \exists \int_c^{+\infty} f\,dx$ (расписать lim)

(Т2) Признак Дирихле $f, g: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\boxed{f \in R[a,b],\ \forall b > a}$ (следует из дальнейших требований), причём

1) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,\ x \geq a$ — ограничена

2) $g(x) \downarrow 0,\ x \to +\infty$ (т.е. $\to 0$) $(\Rightarrow g \in R[a, +\infty))$ $\Rightarrow \int_a^{+\infty} fg\,dx$ сх-ся

(1, 2 – для дост. больших x, и предп. $g \in R[a, +\infty)$)

▶ $\exists\ b_2 > b_1 > a$, имеем: $\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx = g(b_1)\int_{b_1}^{c} f\,dx + g(b_2)\int_{c}^{b_2} f\,dx$, для некот. $c \in [b_1, b_2]$ (*,*)

$g\downarrow$ на $[a, +\infty)$; 2ая т. о среднем

Комм: Заметим, что $g(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$, т.к. $g\downarrow$, $\lim_{x\to\infty} g = 0$. ($\downarrow$ к 0)

Т.к. $g(x) \to 0,\ x \to +\infty$, то, $\forall \varepsilon > 0\ \exists b > a$ / $0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{4M}$, $\forall x > b$, где $M := \sup_{x\in[a,+\infty)} |F(x)|$

Заметим, что $\left|\int_{b_1}^{c} f\,dx\right| = \left|\int_a^{c} f\,dx - \int_a^{b_1} f\,dx\right| = |F(c) - F(b_1)| \leq 2M$.

Аналогично, $\left|\int_c^{b_2} f\,dx\right| \leq 2M$

В итоге, $(\ast\ast) \Rightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2} fg\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon$ $\forall b_1, b_2 > b$, где b из $(\ast\ast\ast)$ ◀

ПР-РЫ (1) $\int_a^{+\infty} \underbrace{\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)}_{f(x)} dx$

$0 < \frac{1}{x^2} \leq \frac{\pi}{2}$ чтобы $\sin \geq 0$ $\Leftrightarrow x^2 \geq 2/\pi$

$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Имеем, $f \geq 0$ на $[\sqrt{\frac{2}{\pi}}, +\infty)$, $f \in R[\sqrt{\frac{2}{\pi}}, b]$ $\forall b > \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (суперпозиция непрер)

$f(x) \sim \frac{1}{x^2},\ x \to +\infty$ $\quad \int^{+\infty}_a \frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 1$

Но, $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сх-ся $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f\,dx < \infty$

(2) классич. пример: $I_\alpha := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha > 0$

а) $\alpha > 1$. I_α – сх-ся абсолютно: $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сх-ся, т.к. $\alpha > 1 \Rightarrow I_\alpha$ сх-ся (мажс. признак) $\Rightarrow$ сх-ся $\int f\,dx$.

б) $0 < \alpha \leq 1$ I_α – сх-ся (признак Дирихле)

В с.р.: $\exists f(x) := \sin x$, $g(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ $\Rightarrow$ $F(x) := \int_1^x \sin t\,dt = \left.-\cos t\right|_1^x \leq 2$ $\Rightarrow F$ ограничено

Кроме того, $g(x) \downarrow 0,\ x \to +\infty$.

$\overset{т.2}{\Rightarrow}$ I_α сх-ся ◀

в) I_α сх-ся условно при $0 < \alpha \leq 1$.

т.е. $\int_1^{+\infty} \underbrace{\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|}_{=:h(x)} dx$ расх. ($= +\infty$).

В с.р.: имеем $|\sin x| \geq |\sin x|^2 = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\Rightarrow h(x) \geq k(x)$, где $k(x) := (1 - \cos 2x)/(2x^\alpha)$, $x \geq 1$.

При этом. $\int_1^{+\infty} k(x)\,dx = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha}\,dx}_{= +\infty} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\,dx}_{\text{сх-ся по пр Д}} = +\infty$.

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} k(x)\,dx$ расх $\overset{\text{махор. признак}}{\Longrightarrow}$ $\int_1^{+\infty} h\,dx$ расх.

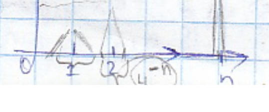
Замеч-я: (1) $f: [a, +\infty)$, $\boxed{f \in R[a,b]\ \forall b > a}$ $\exists \int_a^{+\infty} f\,dx$ $\overset{в.з.}{\not\Rightarrow}$ $\int_a^{+\infty} f^2\,dx$

Например, $f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\exists \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ (пр-р 2), но $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ расх (пр-р 2)

(2) $f: [a, +\infty)$, $\exists \int_a^{+\infty} f\,dx \overset{в.з.}{\not\Rightarrow} f \in B([a, +\infty))$

Например: $f(n) = 2^{n^2}$

$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^n}{4^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$



$F(x) := \int_0^x f(t)dt.$

Имеем: • $F\uparrow$, т.к. $f \geq 0$.
• $\forall x>0\ \exists n /\ x<n \Rightarrow F(x) < F(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2}\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

$\Rightarrow F\uparrow$ и $F \leq 1$ на $\mathbb{R}_+ \xRightarrow{\text{Т. Вейерштр.}} \exists \lim_{x\to+\infty} F(x) =: \int_0^{+\infty} f(t)dt.$

б14

§7. Несобственные интегралы от неограниченных функций

7.1 Определение. Критерий Коши

ОПР 1 $f: (a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$
Тогда $\int_a^b f(x)dx :\overset{def}{=} \boxed{\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx}$, если этот $\lim\ \exists$

ОПР 2 $f: [a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in R[a, b-\varepsilon]$ $\forall \varepsilon \in (0, b-a) \Rightarrow$
$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx =: \boxed{\lim_{\varepsilon\to 0-} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx}.$

ОПР 3 $f: [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ $f \in R[a, c-\varepsilon] \cup R[c+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon \in (0, \min(c-a, b-c))$
$\Rightarrow \int_a^b f dx := \boxed{\int_a^c f dx + \int_c^b f dx}$ (если каждый из инт. в пр. части $\exists$).

Замеч. ① опр. 3 иногда записывают в виде $\int_a^b = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} + \int_{c+\varepsilon_2}^b\right) f dx$

② ① $f \geq 0$, обозн. $\int_a^b f dx = \infty \ (<\infty) \Leftrightarrow$ расх. (сх.)

② $\exists \int_a^b f dx$, $f: (a,b] \to \mathbb{R}$. $\Rightarrow \exists\ I_\varepsilon := \int_a^{a+\varepsilon} f dx$, причём $\lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon = 0$. ▷ — ◁ [см. ранее]

$\int_a^b = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} =$

!!! ПР-Р $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$, $x>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; Тогда $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{сх, если } \alpha<1 \\ \text{расх } \alpha \geq 1. \end{cases}$ ▷ — ◁

$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_{\varepsilon\to 0+}^{1} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)_{\varepsilon\to 0+}$

Зам-я ① $f \in R[a,b] \Rightarrow \exists \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f dx = \int_a^b f dx.$
непрер. инт. Рим по нижнему пределу

② $f: (a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in R[a,b]$ $g \equiv f$ на $(a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b f dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^b g dx = \int_a^b g dx.$

„Говорят" (в этом случае): $\exists \int_a^b f dx$ в собственном смысле (как инт. Римана) (доопределяем)

Например, ⓐ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$
можно доопред в 0 чем угодно — ≤ 1 + огр, непр $\Rightarrow \in R$

ⓑ $\int_0^1 \sin\frac{1}{x} dx$
огран, непр везде, кроме 0 $\Rightarrow$ интегр.

Т1 Критерий Коши $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ $f \in R[a+\varepsilon, b]$ $\forall \varepsilon \in (0, b-a)$ Тогда
$\exists \int_a^b f dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 / \left|\int_{x_1}^{x_2} f dx\right| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in (a, a+\delta)$.

▷ — см. ранее ◁

ОПР 4 $\int_a^b f dx$ сх-ся условно $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists \int_a^b f dx) \wedge (\nexists \int_a^b |f| dx)$
абсолютно $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \int_a^b |f| dx$

Замеч: 1 $\int_a^b f dx$ сх $\overset{?}{\nRightarrow} \int_a^b |f| dx < \infty$

2 $\Leftarrow$ — верно (Коши), причём $\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| dx.$ ▷ — ◁ $\int_{x_1}^{x_2} f dx < \varepsilon$

ПР-Р: $f(x) := \sin\frac{1}{x}/x$ $x \in (0,1]$. Сх-ся усл-но!
▶ a) сх-ся: $\int_\varepsilon^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x} dx = \left|\frac{1}{x} = y,\ dy = -\frac{dx}{x^2}\right| = \int_\varepsilon^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} x\, dx = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin y}{y} dy \to \int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$

б) $\int_\varepsilon^1 \frac{|\sin\frac{1}{x}|}{x}dx = +\infty$ — и —

зам-е $f|[a,b)\cup(b,+\infty)$, $f\in R[a,b-\varepsilon]\cup R[b+\varepsilon,c]$ $\forall\varepsilon\in(0,\min(b-a,c-b))$, $\forall c>b$
Тогда $\int_a^{+\infty} f dx := \int_a^b f dx + \int_b^c f dx + \int_c^{+\infty} f dx$ (если все $\exists$)

Св-ва: ① Линейность
сф-ть и р-ть ② $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$ $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^b = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^c + \int_c^b = \int_a^c + \int_c^b$
▷ — ◁ ③ Замена перем
④ Интегр по частям → зорич (см §6, 6.1, Т2)

7.2 Признаки сравнения сх-ти $\int_a^b f dx$.

Т1, Т2 — сф-ть и р-ть по 6.2.

Пр-р. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^{1/2}\sin(\frac{\pi}{2}-x)} =: I$ расх-ся

▷ $I = \left(\int_0^{\pi/4} + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\right) f(x)dx =: I_1 + I_2$

1) $x\to+0$: $f(x)\sim\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ сх-ся: $\frac{1}{2}<1$. $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{x^{1/2}}<\infty \overset{<\infty}{\underset{\beta}{\Rightarrow}} I_1$ сх.

2) $x\to\frac{\pi}{2}-0$. $f(x)\sim\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$, $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\frac{\pi}{2}-x}$ расх. ◁

7.3. Несобств. интеграл в смысле главного значения (по Коши)

Пр-р: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x\neq 0$. $I := \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \left(\int_{-1}^0 + \int_0^1\right)\frac{dx}{x} =: I_1 + I_2$

$I_1 = \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x} = \ln\varepsilon_1 \to -\infty$, $\varepsilon_1\to+0$. расх

$I_2 = \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_2}^1\frac{dx}{x} = -\ln\varepsilon_2$ - расх.

$I_1 + I_2 = \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Опр $f: [a,b)\cup(b,c]\to R$
$f\in R[a,b-\varepsilon]\cup R[b+\varepsilon,c]$ $\forall\varepsilon\in(0,\min(c-b,b-a))$ $\Big\}\Rightarrow$ V.p (инт в см —)
$\int_a^c f dx := \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{b-\varepsilon} + \int_{b+\varepsilon}^c\right) f dx$ (если этот $\lim\exists$)

V.p $\int_{-1}^1\frac{dx}{x} = \ln 1 = 0$.

0.15

§8. Некоторые приложения интеграла.

8.1 Аддитивная ф-ция отрезка

Опр ф-я $I: \underbrace{(\alpha,\beta)}_{\text{упор. пара}}\in[a,b]\times[a,b]\to I(\alpha,\beta)\in R$ называется аддитивной ф-цией отрезка, если $\forall\alpha,\beta,\gamma\in[a,b]$ $I(\alpha,\beta)+I(\beta,\gamma) = I(\alpha,\gamma)$ (1)

Пр-р: $f\in R[a,b]$. $I(\alpha,\beta) := \int_\alpha^\beta f(x)dx$. $\alpha,\beta\in[a,b]$

Св-ва I. ① $I(\alpha,\alpha)=0$ ▷ $I(\alpha,\alpha) \overset{\text{см. (1)} - \alpha=\beta=\gamma}{=} I(\alpha,\alpha)+I(\alpha,\alpha) \Rightarrow I(\alpha,\alpha)=0$ ◁
② $I(\alpha,\beta) = -I(\beta,\alpha)$ ▷ $I(\alpha,\beta)+I(\beta,\alpha) = I(\alpha,\alpha) = 0$ ◁
③ $F(x) := I(a,x)$, $x\in[a,b]$ Тогда $I(\alpha,\beta) = F(\beta)-F(\alpha)$

▶ $I(\alpha,\beta) = I(a,\beta) - I(a,\alpha) = F(\beta) - F(\alpha)$ ◀

$I(\alpha,\beta) = I(a,\beta)$ $\exists$, т.к. $R \Rightarrow B$.

(1) $\cdot$] $I : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ – адд. ф. отр., причём $\boxed{\exists f \in R[a,b] \,/\, (\inf\limits_{(\alpha,\beta)} f)(\beta-\alpha) \le I(\alpha,\beta) \le (\sup\limits_{(\alpha,\beta)} f)(\beta-\alpha)}$ (2)

где $\forall\ a \le \alpha < \beta \le b$. $\Rightarrow I(\alpha,\beta) = \int\limits_a^b f\,dx$. (3)

▶ Рассмотрим пр-ое р-ие $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ отр. $[a,b]$, положим $m_k := \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f$; $M_k := \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f$, $k = \overline{1,n}$

Имеем: $\underbrace{\sum\limits_{k=1}^n m_k \Delta x_k}_{\xrightarrow[d(P)\to 0]{} \int_a^b f dx} \le I(a,b) \overset{\text{аддит.}}{=} \sum\limits_{k=1}^n I(x_{k-1},x_k) \overset{\text{см. (2)}}{\le} \underbrace{\sum\limits_{k=1}^n M_k \Delta x_k}_{\xrightarrow[d(P)\to 0]{} \int_a^b f dx}$.

$\Rightarrow I(a,b) = \int\limits_a^b f\,dx \Rightarrow (3)$ ◀

8.2 Длина кривой

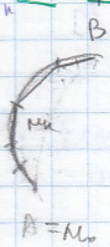
Расс. кривую $\breve{AB} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [t_0, T]\}$,
где $\varphi, \psi \in C[t_0,T]$

т.е. $\breve{AB}$ задана параметрически. γ

„Опр" Точка $c = (x_c, y_c) \in AB$ называется кратной точкой кривой $\breve{AB}$, если $\exists\ t_1, t_2 \in [t_0,T]$, $t_1 \ne t_2 \,/\, \begin{cases} \varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x_c \\ \psi(t_1) = \psi(t_2) = y_c \end{cases}$

„Опр" Кривая $\breve{AB}$ назыв. простой, если она не имеет кратных точек, кроме, б.м., случая, когда т. $A = B$.

