2 коллоквиума
досрочно! зачётная сессия закрыта; рекомендация семинариста

Часть I. Дифференциальное исчисление ф-ций одной переменной

Глава 1. Основные понятия математического анализа

§1 Множества. Логическая символика

1.1 Множества

Мн-вом называем совокупность объектов (элементов мн-ва), определяемых не св-вом α (аксиоматически), а именно:
1) каждый эл-нт мн-ва A обладает св-м α;
2) каждый объект со св-вом α является эл-том мн-ва A
Эл-ты мн-ва обозн. $a, b, x, \ldots$

Будем рассматривать „универсальное" мн-во E

$\boxed{/}$ — такой, что (или $\boxed{:}$)

Например: 1) $E = \mathbb{R}$; $A = \mathbb{N}$, $B = [0;1]$;
2) E — мн-во всех студентов МГУ.
A — мн-во студентов мех-мата.
B — мн-во студентов I курса ...

Эл-ты $a \in E$ и $b \in E$ совпадают — обозн. $a = b$.
Если эл-ты различные, то $a \neq b$
Пустое мн-во — мн-во, не имеющее эл-тов $\varnothing$

Пр-ры: $E = \mathbb{R}$; 1) $A = \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$;
2) $A = [0;1]$, $0 \in A$, $1 \notin A$;
3) $A = \{x^2 \in \mathbb{R} \mid x > 0, x^2 \leq -1\} = \varnothing$

Пусть A — мн-во объектов из E, обладающих св-вом α: $A = \{x \in E \mid \alpha\}$
Пример: $A = [0;1) = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 1\}$

$\boxed{:=}$ — равно по определению.

Эл-т a принадлежит мн-ву A: $a \in A$; $A \ni a$ (A содержит a)

ОПР. 1 Пусть A и B — мн-ва из E ($\exists$ пусть $A \subset E$, $B \subset E$).
Тогда A — подмн-во B (A принадл. B), если каждый эл-т A является эл-том B (Обозн: $A \subset B$ — A содержится в B; или $B \supset A$)

$\subset, \supset$ — отношения включения;

Иногда пишут: $A \subseteq B$ (содерж. или равно), $A \subset\subset B$ (строго содержится, не совпад.)

Замечание: A не содерж. в B ($A \not\subset B$) $\Rightarrow \exists a \in A / a \notin B$

Мн-ва A и B совпадают — $A = B$

Св-ва отношений включений:
1) $A \subset A$ (похоже на $\leq$) 2) $A = B \Leftrightarrow \{A \subset B$ и $B \subset A\}$ 3) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

1.2 Операции над множествами

ОПР 1. $\exists$ $A \subset E$, $B \subset E$, Тогда м-во

$\boxed{A \cup B} := \{x \in E / x \in A$ или $x \in B\}$ называется объединением мн-в A и B (суммой)

ПР-Р $E = R$; $A = [1;3]$, $B = (2;4)$; $A \cup B = [1;4)$

аналогично

$\exists$ $A_\alpha \subset E$. Тогда $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha := \{x \in E / x$ есть эл-т хотя бы одного $A_\alpha\}$ объединение всех мн-в

$(N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{n\})$

ОПР 2 $\exists$ $A \subset E$, $B \subset E$. Тогда мн-во

$\boxed{A \cap B} := \{x \in E / x \in A$ и $x \in B\}$ называется пересечением мн-в A и B

ПР-Р $A = [1;3]$ $B = (2,4)$ $A \cap B = (2;3]$

аналогично $\exists A_\alpha \subset E$. Тогда $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha := \{x \in E / x \in A_\alpha$ для $\forall \alpha\}$

Св-ва $\cup$ и $\cap$

1) коммутативность $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$.
3) $A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ } ассоциативность
4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
5) $A \cup A = A$ 6) $A \cap A = A$ 7) $A \cup \varnothing = A$ 8) $A \cap \varnothing = \varnothing$
9) $A \cup E = E$ 10) $A \cap E = A$

11) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - (дистрибутивность $\cap$ по отн. к $\cup$)
12) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (дист-ть $\cup$ по отн к $\cap$)

Д-во 12

а) Пусть $x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow (x \in A \cap B)$ или $(x \in C) \Rightarrow (x \in A$ или $x \in C)$ и
$\Rightarrow$ и $(x \in B$ или $x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup C)$ и $(B \cup C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

б) Пусть $x \in$ правой части 12.