„Опр" Кривая $\breve{AB}$ назыв. замкнутой, если $A = B$



Рассмотрим простую кривую $\breve{AB}$: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$

Рассмотрим произв-ое разбиение $P = (t_0, t_1, \dots, t_n = T)$ отрезка $[t_0, T]$
Р-ие P индуцирует „р-ие" кривой $\breve{AB}$ точками $M_k = (x(t_k), y(t_k))$, $k = \overline{0,n}$ t_0 T L
Соединим M_{k-1} с M_k прямолин. отрезком $\Rightarrow$ получим ломаную ℓ, γ назыв. вписанной ломаной в кривую AB (с длиной $|\ell|$)

Опр (1) Простая кривая L назыв. спрямляемой если мн-во длин $|\ell|$ всех вписанного в эту кривую ломаных ограничено (сверху; снизу – 0)
(2) Точная верхняя грань (sup) этого мн-ва наз. длиной заданной кривой
Обозн: $|L|$

(T)] L – простая кривая, заданная параметрически $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [t_0,T]$, (*)
где $\varphi, \psi \in C^1[t_0,T]$ (непр. дифф.) $\Rightarrow$ L – спрямляема, причём $|L| = \int\limits_{t_0}^T \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$. (4)

$(f \in D) \wedge (f' \in C)$

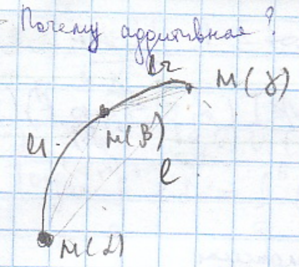
▶ (1) Д-жем, что L – спрямляема.] ℓ – произв. ломаная вписанная в L
Имеем: $|\ell| = \sum\limits_{k=1}^n |M_{k-1}, M_k| = \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$

$= \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} \overset{\text{т. Лагр.}}{=} \sum\limits_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\tau_k)]^2 + [\psi'(\tau_k^*)]^2}\,\Delta t_k \le$
$\le \sum\limits_{k=1}^n \{\sup\limits_{[t_{k-1},t_k]} \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}\}\,\Delta t_k \le (T - t_0) \cdot \underbrace{\sup\limits_{[t_0,T]} \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}}_{\text{„cons t}}$ (5)

Итак, $\forall\ \ell$ $|\ell| \le \text{const} \Rightarrow L$ – спрямляема

(2) Д-жем (4) Рассмотрим аддитивную ф-цию отр-ка, опред-ую ф-лой $I(\alpha,\beta) =$ $(\alpha,\beta) \in [t_0,T]^2$
$= |M(\alpha), M(\beta)|$, $M(\alpha) = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$; $M(\beta) = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$. ($|M(\alpha), M(\beta)|$ определена в силу п. 1) и опред. спрямл. кривой)

Почему аддитивная?



$I(\alpha,\beta)$ - аддитивна:

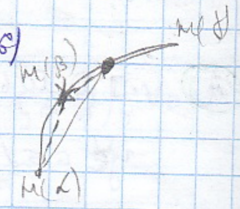
надо д-ть, что $I(\alpha,\gamma) = I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma)$ (6)

Имеем: по нерву Δ

$\forall l \;\; |l| \le |l_1| + |l_2| \le$ для нек l_1, l_2

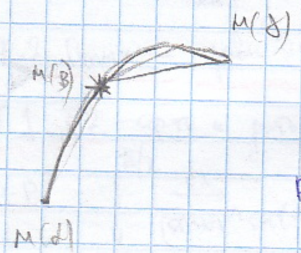
$\le \sup|l_1| + \sup|l_2| =$

$= I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma)$



$\Rightarrow \underset{\|}{\sup}|l| \le I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma)$
$I(\alpha,\gamma)$.

Теперь рассм пр-ые l_1 и l_2 и т. $M(\beta)$, тогда $|l_1| + |l_2| = \underbrace{|l_1 \cup l_2|}_{l} \le \sup|l| = I(\alpha,\gamma)$



$\Rightarrow \sup|l_1| + \sup|l_2| \le I(\alpha,\gamma)$
в силу произв-ти

В итоге $I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma) \le I(\alpha,\gamma) \le I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma) \Rightarrow$ (6)

Положим $f(t) := \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$, $t \in [t_0, T]$

Тогда для ф-ций $I(\alpha,\beta)$ и f выполняется усл-ие леммы.

В с.д.:
- $I(\alpha,\beta)$ - аддит. ф-ция отрезка
- $f \in C[t_0, T]$ (C^1)
- Верно (2) т.к. см д-во (5) из п. 1) для $M(\alpha), M(\beta)$ $\alpha<\beta$

$\inf\limits_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta-\alpha) \le I(\alpha,\beta) \overset{\text{см}(1)}{\le} \sup\limits_{[\alpha,\beta]} f\,(\beta-\alpha)$ - усл-ие (1) леммы

В итоге, лемма $\Rightarrow$ $I(t_0, T) = |L| = \int\limits_{t_0}^{T} f(t)\,dt \Rightarrow$ (4)

Сл-ия. ① Кривая задана в явном виде $y = \varphi(x)$, $x \in [a,b]$; $\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$, $x \in [a,b]$, $\varphi \in C^1[a,b]$

$\Rightarrow |L| = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$.

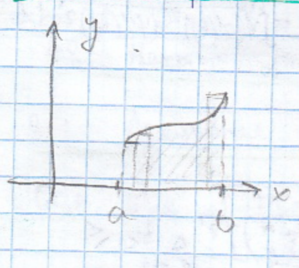
②. L задана в полярных к-х $r = r(\varphi)$

$\Rightarrow$ $L: \begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ $\varphi_0 \le \varphi \le \Phi$; $r \in C^1[\varphi_0, \Phi]$
$r = r(\varphi)$

Имеем: $x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$
$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$

$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + r^2 \Rightarrow |L| = \int\limits_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\varphi$

8.3 S криволинейной трапеции



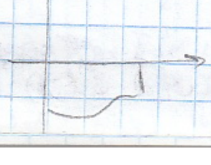
$f \in C[a,b]$ $f \ge 0$ $\in R$

Пр-ое разб $P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ индуцирует разбиение криволин трапеции на n криволинейного

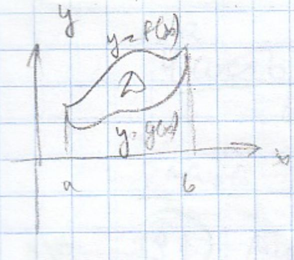
Площадь ступенчатой фигуры $= \sigma(f, P, \xi) = \sum f(\xi_k)\Delta x_k \to$
$\xrightarrow{\text{def-ию}} \int\limits_a^b f(t)\,dt$

$\boxed{S_{тр} := \int\limits_a^b f(t)\,dt}$

$f \le 0$, $f \in C[a,b]$



$\boxed{S_{тр} := -\int\limits_a^b f(x)\,dx}$



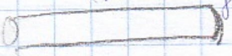
$$S_D = \int_a^b (f-g)\,dx.$$

8.4. Некоторые механические приложения интеграла

Камынин, с 249.

Масса неоднородного стержня

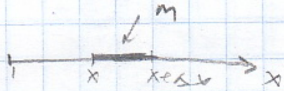
Рассмотрим тонкий стержень, расположим его на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (масса и др. х-ки не меняются в поперечном сечении) с плотностью $\rho = \rho(x)$



(линейная плотность $\Leftarrow$ тонкий)

$x \in [a,b]$

$$\rho(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m[x, x+\Delta x]}{\Delta x} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{m[x, x+\Delta x]}{\Delta x} = \rho(x) + \bar{o}(1)_{\Delta x \to 0}$$



Предпол. что $\rho \in C[a,b]$

$$\Rightarrow m[x, x+\Delta x] = \rho(x)\cdot\Delta x + \bar{o}(1)_{\Delta x \to 0}\,\Delta x$$

Имеем: $\cdot\ m[a,b] = \sum_{k=1}^{n} m[x_{k-1}, x_k] = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \rho(x_{k-1})\cdot\Delta x_k}_{\xrightarrow[d(P)\to 0]{} \int_a^b \rho(x)\,dx} + \bar{o}(1)_{d(P)\to 0} \underbrace{\sum \Delta x_k}_{b-a} \longrightarrow 0$ при $d(P) \to 0$

$$\Rightarrow m[a,b] := \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

~~Далее сами~~

Координаты центра тяжести стержня

Если имеется $\{$ конечная (n штук) материальных точек x_k, $k = \overline{1,n}$, то координата центра тяжести $x_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m(x_k)\cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} m(x_k)}$?

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} m[x, x+\Delta x]$$

Рассмотрим разбиение $P = \{x_0 = a, \ldots x_n = b\}$ отрезка $[a,b]$

$$\exists\, m_k := m[x_{k-1}, x_k] = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,dx \overset{\text{т. о среднем}}{=} \rho(\xi_k)\,\Delta x_k \quad (\rho \in C[x_{k-1}, x_k])$$

$$M = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

$$\Rightarrow x_c \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\,\Delta x_k \cdot \xi_k}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)\,x\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx} = \frac{\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx}$$

Работа силы переменной

$\exists$ матер. точка перемещ. по оси X от a до b под возд-ем перем. силы $F(x)$, $x \in [a,b]$. Имеем: работа силы F на участке $[x_{k-1}, x_k] \approx F(x_k)\,\Delta x_k$

$$\Rightarrow A_{[a,b]} \approx \sum_{k=1}^{n} F(x)\,\Delta x_k \xrightarrow[d(P)\to 0]{} \int_a^b F(x)\,dx \quad \text{при } F(x) \in C[a,b]$$

Часть III. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Глава 1. Непрерывные отображения (функции) многих переменных

§1 Линейные, нормированные, евклидовы и метрические пр-ва

ОПР. Непустое мн-во E назыв. линейным (векторным) пр-вом (над полем $\mathbb{R}$), если:

(1) $\forall x, y \in E$ $\exists$ однозначно опред. $z \in E$ / $z = x+y$ (сумма x и y), причём:
а) $x+y = y+x$ коммут. $\forall x, y \in E$
б) $(x+y)+z = x+(y+z)$ ассоциат. $\forall x, y, z \in E$
в) $\exists\, 0 \in E$ / $0+x = x$ (нейтральный эл-т, нуль)
г) $\forall x \in E$ $\exists!\, (-x) \in E$ / $x+(-x) = 0$.
} E - аб. гр по слож.

(2) $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists!\, z \in E$ / $z = \alpha x$, причём:
а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\cdot x$ дистриб-ть $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$
б) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ $1 \cdot x = x$ $\forall x \in E$.

(3) дистрибутивность:
а) $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha x + \beta x$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$
б) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$

ОПР. Элементы $x_1, x_2, \dots x_m \in E$ лин. независимы, если $\left(\sum^m c_i x_i = 0\right) \Rightarrow \forall c_i = 0$, $i = \overline{1,m}$

Пр-ры: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $C(a,b)$ ← непр на (a,b) функции, $C[a,b]$, $D(a,b)$, $R[a,b]$

ОПР. ①] E - лин. пр-во. Функция $\|\cdot\|: x \in E \to \|x\| \in \mathbb{R}$ назыв. нормой на пр-ве E (пр. мн-во), если:
1) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in E$, причём $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (положит-ть нормы)
2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in E$ (нер-во Δ)
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

② Лин. пр-во E, снабжённое нормой, назыв. нормированным пр-вом.

Замеч: из требования 2) для нормы следует: $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$ $\forall x, y \in E$
$\Leftrightarrow -\|x-y\| \underset{②}{\leq} \|x\| - \|y\| \underset{①}{\leq} \|x-y\|$

▷ ①: $\|x\| \leq \|y\| + \|x-y\|$ $\Rightarrow$ 2): $x' := y$, $y' := x-y$, $\Rightarrow \|x'+y'\| \leq \|x'\| + \|y'\|$
②: $\|y\| \leq \|x-y\| \leq \|x\|$
$\|y\| \leq \|x\| + \|x-y\|$ — аналогично ◁

Пр-ры: 1) $\mathbb{R}$: $\|x\| = |x|$
2) $\mathbb{R}^2$: а) $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$
б) $\|(x,y)\| = |x| + |y|$
в) $\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$

ОПР.] E - нек. непустое мн-во. Ф-ция $\rho: (x,y) \in E \times E \to \rho(x,y) \in \mathbb{R}$ назыв. расстоянием на мн-ве E (метрикой), если
(1) $\rho(x,y) \geq 0$ $\forall x, y \in E$; $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметр)
(3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ $\forall x, y, z \in E$

Пр-во E, снабжённое метрикой, называется метрическим пр-вом.

Замечания

① $\rho(x,y) := \|x-y\|$ $\Rightarrow$ ~~$\forall$~~ нормир. пр-во можно превратить в метрическое
] E - норм. пр-во с нормой $\|\cdot\|$, тогда в нём можно ввести метрику $\rho(x,y) := \|x-y\|$ и оно станет метрич. пр-вом

② На $\forall$ мн-ве E можно ввести метрику $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

③ Не в $\forall$ метр. пр-ве можно ввести норму

$\mathbb{R}^2$
$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2|^{1/2} + |y_1 - y_2|^{1/2}$ — 3) св-во невыполн.

Опр Пусть E – лин. пр-во. Ф-ция $(\cdot,\cdot): (x,y)\in E\times E \to (x,y)\in\mathbb{R}$ назыв. **скалярным произведением** на E, если

1) $(x,x)\geq 0$, причём $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $\quad \forall x\in E$
2) $(x,y)=(y,x)$ симметр $\quad \forall x,y\in E$
3) $(\alpha x+\beta y, z) = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$ $\quad \forall x,y,z\in E,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ — линейность по 1ому арг + симм $\Rightarrow$ лин. по 2ому арг

Пр-во E, снабж. скал. пр-ием, назыв. **евклидовым пр-вом**

Замечание $\forall$ евкл. пр-во E можно превратить в нормированное, введя на нём норму: $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ $\Rightarrow$ из норм $\to$ метрическое
нер-во Δ из $T1, T2$

T1 **Нер-во Коши-Буняковского**
Пусть E – евклидово пр-во. Тогда $|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$ $\quad\forall x,y\in E$

▶ надо д-ть: $(x,y)^2 \leq (x,x)\cdot(y,y)$
при $x=0$ – очевидно! из 3 $\alpha=\beta=0$
$x\neq 0$. Тогда $0\leq(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y) = \alpha^2(x,x)+2\alpha\beta(x,y)+\beta^2(y,y)$
Пусть $\beta\neq 0$ $\Rightarrow 0\leq\beta^2\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2(x,x)+2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x,y)+(y,y)\right)$ $t := \frac{\alpha}{\beta}$ $\Rightarrow D\leq 0$

$\frac{D}{4} = D_1 = (x,y)^2-(x,x)(y,y)\leq 0 \Rightarrow (x,y)^2\leq(x,x)(y,y)$ ◀

T2 **Нер-во Минковского**
Если E – евкл. пр-во и $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, то $\forall x,y\in E$ $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y,x+y)}\leq\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$

▶ Рассмотрим
$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x)+2(x,y)+(y,y) \underset{T1}{\leq} (x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y) =$
$= \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$ ◀
$\Rightarrow \|x\| := \sqrt{(x,x)}$ – норма

пр-ры 1) $\mathbb{R}^n$, а) $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ – ск. произведение
б) $\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ – норма (ρ до 0)
в) $\rho(x,y) = \|x-y\|$

2) $C[a,b]$
$(f,g) := \int_a^b fg\,dx$ — неотриц – очевидно $\int_a^b f^2 dx$; симметр – очевидно; линейность – очевидно
$\|f\| := \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}$

сл-ие (нер-ва Коши-Буняковского и Минковского для интегралов)
Пусть $f,g\in C[a,b] \Rightarrow$
1) $\int_a^b fg\,dx \leq \left(\int_a^b f^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b g^2dx\right)^{1/2}$
2) $\left(\int_a^b (f+g)^2dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_a^b g^2dx\right)^{1/2}$

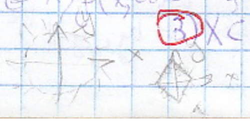
конец 15

3.04.15 Напоминание: X-мн $\Rightarrow$ 1) Нормир. пр-во $\Uparrow$ ✗
2) Евкл. пр-во

§2 Топология метрич. пр-ва
2.1 Окр-ти в метрич. пр-ве
Пусть X – пр-во, ρ – метрика $\Rightarrow (X,\rho)$ – метрич. пр-во
Например, $(\mathbb{R}^2,\rho_1)$, $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$ $\quad \rho_1 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, $\rho_2 = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$
Пусть $\tilde{X}\subset X$, ρ из (X,ρ) $\Rightarrow (\tilde{X},\rho)$ – метрич. подпр-во метр. пр. X

Опр (X,ρ) – метрич. пр-во, пусть $a\in X$. Тогда 1) **открытым шаром** назыв. $B(a,r) := \{x\in X / \rho(x,a)<r\}$, $r>0$
2) **замкн. шаром** назыв. $B[a,r] := \{x\in X/\rho(x,a)\leq r\}$, $r>0$

пр-ры 1) $X=\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $O_\delta(a) = B(a,\delta)$
2) $X=\mathbb{R}^2$, $x\in\mathbb{R}^2$, ρ – евкл. метр
$\rho(x,y) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$



3) $X\subset\mathbb{R}$, $X = (1,2)\cup\{3\}$, $\rho(x,y) = |x-y|$
$B(3,1/2) = \{3\}$
отк – к –

Опр 1' (3) мн-во $S(a,r) = \{x \in X \mid \rho(x,a) = r\}$ – сфера

Опр 2. $\exists a \in X$ – метр пр-во. Тогда (1) окр-тью т. a назыв $\forall$ шар $B(b,r) / a \in B(b,r)$. Обозн $O(a)$
2) центрир окр-тью т a назыв шар $B(a,r)$, $r>0$. Обозн $O_\delta(a)$
3) проколотая окр-ть $O(a) \setminus \{a\} = \mathring{O}(a)$

Пр-ры (1) $X = \mathbb{R}^n$, $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$. Тогда $O(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1-b_1)^2 + \dots + (x_n-b_n)^2} < r\}$ для нек $b \in \mathbb{R}^n$, $r>0$; причем $a \in O(a)$ – (шару $B(b,r)$)

(2) $X := C[a,b]$, $\|f\|_\infty = \max|f|$ (Т Вейерштр) $\Rightarrow \rho(f,g) := \|f-g\|_\infty$ $\forall$ функ пост-т связ
$\exists f_0 \in C[a,b]$. Тогда $B_{[a,b]}(f_0, r) = \{\varphi \in C[a,b] \mid \max_{[a,b]} |f_0(x) - \varphi(x)| < r\}$ полное

Др вариант: (3) $X = C[a,b]$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}$ – норм пр-ва $\Rightarrow \exists$ метр неполное

(Т) (св-ва окр-ти в метр пр-ве) $\exists (X, \rho)$ – метр пр-во, $a, b \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (1) $\forall O(a) \neq \varnothing$; (2) $\forall O(a) \ \exists \delta > 0 / O_\delta(a) \subset O(a)$; (3) $\forall O^{(1)}(a), \forall O^{(2)}(a) \ \exists O(a) / O(a) \subset O^{(1)}(a) \cap O^{(2)}(a)$
(3') $\forall O^{(k)}(a)$, $k = \overline{1,m}$ $\exists O(a) / O(a) \subset \bigcap_{k=1}^{m} O^{(k)}(a)$;
(4) принцип Хаусдорфа $\exists a \neq b \Rightarrow \exists O(a), \exists O(b) / O(a) \cap O(b) = \varnothing$;
(5) $b \in O(a) \Rightarrow O(a)$ – окр-ть т. b; 5') $\exists b \in \mathring{O}(a) \Rightarrow \exists O_\delta(b) / O_\delta(b) \subset O(a)$, $a \notin O_\delta(b)$

▷ (1) $O(a) \neq \varnothing$ т.к $a \in O(a)$
Замеч: $\mathring{O}(a) \neq \varnothing$ – неверно, в говоре (см Пр-р 3 $X = (1,2) \cup \{3\}$, $\mathring{O}_{\frac{1}{2}}(3)$)
(2) $\exists a \in X$, имеется $O(a) \Rightarrow$ по опр окр-ти $\exists b \in X / O(a) = B(b,r)$. $\exists \delta := \rho(a,b)$
Если $b = a$, то р-но; $\exists b \neq a \Rightarrow \delta > 0$. $\exists \delta_1 := r - \delta > 0$, т.к $a \in B(b,r)$.
$\exists x \in O_{\delta_1}(a)$; $\rho(x,b) \le \rho(x,a) + \rho(a,b) \le \delta_1 + \delta = r \Rightarrow x \in B(b,r) = O(a)$.
(3) $\exists$ имеются $O^{(1)}(a)$ и $O^{(2)}(a) \Rightarrow \exists O_{\delta_1}(a) \subset O^{(1)}(a)$ $\exists O_{\delta_2}(a) \subset O^{(2)}(a)$
Тогда, полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ получаем $O_\delta(a) \subset O_{\delta_1}(a) \cap O_{\delta_2}(a) \subset O^{(1)}(a) \cap O^{(2)}(a)$
(3') $\delta_1, \dots \delta_n$; $\delta = \min(\delta_1, \dots \delta_n)$ ...
(4) $\exists a \neq b$. $\exists \delta := \rho(a,b) > 0$ и $\exists \delta_1 = \frac{\delta}{3}$. Тогда $O_{\delta_1}(a) \cap O_{\delta_1}(b) = \varnothing$
(П): $\exists x \in O_{\delta_1}(a) \cap O_{\delta_1}(b)$: $\delta = \rho(a,b) \le \rho(a,x) + \rho(x,b) \le 2\delta_1 = \frac{2}{3}\delta$ (Р).
(5) $b \in O(a) \Rightarrow O(a)$ – окр-ть т. b по опр
(5') $\exists b \in \mathring{O}(a) \Rightarrow \exists \delta > 0 / O_\delta(b) \subset \mathring{O}(a)$ (т.к $O(a)$ = " $O(b)$ по 2)); $\delta_2 = \rho(a,b)$,
$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ Рассм $O_\delta(b)$. Имеем $O_\delta(b) \subset O_{\delta_1}(b) \subset O(a)$, при этом
$\rho(a,b) = \delta_2 \ge \min(\delta_1, \delta_2) = \delta \Rightarrow a \notin O_\delta(b)$ ◁

Теперь все т, исп пон окр-ти, из Т сем переносятся на данную тему

2.2 Открытые и замкнутые мн-ва в метр пр-ве

Опр 1. $\exists A \subset X$ т. $a \in X$ – внутр точка $A \Leftrightarrow \exists O(a) / O(a) \subset A$
Зам: обозн: $A_i := \{x \in A \mid x$ – внутр$\}$
(1) $a \in A_i \Rightarrow a \in A$
(2) $a \in A \not\Rightarrow^{б.г} a \in A_i$
(3) $A = X \Rightarrow X_i = X$. $O(a) = \{x \in X \mid \dots\}$
Опр 2 $A \subset X$. т. $a \in X$ – внешн т. $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists O(a) / O(a) \subset CA := X \setminus A$. Обозн: $A_e = \{x \in A \mid x$ – внешн$\}$
Зам (1) $a \in A_e \Rightarrow a \in CA$; (2) $A_e = (CA)_i$; (3) $a \in CA \not\Rightarrow^{б.г} a \in A_e$
Пр-ры: (1) $X = \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{N}_i = \mathbb{N}$
(2) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$; $\mathbb{N}_i = \varnothing$.
Опр 3 $\exists A \subset X$, $a \in X$. Тогда a – граничная т. $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall O(a)$, $O(a) \cap A \neq \varnothing$, $O(a) \cap CA \neq \varnothing$.
Обозн: $\partial A = \{a \in X \mid a$ – гран т. $A\}$
Опр 4 $A \subset X$, $a \in X$. Тогда a – т. прикосн $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall O(a)$, $O(a) \cap A \neq \varnothing$
Мн-во $\overline{A} = \{a \in X \mid a$ – т. прик$\}$ – замыкание A
Опр 5. $A \subset X$, $a \in X \Rightarrow$ a – пред точка $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \mathring{O}(a)$ $\mathring{O}(a) \cap A \neq \varnothing$
Мн-во $A' := \{x \in X \mid x$ – пред т$\}$ назыв пр-вод[производн] мн-ва
Замеч: $a \in \overline{A} \not\Rightarrow^{б.г} a \in A'$
"$\Leftarrow$" верно
▷ $\exists$ "$a \in A'$" $\Rightarrow \forall \mathring{O}(a)$ $\mathring{O}(a) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \forall O(a)$ $O(a) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow a \in \overline{A}$ ◁

Опр 6. $A \subset X$, $a \in X$. Тогда a – изолир $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists O(a) / O(a) \cap A = \{a\}$

(Т1) (1) $\overline{A} = A \cup \partial A$ A' ▷ ◁
(2) $C\overline{A} = A_e$

Опр 7. $A \subset X$, A - открыто $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A = A_0$

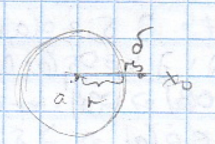
Сл-ие ① $\forall\ O(a)$ $O(a)$ - открытое мн-во ▶ — ◀
② $B(a, r)$ - откр мн-во

Опр 8. $A \subset X$, A - замкн $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A' \subset A$

Т2 ① $A' \subset A \Leftrightarrow A = \overline{A}$ (критерий замкнут) ▶ — ◀
② $A_0 = A \Leftrightarrow CA = \overline{CA}$ (крит откр-ти)

Т3 A - замкнуто $\Leftrightarrow$ CA - открыто
▶ — ◀

17.04.18 Пр-ры ① X - откр и замкн; $\varnothing$ - тоже
② $B(a, r)$ - открыт ▶ — ◀
$\Rightarrow O(a)$ - откр
③ $B[a, r]$ - замкнутое
▶ дост. д-ть, что $C(B[a,r])$ - открыто.
$\exists\ x_0 \in C\ (B[a,r])$



Положим $\delta_0 := \rho(a, x_0)$.
$\delta := \delta_0 - r > 0$
Рассмотрим произв $x \in B(x_0, \delta)$
Имеем: $\rho(a,x) \geq \rho(a, x_0) - \rho(x_0, x) = \delta_0 - \rho(x_0, x) \underset{>}{>} \delta_0 - \delta = r$

$\Rightarrow x \in C(B[a,r]) \Rightarrow B(x_0, \delta) \subset C(B[a,r])$ ◀

Т4
1) $A_k \subset X$, $k = \overline{1,m}$ (конечное число!), A_k - откр $\forall k = \overline{1,m}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{m} A_k$ - открыто (не переносится на кон. число!)

2) $A_k \subset X$, $k = \overline{1,m}$! (конечн), A_k - замкнуты $\forall k = \overline{1,m}$ $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ - замкнуто

▶ — ◀

Замеч. ① Т4 не верна в.г., если $m = \infty$ (см 1ый семестр)
② A_k - открыто, $\bigcup_{k=1}^{\infty (m)}$ (или A_α - откр $\forall \alpha$) $\Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha$ - открыто

A_α - замкн $\forall \alpha$ $\Rightarrow \bigcap_\alpha A_\alpha$ - замкнуто

Т5 $A \subset X \Rightarrow \overline{A}, \partial A, A'$ - замкнуты
▶ — ◀
Т6 $A \subset X \Rightarrow$ т. $a \in A' \Leftrightarrow \forall\ O(a)$, $O(a) \cap A$ содержит ∞ число точек.
▶ — ◀
Сл-ие: $A \subset X$, A - конечно $\Rightarrow A' = \varnothing$

516 § 3 Посл-ти в метрическом пр-ве „ф-ция" отобр в $\mathbb{R}$
„отобр" - в пр-ве X

3.1 Предел посл-ти

(X, ρ) - метр. пр-во

Опр $(a_n \in X, n \in \mathbb{N})$ - отоб-ие $n \in \mathbb{N} \to a(n) =: a_n \in X$ - посл-ть

Опр1 Посл-ть $(a_n \in X, n \in \mathbb{N})$ сх-ся к $a \in X$ (в метрике ρ) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\rho(a_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$ (чит сем. ρ-функция)

Обозн: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Сл-ие ① $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\, O(a)\ \exists\, N \in \mathbb{N} /\ a_n \in O(a)\ \forall n > N$.

② $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} / \rho(a_n, a) < \varepsilon \quad \forall n > N$

Замеч-я ① Напомним, что если X - линейное нормированное пр-во с нормой $\|\cdot\|$, то можно ввести метрику по ф-ле $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

② Две нормы в X $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ эквивалентны $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\, c, C > 0 / \ \|a\|_1 \leq C\|a\|_2$, $\|a\|_1 \geq c\|a\|_2$ $\forall a \in X)$

③ $\|a\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ экв-тны, то $a_n \to a$ по $\|\cdot\|_1 \Leftrightarrow a_n \to a$ по $\|\cdot\|_2$ (т.е. по соотв метрике)

④ Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Тогда нормы
$\|a\| := \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ (евклидова норма),
$\|a\|_1 := |a_1| + \ldots + |a_n|$,
$\|a\|_2 := \max\limits_{i=\overline{1,n}} |a_i|$
эквивалентны

Опр2. $A \subset X$; тогда A-огранич. $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, B(a,r) \subset X / \ A \subset B(a,r)$ или $B[a,r]$

Т. ① $\lim a_n = a$, $\lim a_n = b \Rightarrow a = b$
② (a_n) сх-ся $\Rightarrow$ (a_n) - огран.

§2 Фундаментальные посл-ти.

(X, ρ)

Опр 1 Посл-ть $(a_n \in X, n \in \mathbb{N})$ - фундамент п-ть $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} /$
$\rho(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N$

Т1 (a_n) сх-ся $\Rightarrow (a_n)$ - фундам.

Замеч (a_n)-фунд $\not\Rightarrow$ (a_n) - сх-ся в X.

Пример. $X = (a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N})$, $\rho(a,b) = |a-b|$
$\Rightarrow a_n$ - фундам, но a_n - не сх-ся в X $\left(\begin{matrix} 0 \notin X \\ \lim a_n \in \mathbb{R}\end{matrix}\right)$

Опр 2. Метрич. пр-во (X, ρ) - полное (Банахово) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ фунд. п-ть сх-ся (в метрике ρ)

Пр-р: $C[a,b]$ Норма $\|f\|_\infty = \max\limits_{[a,b]} |f|$ полное (док-во в 3ем сем); $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$ - неполное

Рассм евкл пр-во $\mathbb{R}^n$.