$(x \in A$ и $x \in B \cup C)$ или $(x \in C$ и $x \in B \cup C) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A$ и $x \in B \cup C)$ или $x \in C$

1. $(x \in A$ и $x \in B)$ или $(x \in A$ и $x \in C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$
$\Rightarrow x \in C$

Разность мн-в $(A \setminus B)$

ОПР 3 $\exists$ $A, B \subset E$ Тогда м-ва $A \setminus B := \{x \in E / x \in A, x \notin B\}$ называется разностью мн-в A и B или дополнением B до A

ПР-Р $E = R$ $\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$
$[0;+\infty) \setminus (0;1) = \{0\} \cup [1;+\infty)$

ОПР 4 $\exists$ $A \subset E$ Тогда мн-во $CA := E \setminus A$ - назыв. дополнением мн-ва A (отн E)

ПР-Р $E = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$ $CA = (-\infty, 0) \cup (1; +\infty)$

Св-ва 1) $A \cup CA = E$ 2) $A \cap CA = \varnothing$ 3) $C\varnothing = E$ 4) $CE = \varnothing$
5) $CCA = A$ 6) $A \subset B \Leftrightarrow CA \supset CB$ 7) $C(A \cup B) = CA \cap CB$
8) $C(A \cap B) = CA \cup CB$

Д-ксем ⑦
$x \in C(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A)$ и $(x \notin B) \Leftrightarrow (x \in CA$ и $x \in CB) \Rightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (CA \cap CB)$ ▲

1.3 Декартово произведение множеств

] $A \in E$, $B \in E$. Определим пару $(a,b) =: c$
Пара $(a', b') = c' \equiv c \overset{def}{\Leftrightarrow}$ (по определ) $(a' = a)$ и $(b' = b)$
пара упорядочена!

a – первая проекция (коор-та) c, $pr_1 c$
b – вторая проекция (к-та) c, $pr_2 c$

Обозначим $E \times E = E^2 := \{$мн-во всех пар $(a,b) / a \in E, b \in E\}$

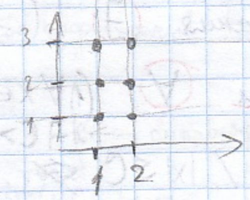
ОПР. ① М-во $E \times E$ наз. декартово пр-ие E на E
②] $A, B \subset E$. Тогда мн-во $A \times B := \{(a,b) \in E \times E / a \in A, b \in B\}$

Аналогично ОПР' ① $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{n} := \{(a_1, \ldots a_n) / a_i \in E, i = \overline{1,n}\}$

② $A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots a_n) \in E^n / a_i \in A_i, i = \overline{1,n}\}$, где $A_i \subset E$, $i = \overline{1,n}$.

ПР-РЫ ① $E = \mathbb{R}$. Тогда $E \times E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ – евклидова пл-ть
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ – пр-во
$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$

② $E = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$



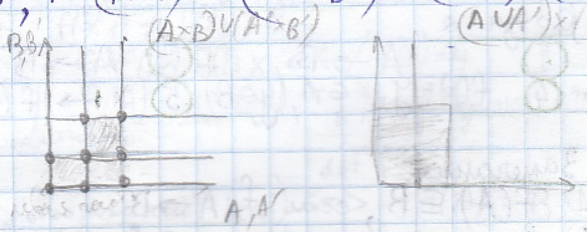
Св-ва $A \times B$:

① $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing)$ или $(B = \varnothing)$
② Пусть $A' \neq \varnothing$, $B' \neq \varnothing$. Тогда $A' \subset A$, $B' \subset B \Leftrightarrow A' \times B' \subset A \times B$
③ $(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B$.
④ $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$ А не $\cup$!