Т2 Пусть дана посл-ть $(a^{(m)} \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N})$. Тогда $(a^{(m)})$ сх-ся к a
$\Leftrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} a_i^{(m)} = a_i$, $i = \overline{1,n}$ $(a = (a_1, \ldots a_n))$,

① $\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} a^{(m)} = a \Rightarrow \rho(a^{m}, a) = \sqrt{(a_1^{(m)} - a_1)^2 + \ldots + (a_n^{(m)} - a_n)^2} \to 0$, $m \to \infty$ (о завис. пол-ти)

$\Rightarrow$ метрика $0 \leq |a_i^{(m)} - a_i| \leq \rho(a^{(m)}, a) \to 0$, $i = \overline{1,n} \Rightarrow |a_i^{(m)} - a| \to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim a_i^{(m)} = a_i$

② $\Leftarrow$ Пусть $|a_i^{(m)} - a_i| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $\varepsilon > 0$ пр-но $\Rightarrow \exists N_i \in \mathbb{N} / |a_i^{(m)} - a_i| < \varepsilon$

$m \geq N_i$ $(i = \overline{1,n})$. Положим $N = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{N_i\} \Rightarrow \rho(a^{(m)}, a) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (a_i^{(m)} - a_i)^2} <$
$< \sqrt{n\,\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{n} \quad \forall m > N$

Т3 Евклид. пр-во $\mathbb{R}^n$ (с евкл метрикой) полно!

▶] $(a^{(m)} \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N})$ - фундамент. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} / \rho(a^{(m)}, a^{(l)}) < \varepsilon\ \forall m, l > N$

расписать корень

$\Rightarrow \rho: |a_i^{(m)} - a_i^{(l)}| \leq \rho(a^{(m)}, a^{(l)}) < \varepsilon\ \forall m, l \geq N,\ \forall i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ для фикс. $i \in \{1, \dots, n\}$, посл-ть $(a_i^{(m)}, m \in \mathbb{N})$ - фундам. $\Rightarrow$ (Т Коши в $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{m\to\infty} a_i^{(m)} =: a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$ Т2 $\exists \lim\limits_{m\to\infty} a^{(m)} = a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ◀

5.17

§4. Предел отображения

4.1 Общие определения

Рассматриваем метр пр-ва (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2)

Опр (по Коши)] $f: A \to X_2$, $A \subset X_1$, $a \in A'$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in X_2 \overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall O(b)\ \exists O(a) / f(x) \in O(b),\ \forall x \in \mathring{O}(a) \cap A$

замеч. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (см усл опр) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \rho_2(f(x), b) < \varepsilon$ $\forall x \in A$ с усл $0 < \rho_1(x, a) < \delta$.

Опр Посл-ть $(a_n \in X_1, n \in \mathbb{N})$ - посл-ть Г., связ. с т. $a \in A \subset X_1 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

1. $a_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $a_n \neq a,\ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Опр (по Гейне) Усл опр по Коши $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in X_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall$ посл-ти Гейне (x_n), связ с т. a

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$

Т1 Опр по Коши и по Гейне эквивалентны

▶ ... ◀

Т2 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \Rightarrow b = c$ ▶ - ◀

[Рассмотрим евклид пр-во $\mathbb{R}^n$ и рассмотрим отобр-ие $f: x \in X \to f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$

$f_i(x)$ - скалярные ф-ции

В этом случае говорят, что задана вектор-ф-ция $f = (f_1, \dots, f_n)$

Тогда из Т2 §3, п 3.2 $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ в (X, ρ) $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

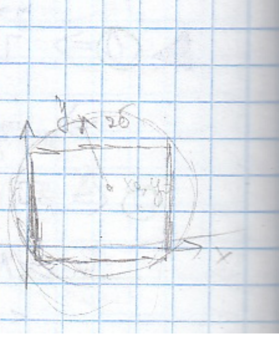
4.2 Ф-ции 2х переменных. Двойные и повторные пределы

(X_1, ρ_1) (X_2, ρ_2)

частн. случай $X_1 = \mathbb{R}^2$ с евкл. метр. $X_2 = \mathbb{R}$

] $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A_0$

$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \in \mathbb{R}$ (1) наз двойным пределом



Повторные пределы:

$(x_0, y_0) \in A_0 \Rightarrow \exists O_{2\delta}(x_0, y_0) \subset A$

$\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset O_{2\delta}(x_0, y_0) \subset A$

$\forall y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$ фиксированного рассм фию перем x: $f(\cdot, y): x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \to f(x,y) \in \mathbb{R}$

Предположим, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) =: \varphi(y)$, $\forall y \in \mathring{O}_{\delta_1}(y_0)$, для нек $\delta_1 \in (0, \delta]$

и $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{y\to y_0} \{ \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \} = \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ (2) – повторный предел

Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ (3)

20.04.18

! Зам-я ① $\exists (1) \overset{\text{в г.}}{\not\Rightarrow} (\exists(2)) \vee (\exists(3))$

Пр-р: $f(x,y) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}, (x,y) \neq 0; \ y \neq 0 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

Тогда $|f(x,y)| \leq |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow \exists (1)$

Но $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ $\forall y \neq 0$ $(y \in \mathring{O}_{\delta_1}(0)) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$

Аналогично $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$

② $\exists (2),(3) \overset{\text{в г.}}{\not\Rightarrow} ((2)=(3)) \vee (\exists (1))$

Например: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

$\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$: $f(x,x) \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$ #

$f(x,0) \to 1$

③ $\exists (2)=(3) \not\Rightarrow \exists (1)$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

$\lim\limits_{y\to 0} \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}}_{0} = \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\lim\limits_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}}_{0} = 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{x=y}{=} \frac{1}{2}$ #

$\overset{y=0}{=} 0$

T (дост. усл $\exists$ повторного предела)

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x_0,y_0) \in A_0$ и вып. усл-ия

- $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b \in \mathbb{R}$ (4)
- $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $\forall y \in \mathring{O}_{\delta_1}(y_0)$ для нек $\delta_1 > 0$ (5)

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = b$ (6)

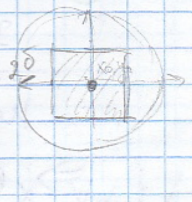
▶ (4) $\varepsilon\delta$ $\lim\limits_{x\to x_0} \to$ (5)

(4) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |f(x,y) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall (x,y) \in \mathring{O}_{2\delta}(x_0, y_0) (\cap A)$ (7)

предположение, что внутр

Заметим, что $(x_0 - 2\delta/2, x_0+\delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset O_{2\delta}(x_0, y_0)$

$\mathring{O}_\delta(x_0) \times \mathring{O}_\delta(y_0) \subset \mathring{O}_{2\delta}(x_0,y_0)$



$\Rightarrow$ определена ф-ция $f(\cdot, y): O_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathring{O}_\delta(y_0)$

Усл (5), положим $\delta_0 := \min(\delta_1, \delta)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ $\forall y \in \mathring{O}_{\delta_0}(y_0)$

модуль держит пределы

$\Rightarrow$ перейдем к $\lim\limits_{x\to x_0}$ в (7): $|f(x_0,y) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall y \in \mathring{O}_{\delta_0}(y_0)$ (8)

В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \ / \ (8) \ f(x_0, y) \Rightarrow \exists \lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0} b = b \Rightarrow (6)$ ◀

§5 Непрерывные отображения в метрич. пр-вах

5.1 (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2)

ОПР. $f: A \subset X_1 \to X_2$, $a \in A$. Тогда $f \in C(a) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, O(f(a))\ \exists\, O(a) / f(x) \subset O(f(a))$, $\forall x \in O(a) \cap A$

Можно написать эквив. опр, заменяя $O(f(a))$ на $O_\varepsilon(f(a))$ и $O(a)$ на $O_\delta(a)$ и в терминах метрик

(T1) (пред. крит. непр-ти в точке)

$f: A \to X_2$, $a \in A' \cap A$. Тогда $f \in C(a) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

▶ — ◀ (a — изол $\Rightarrow$ всегда непр)

(T2) (непрерывность композиции)

(X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2), (X_3, ρ_3) — метрич. пр-ва; $A \subset X_1$, $B \subset X_2$,

$a \in A$, $b \in B$; $f: A \to B$, $f(a) = b$; $g: B \to X_3$, причём $f \in C(a)$, $g \in C(b)$

Тогда $g \circ f \in C(a)$

▶ 1) Имеем: $g \in C(b) \Rightarrow \forall\, O(g(b))\ \exists\, O(b) / g(y) \in O(g(b))\ \forall y \in O(b) \cap B$

2) для выбранной $O(b) = O(f(a))$ $\exists\, O(a) / f(x) \in O(b) \cap B$, $\forall x \in O(a) \cap A$
т.к. $f \in C(a)$; т.к. $f(A) \subset B$

В итоге, $\forall\, O(g(b))\ \exists\, O(a) / g(\underbrace{f(x)}_{y}) \in O(g(\overset{\parallel}{b}))$ $\forall x \in O(a) \cap A$ ◀
$f(a)$; подчер

Остальные локальные локальные св-ва непр-ти функц в точке доказываются самостоятельно

лок огр, сохр sgn, арифм опер

(Λ). $\exists\, (a_n \in A \subset X_1, n \in \mathbb{N}) / \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in A$, $\exists\, f: A \to X_2$, $f \in C(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

▶ — ◀ изол не надо — повт-ся в посл-ти

5.2 Непрерывность отображения на мн-ве

ОПР 1 $f: X_1 \to X_2$, $A \subset X_1$. Тогда $f \in C(A) \overset{def}{\Leftrightarrow} f \in C(a)\ \forall a \in A$.

ОПР 2 $f: X_1 \to X_2$, $B \subset X_2$
Полный прообраз мн-ва B при отобр f: $f^{-1}(B)$ — обозначение. (отобр f^{-1} не сущ)

$$f^{-1}(B) = \{x \in X_1 / f(x) \in B\}$$

(T) (критерий непр-ти отобр на всём пр-ве).

$\exists\, f: X_1 \to X_2$

$f \in C(X_1) \Leftrightarrow \forall$ открытого мн-ва $B \subset X_2$ полный прообраз $f^{-1}(B)$ — открыт.

▶ 1) $\Rightarrow \exists\, f \in C(X_1)$, $\exists\, B \subset X_2$, B — откр (произвольное). Надо д-ть, что $f^{-1}(B)$ откр

$\exists\, x_0 \in f^{-1}(B)$ Надо проверить, что $\exists\, O(x_0) / O(x_0) \subset f^{-1}(B)$

$\exists\, y_0 = f(x_0) \in B$ (по опред полного прообраза), B — откр $\Rightarrow \exists\, O(y_0) / O(y_0) \subset B$

Но $f \in C(x_0) \Rightarrow$ для выбранной $O(y_0) = O(f(x_0))$ $\exists\, O(x_0) / f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$
непр-ть (Λ)

$\Rightarrow O(x_0) \subset f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(B)$ — открыто

2) $\Leftarrow$ Предпол. $\forall B \subset X_2$ B-откр, $f^{-1}(B)$ — откр.

Надо д-ть: $f \in C(X_1)$, т.е.

$\exists\, x_0 \in X_1$. Имеем: $\forall\, O(f(x_0))$ — открытое мн-во в $X_2 \Rightarrow$ по условию

$f^{-1}(B)$ — открыт, но $x_0 \in f^{-1}(\overbrace{B}^{=B}) \Rightarrow \exists\, O(x_0) / O(x_0) \subset f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(O(x_0)) \subset B = O(f(x_0))$

В итоге $\forall\ O(f(x_0))\ \exists\ O(x_0) \subset X_1 / f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$ ◄

Зам: $f: X_1 \to X_2 \Rightarrow \forall\ B \subset X_2 \quad Cf^{-1}(B) = f^{-1}(CB)$

► $x \in f^{-1}(CB) \Leftrightarrow f(x) \in CB \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in Cf^{-1}(B)$. ◄

Сл-ие $f: X_1 \to X_2$ Тогда $f \in C(X_1) \Leftrightarrow \forall\ B \subset X_2 / B$ — замкнуто, $f^{-1}(B)$ — замкнут.

► 1) $\Rightarrow$] $f \in C(X_1)$. Рассмотрим произв $B \subset X_2$ — B-замкнутое
Имеем CB — открыто; $\overset{}{\underset{T}{\Rightarrow}}$ $f^{-1}(CB)$ — открыт $\Leftrightarrow$ $Cf^{-1}(B)$ — открыт $\Rightarrow$
или $Cf^{-1}(CB) = f^{-1}(CCB) = f^{-1}(B)$ замкн
$\Rightarrow f^{-1}(B)$ замкнут.

2) $\Leftarrow$ $\forall\ B \subset X_2 / B$ — замкн (CB — открыто) $f^{-1}(B)$ замкн. $\Rightarrow Cf^{-1}(B) = f^{-1}(CB)$ — открыт
$\Rightarrow$
Рассм произв $\hat{B} \subset X_2$, $\hat{B}$ — откр тогда $C\hat{B} \subset X_2$ $C\hat{B}$ — замкн $\overset{по\ усл}{\Rightarrow}$
$f^{-1}(C\hat{B})$ замкн $\Rightarrow$ $Cf^{-1}(C\hat{B})$ — откр $= f^{-1}(CC\hat{B}) = f^{-1}(\hat{B})$ — откр
$\Rightarrow$ т.к. B — произв откр в X_2 $\underset{T}{\Rightarrow}$ $f \in C(X_1)$ ◄

Зам-я: 1) $f: X_1 \to X_2$ $\quad f \in C(X_1) \overset{в.2}{\not\Rightarrow} \forall$ откр $A \subset X_1$ $f(A)$ — откр
Например, $f(x) = \sin x$, $x \in (0, 2\pi)$
$f((0, 2\pi)) = [-1, 1]$.

2) $f \in C(X_1) \underset{в.2}{\not\Rightarrow} \forall$ замкн. $A \subset X_1$, $f(A)$ — замкн.

$tg\, x$
$tg([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \mathbb{R}$
$tg\, x \quad arctg\, x$

$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ ← замкн и откр.

[ ] $\quad [\ ]_{n}^{1/n} \quad$ [ ]

5.3 Непрерывные вектор-функции

] (X, ρ) — метрич пр-во, и задано отобр-ие.
$f: A \subset X \to \mathbb{R}^n$, т.е. задана вектор-ф-ция;
$f(x) = (f_1(x), \dots f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, $x \in A \subset X_1$.

Теор. $f: A \subset X \to \mathbb{R}^n$ Тогда $f \in C(A) \Leftrightarrow f_k \in C(A)$, $k = \overline{1, n}$

► Рассмотрим $x_0 \in A$ произв
1) x_0 — изол т. A. Верно
2) $x_0 \in A \cap A'$
Тогда (прер. кр. непр-ти) $\qquad$ Т. о сх-ти в $\mathbb{R}^n$.
$f \in C(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f_k(x) = f_k(x_0)$, $k = \overline{1, n}$

$\Leftrightarrow f_k \in C(x_0)$, $k = \overline{1, n}$ ◄

§6. Компактность

6.1 Определение и осн. св-ва компакта.

Опр.] (X, ρ) — метрическое пр-во, $K \subset X$. Система мн-в $\{V_\alpha \subset X, \forall \alpha\} /$ V_α — откр, $\forall \alpha$ и $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha \supset K$, называется открытым покрытием K

Опр.] $K \subset X$; тогда K — компактное мн-во (компакт) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ откр. покрытия мн-ва K можно выделить конечное подпокрытие.

Пр-ры: ~~(1)~~ $A = \{x_1, \dots x_m\}$
~~(2)~~ $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (Л 5-Л)

(1) $A \subset X$; $a \in A' \Leftrightarrow \exists (x_n \in A \setminus \{a\}, n \in \mathbb{N}) / \lim_{n\to\infty} x_n = a$

▷ (1) $\Rightarrow$ $\exists a \in A'$ $\forall \varepsilon = \frac{1}{n}$ $\mathring{O}_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_n \in \mathring{O}_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$. $(\forall n)$

Рассмотрим $(x_n \in A, x_n \neq a)$, причём $0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \to 0$
т.о задана п-ть
$\Rightarrow$ $\rho(x_n, a) \to 0 \Rightarrow x_n \to a$.

(2) $\Leftarrow$ Предп. $\exists (x_n \in A \setminus \{a\}, n \in \mathbb{N}) / x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ (посл-ть Гейне)
Д-м, что $a \in A'$
Рассм. произв. $O(a)$, $\exists O_\varepsilon(a) \subset O(a)$
По усл. $\Rightarrow$ для выбр. $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N} / \rho(x_n, a) < \varepsilon, \forall n > N$.
$\Rightarrow \exists x_{N+1} \in \mathring{O}_\varepsilon(a) \subset \mathring{O}(a) \cap A$ $\Rightarrow \mathring{O}(a) \cap A \neq \varnothing$ ◀
по опред. посл-ти

T1 (о $\exists$ пред. точки)
Пусть $K \subset X$, K-компакт, $A \subset K$, A-беск. мн-во
$K \supset A$
$\Rightarrow A' \cap K \neq \varnothing$.

▷ [П]: $A' \cap K = \varnothing$.
$\exists x_0 \in K$, произв. $\Rightarrow x_0 \notin A' \Rightarrow \exists O(x_0) / \mathring{O}(x_0) \cap A = \varnothing$.
Рассм теперь соотв.-щую {окр-тей} $\{O(x), x \in K\}$ - открытое покрытие K. Тогда (т.к. K-компакт) $\exists$ конечное подпокрытие.
$\{O(x_k), k = \overline{1,m}\}$, $\bigcup_{k=1}^{m} O_k \supset K \supset A$
Итак, $A \subset \bigcup^{m} O_k$
при этом $A \cap \mathring{O}_k = \varnothing$ $\Rightarrow$ число эл-тов из $A \leq m \Rightarrow$ [P] ◀

T2. Ограниченность и замкнутость компакта
Пусть $K \subset X$, K-компакт. $\Rightarrow K$-огр и замкн.

$\not\subset$ 6.2

▷ (1). Д-жем, что K- огр. $\exists$ $x_0 \in K$, пр-но. Рассмотрим шары $\{B(x_0, n), n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, n) \supset K}$: пусть $x \in K, x \notin B(x_0, n) \forall n$
$\Rightarrow \rho(x, x_0) \geq n$ $\forall n$ $\Rightarrow \rho(x, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ [P].

K-компакт $\Rightarrow \exists$ конечное п/п-ие $\{B(x_0, n_k), k = \overline{1,m}\}$
Не огр. общности, $n_1 < n_2 < \dots < n_{max} = n_m$
$\Rightarrow \underline{B(x_0, n_{max})} = \bigcup_{k=1}^{m} B(x_0, n_k) \underline{\supset K}$ $\Rightarrow$ K-огранич

(2) Д-жем, что K-замкнуто, т.е CK-откр
Дост д-ть, что CK-откр. Пусть $y_0 \in CK$. Надо д-ть, что $\exists O(y_0) \subset CK$
Фиксируем $x_0 \in K$. Тогда $x_0 \neq y_0 \in CK \Rightarrow \exists O(x_0)$ и $\exists O(y_0) /$
$O(x_0) \cap O(y_0) = \varnothing$

Рассмотрим откр. покр-ие K $\{O(x), x \in K\}$, $\forall O(x)$ $\exists O(y_0) / O(x) \cap O(y_0) = \varnothing\}$
K-компакт $\Rightarrow \exists$ конечное п/п-ие
$\{O(x_k), k = \overline{1,m}\}$ $\forall k$ $\exists O^{(k)}(y_0) / O(x_k) \cap \underbrace{O^{(k)}(y_0)}_{\exists O_{\varepsilon_k}(y_0)} = \varnothing$

$\forall k = \overline{1,m}$ $O(x_k) \cap O_{\varepsilon_k}(y_0) = \varnothing$, $\varepsilon_k > 0$

Положим $\varepsilon = \min_{k=\overline{1,m}} \varepsilon_k$ $\Rightarrow$ $O(x_k) \cap O_\varepsilon(y_0) = \varnothing \Rightarrow O_\varepsilon(y_0) \cap \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m} O(x_k)}_{\supset K} = \varnothing$

$\Rightarrow O_\varepsilon(y_0) \subset CK$ ◀

Т3 (компактность замкнутого подмн-ва компакта) 27.04.18

$K \subset X$, K - компакт, $A \subset K$, A - замкнуто $\Rightarrow$ A - компакт.

▶ $\exists \{V_\alpha\}$ - открытое покрытие A

Имеем: $A \cup CA = X$, причём CA - открыто, т.к. A - замкнуто

$\Rightarrow \{V_\alpha, CA\}$ открытое покрытие $X \Rightarrow \{V_\alpha, CA\}$ - открытое покрытие K;

K - компакт $\Rightarrow$ $\exists$ конечное подпокрытие $\{V_\alpha, CA\}$ - $\{V_{\alpha_k}, CA;\ k=\overline{1,m}\} =: V$.

Но $K \supset A \Rightarrow V$ - покрытие и K, и A, причём $CA \cap A = \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \{V_{\alpha_k}, k=\overline{1,m}\}$ - конечное открытое подпокрытие A ◀

§6.2 Компактность в $\mathbb{R}^n$

Опр. Мн-во $I \in \mathbb{R}^n$ вида $I = \{x \in \mathbb{R}^n / a_i \le x_i \le b_i,\ a_i < b_i,\ i=\overline{1,n}\}$ называем n-мерной клеткой. (брусом, параллелепипедом, промежутком)

С-ма клеток $\{I_m\}$ - сист. вложенных клеток $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $K_{m+1} \subset K_m$ - клетки

Т1 (о системе влож. клеток)

$\exists \{I_m, m \in \mathbb{N}\}$ - с-ма влож. клеток $\Rightarrow \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} I_m \neq \varnothing$ (и если стяг., то $\cap = 1$ точке ▶-◀)

▶ Имеем: $I_m = \{x \in \mathbb{R}^n / a_i^{(m)} \le x_i \le b_i^{(m)}, i=\overline{1,n}\}$

$[a_i^{(m+1)}, b_i^{(m+1)}] \subset [a_i^{(m)}, b_i^{(m)}]$, $i=\overline{1,n}$. $\Rightarrow$ для $i=1$ Т о системе влож. отрезков:

$\exists c_1 \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} [a_1^{(m)}, b_1^{(m)}]$

...

$\exists c_n \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} [a_n^{(m)}, b_n^{(m)}]$

$\Rightarrow c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} I_m$ ◀

Т2. Компактность n-мерной клетки

I - n-мерная клетка в $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow I$ - компакт.

▶ П: $\exists I$ - n-м. клетка, I - не компакт $\Rightarrow \exists$ открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ клетки I, из V нельзя выделить конечное подпокрытие (I : $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$)

Каждый отрезок $[a_i, b_i]$ поделим пополам, $i=\overline{1,n}$.

$\Rightarrow$ получаем разбиение клетки $I =: I_1$ на 2^n меньших клеток

Хотя бы одна из этих меньших клеток не допускает конечного подпокрытия (иначе вся I_1 допускает кон-н/п-ие). Обозн. её $I_2 (\subset I_1)$

Продолжая этот процесс, получаем с-му влож. клеток $\{I_m, m \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \exists c \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} I_m$ (по Т1) $\Rightarrow$ в част., $c \in I \Rightarrow \exists \alpha / c \in V_\alpha$ - открытое!

$\Rightarrow \exists O(c) / O(c) \subset V_\alpha$

взять min. д-ия

Но $\exists m / I_m \subset V_\alpha \Rightarrow I_m$ покр-ся одним мн-вом $V_\alpha \Rightarrow$ $\boxed{P}$ ◀

Т3 Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$

$K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда K - компакт $\Leftrightarrow$ (K-огр.) $\wedge$ (K - замкнуто)

▶ 1) $\Rightarrow$ K-компакт $\Rightarrow$ см 6.1 Т3

2) $\Leftarrow$ $\exists K$-огр и замкнуто. Имеем: т.к. K-огр, то $\exists$ n-мерная клетка $I / K \subset I$ ($\exists$ шар $\Rightarrow \exists$ кл. $\supset$ шар)

Но I-компакт (Т2), K-замкнуто $\Rightarrow$ K-замкн. подмн-во компакта $\Rightarrow$

$\Rightarrow K$ - компакт по 6.1 Т3. ◀

$\cap O(y_0) = \varnothing\}$

$(x_0, r) \forall n$

$O(x_k) \neq \varnothing$

$\supset K$

§7. Непрерывность функций на компакте в $\mathbb{R}^n$

Т1 $K\subset\mathbb{R}^n$, K-компакт, $f: K\to\mathbb{R}$, $f\in C(K)$. Тогда

1) $f\in B(K)$
2) $\exists x_1,x_2\in K$ / $f(x_1)=\sup\limits_K f$ (max), $f(x_2)=\inf\limits_K f$

▶ (1) $\exists x\in K$ пр-но. Имеем: $f\in C(x)$ по усл.
$\Rightarrow \exists O(x)$ / $|f(x)|\le M(x)$ (заменяет в $O f(x_0)$)
$\Rightarrow$ получаем откр. покр. K вида $\{O(x), x\in K\}$, причем $\forall \bar{x}\in O(x)$ $|f(\bar{x})|\le M(x)$
Но K-компакт $\Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие $\{O(x_k), k=\overline{1,m}\}$, где $\sup\limits_{O(x_k)}|f|\le M_k := M(x_k)$

Положим $M:=\max\limits_{k=\overline{1,m}} M_k \Rightarrow \forall x\in K$, $|f(\bar{x})|\le M$

(2) Д-м, что $\exists x_1\in K$ / $f(x_1)=\sup\limits_K f$ $\boxed{П}$: $\forall x\in K$ $f(x)<\sup\limits_K f =: M$

Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$, $x\in K$ $\Rightarrow g\in C(K)$

п.1) $\Rightarrow$ $0<g(x)\le M_1$ $\forall x\in K$ (непр=огр)

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\frac{1}{M-f(x)}}_{>0}\le \underbrace{M_1}_{>0}$ $\Rightarrow$ $M-f(x)\ge\frac{1}{M_1}>0 \Rightarrow f(x)\le M-\frac{1}{M_1}\Rightarrow M$-не $\sup\limits_K f$ $\boxed{P}$
$\forall x\in K$

Аналогично с $\inf\limits_K f$ ◀

ОПР. $\exists A\subset\mathbb{R}^n$, $f: A\to\mathbb{R}$ (можно для метр. пр-в) Тогда f-равном. непр на $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ /
$|f(x^{(1)})-f(x^{(2)})|<\varepsilon\ \forall\ x^{(1)},x^{(2)}\in A$, с усл $|x^{(1)}-x^{(2)}|<\delta$ (евкл ρ).

Т2 $K\subset\mathbb{R}^n$, K-компакт, $f: K\to\mathbb{R}$, $f\in C(K)\Rightarrow f$ равном. непр на K

▶ Имеем: $f\in C(x)$ $\forall x\in K$.
$\exists\ \varepsilon>0$ - произвольно. Рассмотрим пр-ую фиксир. точку $x\in K$
$\Rightarrow \forall_K$ $f\in C(x)$, то $\exists\delta=\delta(\varepsilon,x)$ / $|f(\bar{x})-f(x)|<\varepsilon/2$ (!) $\forall\ \bar{x}\in O_{2\delta}(x)\cap K$

Т.о. получаем откр. покрытие K $\{O_\delta(x), x\in K\}$, но K-компакт $\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists$ конечное подпокр-ие $\{O_{\delta_k}(x_k), k=\overline{1,m}\}$, где $\delta_k=\delta(x_k,\varepsilon)$.

Рассмотрим пр-но $x,y\in K$ / $|x-y|<\delta:=\min\limits_{k=\overline{1,m}}\delta_k$ (*)

Имеем: $\exists k$ / $x\in O_{\delta_k}(x_k)\Rightarrow |x-x_k|<\delta_k$. Рассм. y: имеем $|y-x_k|\le \overbrace{|y-x|}^{<\delta}_{\delta<\delta_k}+\underbrace{|x-x_k|}_{<\delta_k}<2\delta_k\Rightarrow$

$\Rightarrow y\in O_{2\delta_k}(x_k)(\cap K)$

$\Rightarrow |f(y)-f(x)|\le \underbrace{|f(y)-f(x_k)|}_{y\in O_{2\delta_k}(x_k)}+\underbrace{|f(x_k)-f(x)|}_{x\in O_{\delta_k}(x_k)\subset O_{2\delta_k}(x_k)}\overset{см (!)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ / $|f(y)-f(x)|<\varepsilon\ \forall\ x,y\in K$ с усл $|x-y|<\delta$ ◀

Можно перенести для любых метр. пр-в

§8. Связные мн-ва в $\mathbb{R}^n$ и непр-ть

ОПР. I-промежуток в $\mathbb{R}$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ (или отрезок) $\vee$ (или интервал) $\vee$ (или полуинт-л)

ОПР 1. $\exists$ I-промежуток в $\mathbb{R}^n$. Отображение $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$ назыв. путём $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\varphi\in C(I)$

ЗАМ. Имеем путь $\varphi: [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\varphi(\alpha)$ - нач. пути, $\varphi(\beta)$ - конец пути

ОПР 2. $\exists A\subset\mathbb{R}^n$. Тогда A-(линейно) связно (в $\mathbb{R}^n$) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\ a,b\in A$ $\exists$ путь $\varphi: [\alpha,\beta]\to A$ / $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$

(T.) $\exists\, A \subset \mathbb{R}^n$, A – связно; $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in C(A)$, и $\exists\, a, b \in A \,/\, f(a) < f(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall M \in (f(a), f(b)) \;\exists\, c \in A \,/\, f(c) = M$.

▶ $a, b \in A$, $f(a) < f(b)$. Имеем: A – связно $\Rightarrow \exists$ путь $\varphi: [\alpha, \beta] \to A \,/\, \varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. $(a \neq b$, т.к. $f(a) < f(b))$. Положим $g(t) := f(\varphi(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Т.к. $f \in C(A)$, $\varphi \in C[\alpha, \beta] \xRightarrow[\text{непр. функций}]{\text{т. о суперпоз.}}$ (суперпозиция непр. ф-ий) $g \in C[\alpha, \beta] \xRightarrow[\text{I сем}]{\text{т. о пром. зн.}} \exists\, \gamma \in (\alpha, \beta) \,/\, g(\gamma) = f(\boxed{\varphi(\gamma)}) = M$, при этом $g(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(a)$, $g(\beta) = f(b)$.
$=: c \in A$.