Д-жем ④: $c = (a,b) \in (A \times B) \cap (A' \times B') \Leftrightarrow (a,b) \in (A \times B)$ и $(a,b) \in A' \times B' \Rightarrow$
$\Leftrightarrow (a \in A, b \in B)$ и $(a \in A', b \in B') \Leftrightarrow (a \in A$ и $a \in A')$, $(b \in B$ и $b \in B') \Rightarrow$
$\Leftrightarrow (a \in A \cap A'$ и $b \in B \cap B') \Leftrightarrow c = (a,b) \in (A \cap A') \times (B \cap B')$ ▲

Замечание 1] $A' \neq \varnothing$, $B' \not\subset B$. Тогда $(A' \times B') \neq \varnothing \subset A \times B$
Но $B' \not\subset B \Rightarrow$ б 2) $\not\Leftarrow$

Замечание 2 Смотри 3) если $B \neq B'$, то $(A \times B) \cup (A' \times B') \neq (A \cup A') \times (B \cup B')$
Напр-р, $A = [0,1]$, $B = [0,1]$
$A' = [1,2]$, $B' = [0,2]$



1.4 Логическая символика и дополнительные обозначения

В этом пункте A, B – утверждения, X, Y – мн-ва

① „Импликация" $\Rightarrow$ ($\ast$)
$A \Rightarrow B$ (из утв. A следует утв. B; A влечёт B; если A, то B)
② Тождественность (эквивалентность) $\Leftrightarrow$
$A \Leftrightarrow B$, A равносильно B ($A \subset B \Leftrightarrow CA \supset CB$)

Дополн. (раб.) обозначения

а) $A \overset{def}{\Leftrightarrow} B$ (A определяется через B, по определению)
Пр-р: $M = X \cup Y \overset{def}{\Leftrightarrow} M = \{z \in E / z \in X$ или $z \in Y\}$

б) $:=$ полагаем, равно по определению /обозначению
Пр-р: $X \cup Y := \{z \in E / z \in X$ или $z \in Y\}$

③. Отрицание $\neg$
$\neg A$ „не A" A неверно
Пр-р: принцип исключённого третьего: A или $\neg A$

• $A \overset{в.г.}{\not\Rightarrow} B$; $\neg(A \Rightarrow B)$ „вообще говоря из A не следует B"

④ Логическая операция „или" $\vee$ ($M = X \cup Y \overset{def}{\Leftrightarrow} M = \{z \in E / z \in X \vee z \in Y\}$)

⑤. Логическая операция „и" $\wedge$ ($M = X \cap Y \overset{def}{\Leftrightarrow} M = \{z \in E / z \in X \wedge z \in Y\}$)

⑥ Квантор существования $\exists$ ($\exists a$ „существует a", $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in E / a \in A$)

⑦ Квантор всеобщности $\forall$ (1) $\forall x \in [1, 2]$, $x > 0$; „для всех";
мн-во ограничено → 2) $\exists C > 0 / \forall x \in A$, $|x| \leq C \Leftrightarrow \exists C > 0 / |x| \leq C, \forall x \in A$

• но $\forall x \in A \ \exists \underset{C(x)}{C} > 0 \ / \ |x| \leq C \not\Leftrightarrow$ $[0, +\infty)$))

⑧ Дополнит.
/ (:) такой, что ▶ начало д-ва
$\rceil$ - пусть ◀ конец д-ва (▩)

§2 ОТОБРАЖЕНИЕ. ФУНКЦИЯ

2.1 Понятие отображения, ф-ции.

ОПР 1 $\rceil A \neq \emptyset$ $B \neq \emptyset$ Тогда отображением мн-ва A в мн-во B назыв. закон (соответствие), γ каждому эл-ту x мн-ва A (аргументу) ставит в соответствие единственный эл-т (значение отображения в т. x, образ x) $f(x) \in B$

Мн-во A наз. мн-вом (областью) определения отобр-я f; B – мн-во значений
f(A) - образ A при отображении f, $f(A) \subset B$

Обозн-я
① $f: A \to B$ ② $A \to B$ ③ $f: x \in A \to y = f(x) \in B$
④ $f(x) = y, x \in A, (y \in B)$ ⑤ $x \mapsto f(x), x \in A$ ($x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R}$)

Замечания
① $f(A) \subseteq B$, если $f: A \to B$
② Принято говорить, что $x \in A$ - независимый аргумент
$y = f(x) \in B$ – зависимый аргумент
③ Иногда не требуют в опред-ии отображения единств-то $f(x)$
Пример $y = \pm\sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ (многозначн. ф-ция)
④ Иногда употребл-ся выражения „отображение", „функция", „оператор" как синонимы

ОПР 2] дано от-ие $f: A \to B$. Если $B \subset \mathbb{R}$, то от-ие f называем функцией

ПР-РЫ ①] $\forall t \in [0, T]$ объект находится в $\cdot (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$, где $x: [0,T] \to \mathbb{R}$, $y: [0,T] \to \mathbb{R}$, $z: [0,T] \to \mathbb{R}$ – известные функции. Тем самым задано от-ие
$f: t \in [0,T] \to f(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$
Например, $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$, $t \in [0, T]$

2) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $(f(x) \in \mathbb{R})$ $\quad f: A \to B$, $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $\underbrace{f(A)}_{=(0,+\infty) = \mathbb{R}_+} \subset\subset B$

ОПР 3.] $f: A \to C$, $g: B \to C$. Тогда:

ⓐ f и g – совпадают (совпадающ. от-ия) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$(A = B) \overset{\text{и}}{\wedge} (\forall x \in A \;\; f(x) = g(x))$

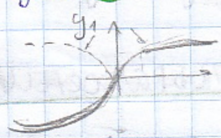
ⓑ g – сужение f (на B) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(B \subset\subset A) \wedge (\forall x \in B \; f(x) = g(x))$

ⓒ g – продолжение f (на B) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(A \subset\subset B) \wedge (\forall x \in A, \; f(x) = g(x))$

ПР-РЫ ① $f: x \in (-\infty; 0] \to f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$ совпадение
$g: x \in (-\infty; 0] \to g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

② $f: x \in \mathbb{R} \to f(x) = |x| \in \mathbb{R}$ $\quad$ g – сужение f
$g: x \in (-\infty; 0] \to g(x) = -x \in \mathbb{R}$

③ $f: x \in [0, +\infty) \to f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}$
$g_1: x \in \mathbb{R} \to g_1(x) = \sqrt{|x|}$



g_1 – чётное продолжение
$g_2: x \in \mathbb{R} \to g_2(x) = \sqrt{|x|} \cdot \operatorname{sign} x$
где $\operatorname{sign} x = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $\quad$ g_2 – нечётное продолжение

Опр 4] дано от-ие $f: x \in A \to y = f(x) \in B$, тогда
①] $x \in A$. Тогда x – прообраз $y \in B$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(x) = y$ (может быть много – $\sin x$)
②] $M \subset A$, $y \in B$. Тогда M – полный прообраз y $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $M = \{\forall x \in A \,/\, f(x) = y\}$
Обозн: $M = f^{-1}(y)$

ПР-Р: $f: x \in \mathbb{R} \to y = f(x) = \sin x \in \mathbb{R}$
Тогда $x = 0$ – прообраз $y = 0$
Полный прообраз: $y = 0$ есть мн-во $f^{-1}(0) = \{k\pi, k \in \mathbb{N}^*\}$ $(\mathbb{Z})$

Замечание. $y_1, y_2 \in f(A)$, $\{$где $f: A \to B\}$ $\Rightarrow f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$
$y_1 \neq y_2$

П:] $\exists x \in f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) \Rightarrow f(x) = y_1 = y_2$ $\quad$ Р
образ единственен!

2.2 Классификация отображений

! – единственный

ОПР 1] $f: A \to B$. Тогда f – инъективно (взаимно однозначно) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
справедлива импликация: $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ЗАМЕЧАНИЕ $f: A \to B$ инъективно $\Leftrightarrow$ $\forall y \in f(A) \; \exists! \; x \in A \,/\, f(x) = y$
$f: A \to B$ инъективно $\Leftrightarrow$ $\forall y \in f(A)$ $f^{-1}(y)$ – содержит единств эл-т

ПР-Р $f: x \in \mathbb{R} \to f(x) = e^x \in \mathbb{R}$ – инъективно

ОПР 2] $f: A \to B$. Тогда f – сюръективно (отображение на) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(A) = B$

ПР-Р $f: x \in \mathbb{R} \to f(x) = e^x \in (0; +\infty) = \mathbb{R}_+$ – сюръективно

ОПР 3] $f: A \to B$. Тогда f – биективно $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(f$ – инъективно$) \wedge (f$ – сюръективно$)$

ПР-Р – тот же самый что и в ОПР 2
$y = f(x) = x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

] $f: A \to B$ – биекция. Тогда можно определить обратное отоб-ие:

$f^{-1}: B \to A$ следующим образом: $\forall y \in B\ \exists!\ x \in A / f(x) = y$ (инъек. / сюръек.)