Полагая $c = \varphi(\gamma) \in A$ (по опр. φ – пути), получаем утв. Т. ◀

4.05.18 **Глава 2 Дифференциальное исчисление функций многих переменных.**

§22

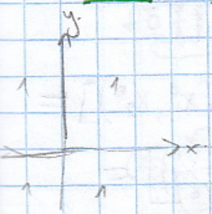
§1 Производные и дифференциалы первого порядка

1.1. Частные производные (первого порядка)

ОПР. $A \subset \mathbb{R}^n$, $A_i = A$ (A – открыто), $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$. Тогда $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)} :=$
$x^0 = (x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0)$

$$:= \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}}$$ (если этот предел $\exists$)

ЗАМ. $\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\; \forall k = \overline{1,n} \overset{\text{в 2}}{\not\Rightarrow} f \in C(x^0)$



$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\overset{0}{f(0+h, 0)} - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Но $f \notin C(0,0)$ (в I сем: $\exists f'(x_0) \Rightarrow f \in C(x_0)$)

1.2 Дифференциал первого порядка

ОПР. $A \subset \mathbb{R}^n$, $A = A_i$, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$. Тогда f дифференцируема в т. x^0
$(f \in \mathcal{D}(x^0)) \overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(\exists\, O(x^0), \exists\, A_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n} \,/$ $f(x) - f(x^0) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k (x_k - x_k^0) + \bar{o}(\|x - x^0\|)$, $x \to x^0$ (неважно)
$A \subset \mathbb{R}^n$ $A \subset \mathbb{R}^n$
$\forall x \in \dot{O}(x^0) (\cap A)$

Выражение $\boxed{\sum\limits_1 A_k (x_k - x_k^0)}$ (главная линейная часть приращения $(x - x^0)$) называется **дифференциалом** функции f в т. x^0, обозн: $d\, f(x^0)$

Пишут $df(x^0) = \sum\limits_{1}^{n} A_k \, dx_k$

(T1). Условие из ОПР дифер. функции (здесь и далее)
$f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow f \in C(x^0)$

▶ $x^0 \in A = A_i \Rightarrow x^0 \in A' \Rightarrow \{f \in C(x^0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x^0} f(x) = f(x^0)\}$
Имеем, т.к. $f \in \mathcal{D}(x^0)$, $f(x) - f(x_0) = \underbrace{df(x^0)}_{\to 0,\, x \to x^0} + \underbrace{\bar{o}(\|x - x^0\|)}_{\to 0,\, x \to x^0} \underset{x \to x_0}{\to} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f \in C(x^0)$ ◀

ЗАМ. $f \in C(x^0) \overset{\text{в 2}}{\not\Rightarrow} f \in \mathcal{D}(x^0)$ $(f = |x|)$.

(T2) $f \in \mathcal{D}(x^0) \Rightarrow \exists\, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\; \forall k = \overline{1,n}$, причём $df(x^0) = \sum\limits_{1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \cdot dx_k$ (1)

▶ Для опр. $k = 1$. Имеем: $\dfrac{f(x_1^0 + h, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h} \overset{f \in \mathcal{D}(x^0)}{=} \dfrac{A_1 h + \bar{o}(|h|)}{h} = A_1 + \bar{o}(1) \underset{h \to 0}{\to} A_1$

$\Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = A_1$

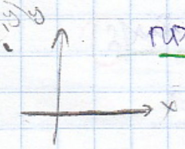
и т.д. $\Rightarrow$ утв. т. вместе с равен(1)

сл-ие $f \in D(x^0) \Rightarrow df(x^0) = \sum\limits_{1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)\, \underset{x_k - x_k^0}{dx_k}$

Зам. $\exists$ все частн. произв. $\overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}$ $f \in D$

см п 1.1 пример - по Т1 т.к. произв. разрывна, то $f \notin D$.

Зам. $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \in \mathbb{R} \ \forall k = 1,2, \ \forall x^0 \in \mathbb{R}^2 \\ f \in C(\mathbb{R}^2) \end{array}\right\} \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} f \in D(x^0) \ \forall x^0 \in \mathbb{R}^2$



пр-р $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$. $\forall xy \neq 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\operatorname{sgn} x\, |y|^{1/2}}{2|x|^{1/2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\to} 0$ ($x>0$, $x<0$)

При этом $f \notin D(0,0)$. (Б.с.п. $f \in D(0,0)$) $f(x,x) - f(0,0) = 0 + |x| \neq \bar{o}(|x|)$ [P]

Т3 Достаточное условие дифф-ти в точке

$A \subset \mathbb{R}^n$, $A = \mathring{A}$, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$. Пусть выполнены условия:

1) $\exists O(x^0)$, $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ $\forall x \in O(x^0)$, $\forall k = \overline{1,n}$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C(x^0)$ $\forall k = \overline{1,n}$

▶ Рассмотрим $n=2$ (аналогично для $\forall n > 2$) $f \in C$

Имеем $f(x_1,x_2) - f(x_1^0,x_2^0) = [f(x_1,x_2) - f(x_1,x_2^0)] + [f(x_1,x_2^0) - f(x_1^0,x_2^0)] =$

$\overset{\text{Т Лагр}}{=} \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2^0 + \theta_2(x_2 - x_2^0)) \cdot (x_2 - x_2^0)\right] + \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1(x_1 - x_1^0), x_2^0)(x_1 - x_1^0)\right] =$ $\theta_2 \in (0,1)$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1 - x_1^0) + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2 - x_2^0) + \underset{\text{при } x \to x^0}{\bar{o}(1)}\left[(x_1 - x_1^0) + (x_2 - x_2^0)\right]$ ($\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C(x^0)$)

(эквив. норм) $\leq |x_1 - x_1^0| + |x_2 - x_2^0| \leq C\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} = C\|x - x^0\|$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{2} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0) + \underset{x \to x^0}{\bar{o}(\|x - x^0\|)} \Rightarrow f \in D(x^0)$ по опр. ◀

дифф-ть вектор ф-ции

Опр 2 $A \subset \mathbb{R}^n$, $A = \mathring{A}$, $x^0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$ ($f = (f_1, \dots, f_m)$)

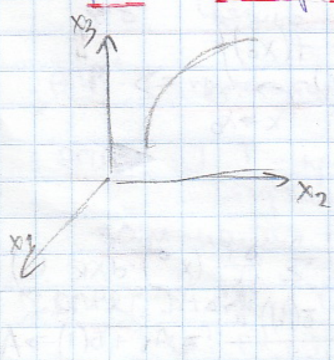
$f \in D(x^0) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f_k \in D(x^0)$, $k = \overline{1,m}$

Матрица $\left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right\|_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ — назыв. матрицей Якоби

$\exists$ $m=n$! $\Rightarrow$ $\det \left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right\|$ назыв. якобианом

конец б22

1.3. Геометрический смысл дифференциала



Фикс. т. $(x_1^0, x_2^0) \in \mathring{A} = A$, $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

рассм. пл-ть проходящую через т. $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0)) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, это пл-ть

$$x_3 = x_3^0 + A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) =: L(x)$$

Опр Пл-ть $x_3 = L(x)$ называем касат. пл-тью к графику ф-ции f в т. $(x_1^0, x_2^0, x_3^0 = f(x_1^0, x_2^0))$, если $\exists O(x_1^0, x_2^0)$ | $f(x_1,x_2) - \underset{x_3}{f(x_1^0,x_2^0)} - A_1(x_1 - x_1^0) - A_2(x_2 - x_2^0) = \underset{x \to x^0}{\bar{o}(\|x - x^0\|)}$ $\forall x \in O(x_1^0, x_2^0)$

(т.е. касание пл-ти порядка выше 1-го)

Опр 1 $\exists f \in D(x^0)$ $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $A_0 = A$, $x^0 \in A$
Тогда кас пл-тью к графику f в т x^0 назыв пл-ть

$$x_{n+1} = x_{n+1}^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)(x_k - x_k^0)$$

Опр 2. Усл опр 1
Нормалью к пов-ти $x_3 = f(x_1, x_2)$ в т. $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$ при условии $f \in D(x_1^0, x_2^0)$ назыв прямая, прох. через эту точку, $\parallel$ в-ру $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0), -1\right)$

§23

§2 Дифференцирование сложной функ

Т $A = A_i \subset \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A$, $B = B_i \subset \mathbb{R}^m$, $b \in B$; $f: A \to B$, $f(x^0) = b$, $f \in D(x^0)$
$g: B \to \mathbb{R}$, $g \in D(b)$

$\Rightarrow h := g \circ f \in D(x^0)$ дифф-ть композиции

▷ Предп, что $n = m = 2$ для простоты (для других случаев аналогично)
Надо д-ть: $\exists O(x^0) /$ $h(x) - h(x^0) = A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \bar{o}(\|x - x^0\|)$, $\forall x \in O(x^0)$ (1) $x \to x^0$

Имеем: $h(x) - h(x^0) = g(f(x)) - g(\underbrace{f(x^0)}_{=b}) \overset{g \in D(b)}{=} \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x^0))[f_1(x) - f_1(x^0)] +$
$+ \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x^0))[f_2(x) - f_2(x^0)] + \bar{o}(\|f(x) - f(x^0)\|)$ для y $\exists O(b)$ и $\exists O(x^0)$, $f(x) \to f(x^0)$, $A \to B \in \mathbb{R}^{m=2}$ $= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x^0))\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) +\right.$
$\left.+ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + \bar{o}(\|x - x^0\|)\right] + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_0))\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + \bar{o}(\|x - x^0\|)\right] +$
напр $\sqrt{(\ )^2 + (\ )^2}$, $|\ | + |\ |$, $\max(|\ |, |\ |)$
$+ \underbrace{\bar{o}(|f_1(x) - f_1(x^0)| + |f_2(x) - f_2(x^0)|)}_{= \bar{o}(\|x - x^0\|)\ \text{лин выраж}}$ $\ominus$

$\ominus \overbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x^0)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x^0)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0)\right)}^{A_1}(x_1 - x_1^0) + \overbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x^0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x^0)) \times\right.}^{A_2}$
$\left.\times \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0)\right)(x_2 - x_2^0) + \bar{o}(\|x - x^0\|)$ при сложной мат опер $\Rightarrow h \in D(x^0)$

$\Rightarrow$ получаем (1), причем $A_1 = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x^0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x^0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^0) = \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^0)$

$A_2 = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x^0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x^0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^0) = \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^0)$ ◁

Сл-ия 1 (инвар-ть 1го дифф-ла)
Усл Т $\Rightarrow$ $\boxed{dh(x^0)} = d(g \circ f)(x^0) = \boxed{\frac{\partial g}{\partial y_1}(\ ) df_1(\ ) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(\ ) df_2(\ )} + \ldots$ $f(x^0)$ x^0 $f_1 = y_1(x_1, x_2)$

2 Усл Т $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_1}} = \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_1} = \boxed{\frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}}$

$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_2}} = \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_2} = \boxed{\frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}}$

В общем случае $\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(\ ) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\ )}$ $i = \overline{1, n}$

3 a) $d(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha\, df_1 + \beta\, df_2$, $f_1, f_2 \in D(x^0)$, f_1, f_2 $\underset{= A_i}{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ▷ — ◁
б) $d(f_1 f_2) = f_2 df_1 + f_1 df_2$ ▷ — ◁ анал б)
в) $d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{(f_2)^2}$ if $f_2(x^0) \neq 0$

▷ $g(y) := \frac{y_1}{y_2}$, $y_2 \neq 0$, $f := (f_1, f_2)$: $O(x^0) \to f(O(x^0)) \subset \mathbb{R}^2$
Предположим $f_1, f_2 \in D(x^0)$. $T \Rightarrow dh = d(g \circ f) = \boxed{d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \overset{сл 1}{=} \frac{\partial g}{\partial y_1} df_1 +$
$+ \frac{\partial g}{\partial y_2} df_2 = \frac{1}{y_2 = f_2(x^0)} df_1 + \left(-\frac{y_1}{y_2^2}\right) df_2 =$ $\frac{f_1}{f_2}(x_0)$

$$= \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{(f_2(x^0))^2}$$ ◄

§3 Производная по направлению. Градиент.

Опр 1. $f: O(x^0) \to \mathbb{R}$ (открытое), $x^0 \in \mathbb{R}^n$, и пусть $l := (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \dots, \cos\alpha_n)$, $\|l\| = 1$.
Тогда $\frac{\partial f}{\partial l}(x^0) := \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(x^0 + lt) - f(x^0)}{t}$, если этот $\lim$ $\exists$.

Т $f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $f \in D(x^0)$, $l = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial l}(x^0) = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \cos\alpha_i$ (1)

► $\left(\lim\limits_{t\to 0}\right) \frac{f(x^0 + lt) - f(x^0)}{t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \cos\alpha_i t}{t} + \frac{\bar{o}(|t|)}{t} \Rightarrow$ пр. часть (1) при $t \to 0$ ◄

Опр 2. $f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$, $i = \overline{1,n}$
Тогда вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(x^0)$ назыв. **градиентом** функции f в т. x^0

Обозн. $\operatorname{grad} f$, ∇f

Сл-ие Усл. Т $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}(x^0) = (\operatorname{grad} f(x^0), l) = |\operatorname{grad} f(x^0)| \cdot \cos\varphi}$, где φ - угол между $\operatorname{grad} f$ и l

$\Rightarrow \max\limits_{l} \frac{\partial f}{\partial l}$ принимается для $l = \frac{\operatorname{grad} f(x^0)}{|\operatorname{grad} f(x^0)|}$ $(l \uparrow\uparrow \operatorname{grad} f(x^0))$

$\min\limits_{l} \frac{\partial f}{\partial l}$ приним. при $l = -\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$ $(l \uparrow\downarrow \operatorname{grad} f)$

$\delta 24$

§4 Производные и дифференциалы высших порядков

4.1 Теорема о смешанных пр-ых.

$\exists x^0 \in \mathbb{R}^n$, $f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\forall x \in O(x^0)$ для нек. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Тогда $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)} := \boxed{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x^0)}$, для нек. $j \in (1, \dots, n)$, если эта пр-ая $\exists$

Если $i \neq j$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ наз. смеш. пр-ой (иначе - прямой)

Обозн. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$

Вопрос: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$, если $i \neq j$?

Пр-р $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{если } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$ (1)

Имеем: $y \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,y) - \overset{=0}{f(0,y)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$

$y = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{=0}{f(x,0)} - \overset{=0}{f(0,0)}}{x} = 0$

$\Rightarrow$ (1) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y - 0}{y} = -1$

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} - \lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}}{x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1 \Rightarrow f''_{yx} \neq f''_{xy}$

Т1 (р-во смеш. пр-вых — Шварц)

$f: O(x^0) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \in C(\cancel{O}(x^0))$? для нек $i,j \in \{1 \ldots n\}$, $i \neq j$

$\Rightarrow f \in \mathcal{D}$ нужен?

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$

Не огр. общности, сч. $n=2$, $i=1$, $j=2$.