Тогда $x := f^{-1}(y)$ полный прообраз и обратное отоб-ие

УТВ $f: A \to B$ – биекция $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ – тоже биекция

► а) инъект. f^{-1}

$\boxed{П}$:] $y_1 \neq y_2$; $x_1 = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ $\boxed{П}$ ▲

б) сюръект. $f^{-1}: B \to A$

надо д-ть, что $f^{-1}(B) = A$

Очев. $f^{-1}(B) \subset A$

Докажем что $A \subset f^{-1}(B)$:] $x \in A$ произвольный $\Rightarrow \exists y \in f(A) = B / y = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow A \subset f^{-1}(B)$

Окончательно $A = f^{-1}(B)$ ▲ ◄

ПР-Р $f: x \in \mathbb{R} \to y = f(x) \equiv x^3 \in \mathbb{R}$

$\exists$ обр. от-ие $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$

1.3 Суперпозиция отображений. График отображения

ОПР 1.] $f: A \to B$, $g: B \to C$. Тогда от-е $g \circ f: A \to C$, действующее по правилу $g \circ f: x \in A \to (g \circ f)(x) := g(f(x)) \in C$

Такое отоб-ие назыв. композицией, сложной ф-цией, суперпозицией от-ий f и g

ПР-РЫ ① $f: x \in \mathbb{R} \to f(x) = x^2 \in [0; +\infty) = \mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R}_+ - [0; +\infty))$

$g: y \in [0, +\infty) \to g(y) = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R})$

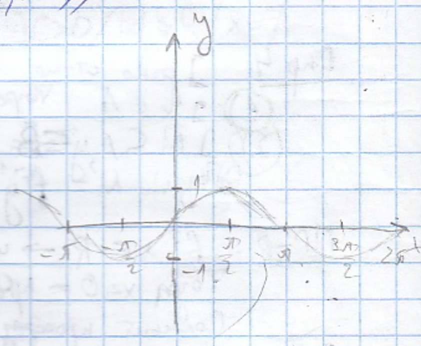
$g \circ f: x \in \mathbb{R} \to g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| \in \mathbb{R}$

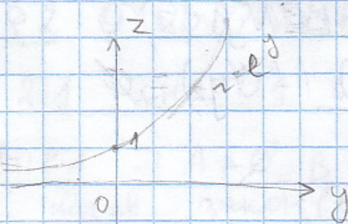
наоборот нельзя! обл. опред.!

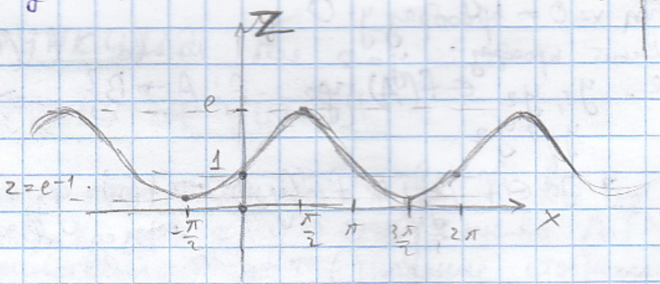
② $f: x \in \mathbb{R} \to y = f(x) = \sin x \in \mathbb{R}$

$g: y \in \mathbb{R} \to z = g(y) = e^y \in \mathbb{R}$

Тогда: $g \circ f: x \in \mathbb{R} \to (g \circ f)(x) = e^{\sin x}$







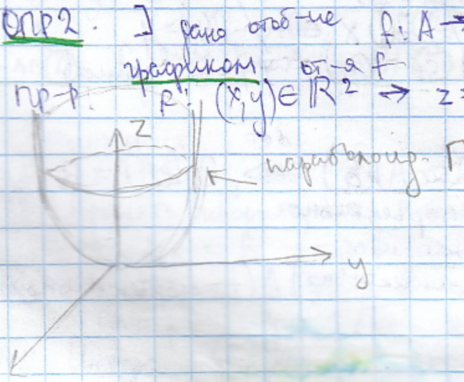
$(e^{\sin x})' = \cos x\, e^{\sin x}$

$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

ОПР 2.] дано отоб-ие $f: A \to B$. Тогда мн-во $\{(x, y) \in A \times B / y = f(x)\} = \Gamma$ (гамма большое) назыв. графиком от-я f

пр-р: $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to z = f(x, y) = x^2 + y^2 \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$ (сюръективно)

но не инъективно, т.к. при одной паре (x, y) может быть несколько $(x^2 + y^2)$



§3. Счётные и несчётные мн-ва

] $A \neq \emptyset$. Тогда A - конечное мн-во $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ состоит из конечного числа эл-тов.
В противном случае A наз. бесконечным мн-вом

ОПР 1.] $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Тогда мн-ва A и B равномощные $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ биекция $f: A \to B$

ПР-Р Мн-ва $\{1,2,3\}$ и $\{4,5,6\}$ - равномощные. Вообще конечные мн-ва, состоящ. из одинакового кол-ва эл-тов, равномощны

Обозн: $\boxed{A \sim B}$

Св-ва: (1) $A \sim A$ (рефлексивность) (2) $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ (симметричность) (т.к. биекция
(3) $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (транзитивность) (д-во через композицию)

ОПР 2] $A \neq \emptyset$. Тогда
1. A-счётное $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A \sim \mathbb{N}$
2. A-несчётное $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (A-бесконечно) $\wedge$ (A не явл. счётным)
3. A - не более, чем счётное $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (A-конечное) $\vee$ (A-счётное)

Замечание

] A-счётное $\Rightarrow \exists$ биекция $f: A \to \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ биекция $g := f^{-1}: \mathbb{N} \to A$. $\Rightarrow$ Эл-ты мн-ва A можно занумеровать

ПР-Р: $\mathbb{Z}$ - мн-во целых чисел - счётно.
▶ Положим $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, где $f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n\text{-чётное} \\ \frac{-n+1}{2}, & \text{если } n\text{-неч.} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

(а) f-сюръект.
] $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; m = \frac{n}{2}$;
$m = 0 \Rightarrow \exists n = 1 \;/\; m = \frac{-1+1}{2}$
$m < 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;/\; m = \frac{-n+1}{2}$

(б) f-инъект. (надо д-ть, что $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$ (*))

I. n_1 и n_2 - чётные $\Rightarrow m_1 = \frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2}$
n_1 и n_2 - неч. $\Rightarrow m_1 = \frac{-n_1+1}{2} \neq \frac{-n_2+1}{2}$
n_1 четн, n_2 - неч $\Rightarrow m_1 = f(n_1) = \frac{n_1}{2} > 0$ $\quad m_2 = f(n_2) = \frac{-n_2+1}{2} \leq 0$. $\quad m_1 \neq m_2$

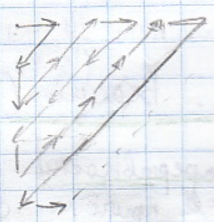
ТЕОРЕМА 1.] A - счётно, $B \neq \emptyset$, $B \subset A \Rightarrow B$ - не более, чем счётное.
▶ A - счётно $\Rightarrow \forall$ эл-ты A можно занумеровать $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots\}$
Имеем $B \subset A \Rightarrow B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_k} \ldots\}$ Две возможности: (а) $B = \{a_{n_1}, \ldots a_{n_k}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow B$-конечное; (б) $B = \{a_{n_1}, \ldots a_{n_k}, \ldots\}$ Тогда имеется биекция $f: k \in \mathbb{N} \to f(k) = a_{n_k} \in B$
$\Rightarrow B$ - счётное. В итоге (B-конечно) $\vee$ (B - счётно) $\Rightarrow B$ - не более, чем счётно ◀

Следствие 1. A - счётно, $B \subset A$, B - бескон. $\Rightarrow B$ - счётное
Следствие 2. $B \subset A$, B - несчётно $\Rightarrow A$ - несчётно
ПР-Р $A = \mathbb{N}$, $B = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$

ТЕОРЕМА 2. Объединение счётного числа счётных мн-в счётно
(т.е.] $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, A_i - счётное для $\forall i \Rightarrow A$ - счётно)