▶ Рассмотрим выражение:

$F(h) = F(h_1, h_2) := f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2) - f(x_1^0+h_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0+h_2) + f(x_1^0, x_2^0)$ (2)

1) Положим: $\varphi(t) := f(x_1^0 + t h_1, x_2^0 + h_2) - f(x_1^0 + t h_1, x_2^0)$, $t \in [0,1]$

Тогда $F(h) = \varphi(1) - \varphi(0) \underset{\text{т.Л.}}{=} \varphi'_t(\theta_1)(1-0) = \varphi'_t(\theta_1) = \Big\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underbrace{x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + h_2}_{\text{есть в } O(x^0)}) -$

$- \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0)\Big\} \cdot h_1 =$

$\in C$ по x_1? да, т.к есть пр-ая

$\overset{\text{Л}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + \theta_2 h_2) \cdot h_2 \cdot h_1$ (3)

$\exists$ в окр-ти

непр-ть пр-ат не нужна

$g(b) - g(a) = g'(a + \theta(b-a))(b-a)$

$\exists g'$ в (a,b); $g \in C$

$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$ непр по x_2? да, т.к $\exists$ пр-ая

$\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$

$\boxed{\text{Тут требуется пока } \in C(x^0)}$ (пот. Л)

2) Положим $\psi(t) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + t h_2) - f(x_1^0, x_2^0 + t h_2)$ $t \in [0,1]$

$F(h) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'_t(\tilde{\theta}_2) = \Big\{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + \tilde{\theta}_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0 + \tilde{\theta}_2 h_2)\Big\} h_2 =$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^0 + \tilde{\theta}_1 h_1, x_2^0 + \tilde{\theta}_2 h_2) \cdot h_1 h_2$ (4)

3) (3)–(4): $F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + \theta_2 h_2) h_1 h_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^0 + \tilde{\theta}_1 h_1, x_2^0 + \tilde{\theta}_2 h_2) h_1 h_2$

для нек $\theta_1, \theta_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in (0,1)$ $\quad h_1, h_2 \neq 0$

Итак, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^0 + \tilde{\theta}_1 h_1, x_2^0 + \tilde{\theta}_2 h_2)$

$\to \lim_{h_1, h_2 \to 0} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ т.к $\in C(x^0)$! ◀

Итак, ф-ка: $f: O(x^0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}: O(x^0) \to \mathbb{R}$ для нек $i,j \in \{1 \ldots n\}$ $i \neq j$ $\exists$ и опред в $O(x^0)$

Причём, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \in C(x^0) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$

Пр-р: Рассм. дифф. ур-ие в частн. пр-х:

$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) = f(x)$ (*), $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\boxed{\Omega - \text{обл-ть} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\Omega - \text{откр}) \wedge (\Omega - \text{связно})}$

т.е и все первые и все вторые пр-ые $\in C(\Omega)$

$u: \Omega \to \mathbb{R}$ назыв (классич.) реш-ем (*) $\Leftrightarrow (u \in C^2(\Omega)) \wedge (u \text{ удовл. } (*))$

Не огр. общности, можем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$, $i \neq j$

В с.р. имеем $a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = (\underbrace{a_{ij} + a_{ji}}_{=: 2a^*_{ij}}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $= 2a^*_{ji}$

Обозн: $\exists k_i \in \mathbb{N}^* := \{0\} \cup \mathbb{N}$, $i = 1 \ldots n$

- $\boxed{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс
- $\boxed{|k|} = k_1 + \ldots + k_n$ — модуль
- $\boxed{k!} = k_1! k_2! \ldots k_n!$ — факториал

$\cdot\ x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{x^k} := x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$

$\cdot\ \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} =: \boxed{\partial_k f}$

ОПР ① $A = A_i \subset \mathbb{R}^n$; $f: A \to \mathbb{R}$; $\underset{m \ge 0}{f \in C^m(A)} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \partial_k f(x)\ \forall x \in A,\ \forall k: |k| \le m$,
причём $\partial_k f \in C(A), \forall k, |k| \le m$

② $\underset{A\text{-огр} \subset \mathbb{R}^n \text{ (не обяз)}}{f \in C^m(\bar{A})} \Leftrightarrow (f \in C^m(A)) \wedge (\exists \lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \in \partial A}} \partial_k f,\ \forall x^0 \in \partial A)$
(A-компакт)

T1' (Обоб. т. Шварца) $A = A_i \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^m(A)$, $m \ge 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ в пр-ых $\partial_k f$ с $|k| = m$ порядок аргументов произвольный

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_{\sigma(1)}^{k_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{\sigma(n)}^{k_{\sigma(n)}}}$$

T2 Юнг
$f: O(x^0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\exists \partial_i f, \partial_j f: O(x^0) \to \mathbb{R}$, для нек $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \ne j$,
причём $\partial_i f \in D(x^0)$, $\partial_j f \in D(x^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ смешанные пр-ые $\partial_{ij} f = \partial_{ji} f(x^0)$

▶ X ◀ Архипов, Садовн, Чубариков, 123

Замеч. $T1 \overset{?}{\Rightarrow} T2$

усл. Юнга $\exists \frac{\partial f}{\partial x_1}: O(x^0) \to \mathbb{R}$
$\exists \frac{\partial f}{\partial x_2}: O(x^0) \to \mathbb{R}$
$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \in D(x^0)$ если смеш прои вт.

$\not\Rightarrow$ нет $\partial^2 \notin C(x^0)$

$T2 \overset{?}{\Rightarrow} T1$
$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}}_{C(x^0)}: O(x^0) \to \mathbb{R}$
$\partial^2 \in D$ прямые пр-ые не обяз $\exists$

4.2 Дифференциалы высших порядков

ОПР1 $f: A \to \mathbb{R}$, где $A = A_i \subset \mathbb{R}^n$, $f \in D(A)$, $x^0 \in A$. Тогда $\boxed{f \in D^2(x^0)} \overset{def}{\Leftrightarrow} df \in D(x^0)$ (определён). Обозн: $f \in D^2(x^0)$.

зам. $df(x) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$ ($x_i - x_i^0$, приращ) $\Rightarrow \boxed{d^2 f(x^0)} = d\left[\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i\right](x^0) = \sum \frac{\partial}{\partial x_j}[\ ](x^0)\, dx_j = \boxed{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)\, dx_i dx_j}$ (т. Юнга)

Замеч-я. ① $A = A_i \subset \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in D^m(A)$, $m \ge 1 \Rightarrow f \in D^{m+1}(x^0) \overset{def}{\Leftrightarrow}$
$d^m f(x), x \in A$, $d^m f \in D(x^0)$ (опр-но)

② $f \in D^2(x^0) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in D(x^0)$, $i = \overline{1, n}$

Вообще, $f \in D^m(x^0)$, $m \ge 2 \Leftrightarrow \partial^k f \in D(x^0)$, $\forall k: |k| = m - 1$

$\left(df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i \quad \exists d^2 f(x^0) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in D(x^0), i = \overline{1,n} \right)$

③ $f \in D^2(x^0) \Rightarrow$ см. зам. 2 и т. Юнга $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \ne j$

Вообще, $f \in D^m(x^0)$, $m \ge 2 \Rightarrow$ пр-е $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $|k| = m$ не зависят от порядка дифф-ия

④ $f \in D^2(x^0) \Rightarrow d^2 f(x^0) = d(df)(x^0) = d\left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\right)\right](x^0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)\, dx_i dx_j =$

$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)\, dx_i dx_j \overset{\text{символич. ф-ла!}}{=} \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(x^0)$

В частности, если $n = 2$ $d^2 f(x^0) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 f(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x^0)(dx_1)^2 +$

$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x^0)\,dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x^0)\,dx_2^2$

по индукции ▶—◀

Вообще, $d^m f(x^0) \overset{?}{=} \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} \partial^k f(x^0)\, dx_1^{k_1} \ldots dx_n^{k_n} \overset{\text{см Л1 ниже}}{=} \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(x^0)$, $m \geq 2$; симв. ф-ла

⑤ $d^m f$, если $m \geq 2$, не обладает, в г., св-вом инвариантности формы

▶—◀ (см I сем)

Л1. (обобщение ф-лы бинома Ньютона)

$x \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,\ m \geq 1 \Rightarrow (x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} \underbrace{x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}}_{x^k}$

(пр: $(x_1+x_2)^2 = \sum_{|k|=2} \frac{2!}{k!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \frac{2!}{2!}x_1^2 + \frac{2!}{1!\,1!} x_1 x_2 + \frac{2!}{2!} x_2^2$, $k = (2,0), (0,2), (1,1)$)

▶ Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n)$, причём $|l| = m$.

Заметим, что $(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|k|=m} A_k\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow m! = \partial^l \left[(x_1 + \ldots + x_n)^m\right] = \sum_{|k|=m} A_k \left[\prod_{i=1}^n k_i (k_i - 1) \ldots (k_i - l_i + 1)\right] \cdot x_1^{k_1 - l_1} \ldots x_n^{k_n - l_n}$

$k_i \geq l_i$ — иначе 0

Имеем: $\begin{cases} l_1 + \ldots + l_m = m = k_1 + \ldots + k_n \\ k_i \geq l_i \end{cases} \Rightarrow k_i = l_i \Rightarrow k = l$

Поэтому $m! = A_l \cdot k! \cdot 1 \Rightarrow A_l = A_k = \frac{m!}{k!}$ ◀

Л2. $f: O(x^0) \to \mathbb{R},\ x^0 \in \mathbb{R}^n,\ f \in \mathcal{D}^s(O(x^0)),\ s \geq 1$.

$F(t) = f(x^0 + t\underbrace{(x - x^0)}_{h}) = f(x^0 + th)$, $-\delta < t < (1+\delta)$, $\delta > 0$; h — дост. мало (т.е. при всех нас t: $x^0 + th \in O(x^0)$)

Тогда $F^{(s)}(t) = \sum_{|k|=s} \frac{s!}{k!} \underbrace{h^k}_{:= h_1^{k_1} \ldots h_n^{k_n}} \partial^k f(x^0 + th)$ (1)

▶ Имеем:

$F^{(s)}(t) = \sum_{|k|=s} \overset{?}{B_k}\, h^k \cdot \partial^k \overbrace{f(x^0 + th)}^{F(t)}$ (2)

Заметим, что B_k (!) $\boxed{\text{не зависит от } f}$ (т.к. там $x^0 + th$ — лин. зависим.)

В частности, пусть $f(x) = e^{x_1 + \ldots + x_n}$

$f(x^0 + th) = e^{x_1^0 + \ldots + x_n^0} \cdot e^{t(h_1 + \ldots + h_n)}$ $\overset{\text{в этом случае}}{\Rightarrow}$ $F^{(s)}(t) \overset{?}{=} \sum_{|k|=s} e^{x^0 + th} (h_1 + \ldots + h_n)^s \overset{Л1}{=}$

$\overset{\text{см (2)}}{=} \sum_{|k|=s} B_k h^k \underbrace{\partial^k f(x^0 + th)}_{e^{x^0 + th}} = \sum_{|k|=s} \frac{s!}{k!} h^k \partial^k e^{x^0 + th}$

$\Rightarrow B_k = \frac{s!}{k!}$ ◀

4.3 Ф-ла Тейлора

Т.1 (Тейлор с ост. чл. в форме Лагранжа) — посмотреть при $n=1$

$x^0 \in \mathbb{R}^n,\ f: O_\varepsilon(x^0) \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{D}^{m+1}(\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x^0))$ (без прокола), $m \geq 0$ $\Rightarrow f(x) = \overbrace{f(x^0) + \sum_{s=1}^m \sum_{|k|=s} \frac{\partial^k f(x^0)}{k!} (x - x^0)^k}^{P_m} +$

$$+\boxed{\sum_{|k|=m+1}\frac{\partial^k f(x^0+\theta(x-x^0))}{k!}(x-x^0)^k}, \theta\in(0,1), \forall x\in O_\varepsilon(x^0) \quad (1)$$

$=: r_m(x)$

▶ Положим $F(t):=f(x^0+th)$, где $h=x-x^0$, $-(1+\delta)<t<(1+\delta)$

надо: $|th|\le\varepsilon \Rightarrow (1+\delta)|h|\le\varepsilon$, $1+\delta\le\frac{\varepsilon}{|h|}$, $\delta:=-1+\frac{\varepsilon}{|h|}$ (лучше $-1+\frac{\varepsilon}{2|h|}$)

$(\in O_\varepsilon(x^0))$

То дифф-ть сложной функции, поэтому openть в усл без проколов

Тогда $F(t)\in D^{m+1}(1+\delta, 1+\delta)$

$F(0)=f(x^0)$, $F(1)=F(x^0+h)$. $\xRightarrow{\text{опр }\Phi(n),\ n=1}$ $F(1)-F(0)=\sum_{s=1}^{m}\frac{d^sF(0)}{s!}\cdot 1+\frac{d^{m+1}F(\theta)}{(m+1)!}$, $\theta\in(0$

$F^{(s)}(0)$

$$\overset{\wedge 2 \, n.2_m}{=}\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}\sum_{|k|=s}\frac{s!\,f^{(k)}(x^0)}{k!}h^k_{\;h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n}}+\sum_{|k|=m+1}\frac{(m+1)!\,f^{(k)}(x^0+\theta h)}{(m+1)!\,k!}(x-x^0)^k$$ ◀

Сл-е ① усл Т1 $\Rightarrow$ $f(x)=f(x_0)+\sum_{1\le|k|\le m}\frac{\partial^k f(x^0)}{k!}(x-x^0)^k+r_m(x)=$

$$=\underbrace{\sum_{|k|\le m}\frac{\partial^k f(x^0)}{k!}(x-x^0)^k}_{P_m(x)\ (\text{без } f(x^0))}+r_m(x)$$

② См л 1

усл Т1 $\Rightarrow$ $\forall x\in O_\varepsilon(x^0)\ \exists\theta\in(0,1)/\ f(x)=f(x^0)+\sum_{s=1}^{m}\boxed{\frac{1}{s!}\sum_{|k|=s}\frac{s!}{k!}\partial^k f(x^0)(x-x^0)^k}+$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\sum_{|k|=m+1}\frac{(m+1)!}{k!}\partial^k f(x^0+\theta(x-x^0))(x-x^0)^k \underset{\substack{h:=x-x^0\\ \text{символ. ф-ла}}}{\overset{\wedge 2}{=}} f(x^0)+\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}(h_1\partial_1+\dots+h_n\partial_n)^s f(x^0)+$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}(h_1\partial_1+\dots+h_n\partial_n)^{m+1}f(x^0+\theta h)$$, где $\partial_i f(x):=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

ОБОЗН: $\underset{x\to x^0}{\bar{o}}(\|x-x^0\|^m):=\alpha(x)\cdot\|x-x^0\|^m$, где $\alpha(x)\underset{x\to x^0}{\to}0$

$\delta 28$

Т2 (Т-П) $f: O(x^0)\to\mathbb{R}$, $x^0\in\mathbb{R}^n$, $f\in D^m(x^0)$, $m\ge 1$

$\Rightarrow\exists\varepsilon>0/\ f(x)=f(x^0)+\sum_{1\le|k|\le m}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x^0)(x-x^0)^k+\underset{x\to x^0}{\bar{o}}(\|x-x^0\|^m)$ (2)

▶ ① $m=1$ (2) $\Leftrightarrow$ $f(x)=f(x^0)+\sum_{|k|=1}f^{(k)}(x^0)(x-x^0)^k+\bar{o}(\|x-x^0\|)=f(x^0)+$

$\exists O_\varepsilon(x^0)/\ \forall x\in O_\varepsilon(x^0)$

$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i-x_i^0)+\underset{x\to x^0}{\bar{o}}(\|x-x^0\|)$ — верно по опр $\in D(x^0)$

② $m\ge 2$

$P_m(x)=f(x^0)+\sum_{1\le|k|\le m}\frac{1}{k!}\partial^k f(x^0)(x-x^0)^k$

а) $(\partial^l P_m)(x^0)=(\partial^l f)(x^0)$, $0\le|l|\le m$

В с.ф: $\cdot\ |l|=0$ $P_m(x^0)=f(x^0)$

$\cdot\ |l|\in\overline{1,m}$ $(\partial^l(x-x^0)^k)\big|_{x=x^0}=\begin{cases}0, & \text{если } l\ne k \quad (l_i\ne k_i)\\ l_1!\dots l_n!=l!, & \text{если } l=k\end{cases}$

б) $g(x):=f(x)-P_m(x)$, $x\in O_\varepsilon(x^0)/\ f\in D^{m-1}(O_\varepsilon(x^0))$

т.к. m раз дифф в точке

Имеем: $g\in D^{m-1}(O_\varepsilon(x^0))$, $m-1\ge 1$ ($m\ge 2$ по усл 2))

$\partial^k g(x^0)\overset{\text{см п а)}}{=}0$, $|k|\le m$

$\overset{Т1}{\Rightarrow}$ $g(x)=g(x^0)+\sum_{1\le|k|\le m-2}\frac{\partial^k g(x^0)}{k!}(x-x^0)^k+\sum_{|k|=m-1}\frac{\partial^k g(x^0+\theta(x-x^0))}{k!}(x-x^0)^k$

0 (если $m-2\ge 0$) 0

Но $g \in \mathcal{D}^m(x^0) \Rightarrow \partial^k g \in \mathcal{D}(x^0),\ |k| \leq m-1. \Rightarrow \partial^k g(x^0+\theta(x-x^0)) =$

$= \underbrace{\partial^k g(x^0)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\partial_i \partial^k g(x^0)}_{=0\,(\text{см } a)} \cdot (x_i - x_i^0) + \bar{o}(\|x-x^0\|),\ x \to x^0$

Поэтому $g(x) = \sum_{|k|=m-1}' \bar{o}(\|x-x^0\|) \cdot \|x-x^0\|^{m-1} \cdot \frac{(x-x^0)^k}{\|x-x^0\|^{m-1}} = (\bar{o}(1) \cdot \|x-x^0\|) \cdot \|x-x^0\|^{m-1} =$ (const)

$= \bar{o}(\|x-x^0\|^m)$. ◀

не будет в билете

Т3 (ф-ла Т с ост. чл. в интегр. форме) Зорич с535.

§5. Локальный экстремум функций многих переменных.

Опр $A \subset \mathbb{R}^n$, $x^0 \in A^i$, $f: A \to \mathbb{R}$. Тогда

1) x^0 – т. лок. max (min) для f $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, O(x^0) / f(x) \leq f(x^0)\ (\geq)\ \forall x \in O(x^0)$.

2) x^0 – т. строго лок. max (min) для f $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, O(x^0) / f(x) \underset{>}{<} f(x^0)\ \forall x \in \overset{\circ}{O}(x^0)$.

3) x^0 – т. лок. extr (строго или нет) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ (x^0 – т. лок (строг) max) $\vee$ (x^0 – т. лок (строг) min)

Т. Ферма

Т1 (необх. усл. лок. extr). (пример – I сем + важен для $n \geq 2$)
$f: A \to \mathbb{R}$, $x^0 \in A^i$, $\exists\, \partial_i f(x^0)$, $i = \overline{1,n}$, x^0 – т. лок. extr $\Rightarrow \partial_i f(x^0) = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$

▶ Не огр. общности: x^0 – т. лок. min.
Положим для $i \in \{1, \dots n\}$. $F(x_i) := f(x_1^0, \dots x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots x_n^0)$.
Имеем: $\cdot \exists\ \underbrace{F'(x_i^0) = \partial_i f(x^0)}_{\text{по опр. ч. произ.}}$

$\cdot\ F(x_i) - F(x_i^0) \geq 0 \quad \forall x_i \in O_\delta(x_i^0)\ \delta > 0$ т.к. x^0 – т. лок. min

$\Rightarrow x_i^0$ – т. л. экст для $F: x_i \to \mathbb{R} \overset{\text{Т Ферма}}{\Rightarrow} F'(x_i^0) = 0 \Rightarrow \partial_i f(x^0) = 0$ ◀

Сл-ие ① $f \in \mathcal{D}(x^0) \overset{\text{все проще}}{\Rightarrow}$ ∃ x^0 – т. extr $\Rightarrow \partial_e f(x^0) = 0$ $\forall$ напр $l = (\cos\alpha_1, \dots \cos\alpha_n)$

▶ $\partial_e f(x^0) =' \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \underbrace{\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}}_{=0}}_{\text{может не } \exists\text{, если взять просто усл Т1}} = 0$ ◀

② Усл Т1 $\Rightarrow \operatorname{grad} f(x^0) = \vec{0}$

Замеч. Необх усл сущ extr не явл достаточным

Пр-р: $z = f(x,y) = y^2 - x^2$

$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

Но $f(x,0) = -x^2$ $(0,0)$ – т. max капитт

$f(0,y) = y^2$, $(0,0)$ – т min

Сл-ие (т Пеано) Усл Т2 (Т/П) $\Rightarrow$ $n=2$, т.е $f \in \mathcal{D}^2(x^0)$

$\Rightarrow \exists\, O(x^0) / \forall x \in O(x^0)\quad f(x) = f(x^0) + \sum_{1 \leq |k| \leq 2} \frac{\partial^k f(x^0)(x-x^0)^k}{k!} +$

$+ \bar{o}(\|x-x^0\|^2) = f(x^0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)(x_i - x_i^0)}_{|k|=1.\ \ df(x^0,\, x-x^0)} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \cdot (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}_{(2,0),\ (0,2),\ (1,1)\quad d^2 f(x^0,\, x-x^0)} +$

$+ \bar{o}(\|x-x^0\|^2)$ при $x \to x^0$

(12) (достаточное усл. строгого экстр.) $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{x^0} \in A$; $f: A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}^2(x^0)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = 0$, $i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ (1) Если кв. форма $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)\, h_i h_j$ (*) положит. определена (отриц), то x^0 — т. лок. min (max) (необх. — условие строгого!) (т. Лок.)

(2) Если кв. форма (*) меняет знак, то x^0 — не явл. т. лок. экстр.

$\Rightarrow$ 1) Не ограничивая общности, предположим, что (*) положит. определена

Т. (Тейлора/Пеано) $\wedge$ (grad $f(x^0) = \vec{0}$) $\Rightarrow$ $f(x^0+h) - f(x^0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j +$ (нет первого дифференциала)

или $\underset{h \neq 0}{f(x^0+h) - f(x^0)} = \|h\|^2 \cdot \frac{1}{2}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{h_i}{\|h\|}\frac{h_j}{\|h\|} + \bar{o}(\|h\|^2)$, $h \to 0$ (уточнение)

$+ \bar{o}(1), h \to 0\Big\}$ (1)

$\exists\, O(x^0)$ / где справедливо представл.

$\bar{o}(\|h\|^2) = \underset{\to 0}{\alpha(h)}\|h\|^2$.

Пусть $S := \{h \in \mathbb{R}^n / \|h\| = 1\}$ — ед. сфера — компакт (т.к. огр. и замкн. в $\mathbb{R}^n$)

Пусть $g(h) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) h_i h_j$, $\|h\| < \delta$, $g \in C(S)$ ($\widehat{C(\mathbb{R}^n)}$), причём

$g(h) > 0$, $\forall h: \|h\| \neq 0$ (по усл. теоремы) $\Rightarrow$ $g|_S > 0$ (нет 0)

$\Rightarrow$ $\exists$ $m := \min_{h \in S} g(h) > 0$. (из непр-ти)

Поэтому (см. (1)) $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \underbrace{\frac{h_i}{\|h\|} \cdot \frac{h_j}{\|h\|}}_{\frac{h}{\|h\|} \in S} + \underset{h \to 0}{\bar{o}(1)} \geq m + \underset{h \to 0}{\bar{o}(1)} \geq \frac{m}{2}$ если $\|h\| < \delta$ — дост. малого.

В итоге, $\|h\| < \delta \Rightarrow$ $f(x^0 + h) - f(x^0) \geq \frac{m}{2}\|h\|^2 \cdot \frac{1}{2} > 0$ если $\|h\| \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists\, O_\delta(x^0) / f(x) > f(x^0)$ $\forall x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x^0)$ $\Rightarrow$ x^0 — т. строгого лок. min

(2) Предположим, что кв. ф. (*) меняет знак $\Rightarrow$ $\exists\, h^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $h^{**} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ /

$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) h_i^{(*)} h_j^{(*)} > 0$

$\sum$ — " — $h_i^{**} h_j^{**} < 0$.

Тогда $\exists\, \bar{h}^*$ и $\bar{h}^{**} = \frac{h^*}{\|h^*\|}, \frac{h^{**}}{\|h^{**}\|} \in S$ / см (1) $\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$ меняет знак на S

Но $\exists\, \bar{h}^{(min)} \in S / g(\bar{h}^{(min)}) = \min g =: m < 0$

и аналог. $\exists\, \bar{h}^{(max)} \in S / g(\bar{h}^{(max)}) = \max_S g := M > 0$

Имеем: $m < 0 < M$

Положим $\begin{cases} h^{(1)} := t\,\bar{h}^{min}, & t \in (0,\delta) \\ h^{(2)} := t\,\bar{h}^{max}, & t \in (0,\delta) \end{cases}$ δ — мало.

Тогда $f(x^0 + \underset{\text{норма} - t\cdot 1}{h^{(1)}}) - f(x^0) = \frac{1}{2}t^2\Big\{\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \bar{h}_i^{(min)} \cdot \bar{h}_j^{(min)}}_{m<0} + \underset{t \to 0}{\bar{o}(1)}\Big\} < 0$

$\forall t \in (0, \delta^*)$, δ^* дост. мало

$f(x^0 + h^{(1)}) - f(x^0) < 0$, если $0 < |t| < \delta^*$

x^0

С др. стороны (аналогично) $f(x^0 + h^{(2)}) - f(x^0) = \frac{t^2}{2}\{\sum \text{—} + \bar{o}(1)\} \geq \frac{t^2}{2}(M + \bar{o}(1)) > 0$, $0 < t < \delta$

$\Rightarrow$ x^0 — не явл. т. экстр

$\bar{h}^{min}$ $\bar{h}^{max}$

527

§6 Неявные функции

6.1 Случай одного ур-ия

Опр $F: O(\underset{\in\mathbb{R}^2}{x^0, y^0}) \to \mathbb{R}$, $F(x^0, y^0) = 0$. Если $\exists O(x^0)$ $\exists f: O(x^0) \to \mathbb{R}$ / $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in O(x^0)$, то говорят, что F задаёт неявно функцию f. (f-неявная функция от x)

Вопрос: $\boxed{\exists!}$, гладкость

Т. $F: O(x^0, y^0) \to \mathbb{R}$ удовл. усл-ям ① $F(x^0, y^0) = 0$; ② $F \in C^1(O(x^0, y^0))$; ③ $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$

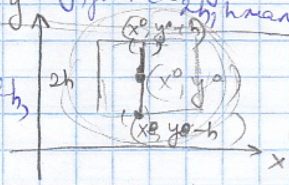
$f \in C$ части пр-ые первого пер $\in C$

$\Rightarrow \exists O(x^0)$, $\exists! f: O(x^0) \to \mathbb{R}$ / • $f(x^0) = y^0$ • $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in O(x^0)$

▶ 1) $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) > 0$ не огр. общности (из усл 3))

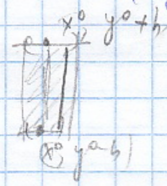
$\frac{\partial F}{\partial y} \in C(O(x^0, y^0))$ ($F \in C^1(O(x^0, y^0))$) $\overset{\text{сохр знака непр функции}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ замкн. куб квадрат $K \subset O(x^0, y^0)$ / $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_K > 0$

(с центром (x^0, y^0), ребра $\parallel Ox, Oy$, длина $- 2h$, h мало)



2) Рассмотрим функцию $\varphi(y) := F(x^0, y)$, $y \in [y^0 - h, y^0 + h]$

Имеем: $\underset{\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y)} > 0$ на $[y^0 - h, y^0 + h]$ ($\varphi \uparrow\uparrow$) по п. 1, кроме того $\varphi(y_0) = F(x^0, y^0) = 0$



$\Rightarrow \varphi(y^0 + h) > 0$, $\varphi(y^0 - h) < 0$

3) Имеем: $F(x^0, y^0 + h) > 0$; $F(x^0, y^0 - h) < 0 \Rightarrow$

$\overset{F \in C(K)}{\Rightarrow}$ $\exists \delta > 0$ / $F(x, y^0 + h) > 0$ если $|x - x^0| < \delta$ и $F(x, y^0 - h) < 0$, если $|x - x^0| < \delta$ (δ - min из δ_1, δ_2 для $+h$, для $-h$)

4) $\forall$ фикс. $x \in O_\delta(x^0)$ рассмотрим $\psi(\underset{\text{фикс}}{x}; \cdot): [y^0 - h, y^0 + h] \to \mathbb{R}$ определённую ф-лой $\psi(x; y) = F(x, y)$

$\forall x \in O_\delta(x^0)$ имеем $\psi(x; \cdot) \in C[y^0 - h, y^0 + h]$

$\psi(x; y^0 - h) < 0$, $\psi(x; y^0 + h) > 0$ $\underset{\text{непр функции на отр.}}{\overset{\text{Т о пром. знач.}}{\Longrightarrow}}$ $\exists! y = y(x)$ / $\psi(x; y(x)) = 0$ т.к. $\frac{\partial \psi}{\partial y} > 0 \Rightarrow \uparrow\uparrow$

Итак, $\forall x \in O_\delta(x^0)$ $\exists!$ $y(x) =: f(x)$ / $\psi(x, f(x)) \overset{\text{по опред}}{=} F(x, f(x)) = 0$ (*)

Имеем: $f: O_\delta(x^0) \to \mathbb{R}$ - требуемая см (*), и кроме того $\psi(x^0, f(x^0)) = 0 \Rightarrow f(x^0) = y^0$ (т.к. $\uparrow$ единств.) ◀

Замеч. ① Усл $\frac{\partial F}{\partial x} \in C(O(x^0))$ не использовалось

② Усл Т $\Rightarrow f \in C^1(O_{\delta^*}(x^0))$ для нек $\delta^* > 0$.

③ Аналог Т. имеет место, когда $x = (x_1, \ldots x_n)$

$\frac{\partial F}{\partial y}$ $\underset{\mathbb{R}^n}{\partial F(x, y)} / \partial y$ - аналогично. по усл $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \neq 0$.

6-7 Неявная ф-ция для системы ур-ий

T. $F, G : O(\underset{\mathbb{R}}{x^0}, \underset{\mathbb{R}}{y^0}, \underset{\in \mathbb{R}}{z^0}) \to \mathbb{R}$ с условиями

1) $F(x^0, y^0, z^0) = 0 = G(x^0, y^0, z^0)$
2) $F, G \in C^1(O(x^0, y^0, z^0))$
3) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x^0, y^0, z^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(x^0, y^0, z^0) \neq 0$ якобиан

$\Rightarrow \exists O(x^0), \exists! f, g : O(x^0) \to \mathbb{R} \;/\; F(x, f(x), g(x)) = G(x, f(x), g(x)) = 0 \quad \forall x \in O(x^0)$
$f(x^0) = y^0, \; g(x^0) = z^0$

$\blacktriangleright \times \blacktriangleleft$ (Зорич).