▶ A_1: $a_1^{(1)}\ a_2^{(1)}\ a_3^{(1)}\ a_4^{(1)} \ldots\ a_n^{(1)} \ldots$
A_2: $a_1^{(2)}\ a_2^{(2)}\ a_3^{(2)} \ldots\ a_n^{(2)} \ldots$
A_3: $a_1^{(3)}\ a_2^{(3)}\ a_3^{(3)} \ldots\ a_n^{(3)} \ldots$

A_k: $a_1^{(k)}\ a_2^{(k)}\ a_3^{(k)} \ldots\ a_n^{(k)} \ldots$



Если совпадение, то не считаем ◀

Теорема 3. Мн-во рацион. чисел счётно

▶ Заметим, что $\mathbb{Q}$ - бесконечно, (т.к. $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$) $\Rightarrow$ см. сл. 1 достаточно проверить, что $\exists A \supset \mathbb{Q}$, A - счётно.

Имеем $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, \frac{m}{n}$ - несократима$\}$

$]$ $Q^* := \{(m,n), n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, \frac{m}{n}$ - несократима$\}$, тогда $Q^* \sim \mathbb{Q}$

Но $Q^* \subset A := \{(m,n), n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$. Д-ем, что A - счётно.

Нумерация A!

$$\begin{array}{cccccc}
(0,1) & \to & (0,2) & (0,3) & \dots & (0,n) \dots \\
(-1,1) & & (-1,2) & (-1,3) & & (-1,n) \\
(1,1) & & (1,2) & (1,3) & & (1,n) \\
& & \dots & & &
\end{array}$$

см. предыд. рис. ◀

Теорема 4. (пр-р несч. мн-ва) Рассмотрим мн-во A последовательностей $(a_1, a_2, \dots a_n, \dots)$, где $(a_i = 1) \vee (a_i = 0)$ $\forall i$. Тогда A - несчётно.

Канторов диагональный процесс

▶ От противного: предположим, что A - счётно.

$$\begin{pmatrix}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} & \dots \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} & \dots \\
\vdots & & & & & \dots \\
a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & \dots & a_n^{(k)} & \dots \\
& & \dots & & &
\end{pmatrix}$$

посл-ть, к. есть в мн-ве A, а в таблице нет.

Составим посл-ть $B = (b_1, b_2, \dots b_n, \dots) \in A$ так, что $(b_i = 1) \vee (b_i = 0)$ по правилу

$b_1 \neq a_1^{(1)}$

$b_2 \neq a_2^{(2)}$

$\dots$

$b_k \neq a_k^{(k)}$

Но $B \in A \Rightarrow b$ - в таблице $\Rightarrow \exists$ посл-ть

$(a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots a_m^{(m)}) = (b_1, \dots b_n, \dots) \Rightarrow b_m = a_m^{(m)}$, но, по постр. $b_m \neq a_m^{(m)}$ $\forall m$

$\Rightarrow$ против-ие.

Глава 2. Вещественные числа

§1. Натуральные числа. ММИ.

Мн-во натур. чисел - $\mathbb{N}$

Принцип минимума во мн-ве $\mathbb{N}$ чисел: $]$ $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$. Тогда $\exists$ min эл-т в мн-ве A $(\exists n_0 \in A / \forall a \in A \ a \geq n_0)$

Принцип ММИ: $]$ $A \subset \mathbb{N}$ и обладает след. св-вами: 1) $1 \in A$; 2) $n \in A \Rightarrow (n+1) \in A$

Тогда $A = \mathbb{N}$

▶ ДП: $A \neq \mathbb{N} \Rightarrow A \subset\subset \mathbb{N} \Rightarrow CA := \mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow$ по принципу min для CA $\exists n_0 \in CA /$ n_0 - min эл-т из CA.

Имеем: из усл. 1) $\Rightarrow n_0 \geq 2 \Rightarrow n_0 - 1 \in \mathbb{N}$, $n_0 - 1 < n_0 \Rightarrow n_0 - 1 \in A$

Тогда по усл. 2) $n_0 \in A$ $(n_0 = (n_0 - 1) + 1)$, но по опр. $n_0 \in CA \Rightarrow n_0 \notin A$ $\boxed{P}$ ◀

Задача: $]$ $A \subset \mathbb{N}$ облад. св-вами: 1) $m \in A$ 2) $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

Д-ть, что тогда $A = \{m, m+1, m+2 \dots\}$

§2 Аксиома полноты. Верхние (нижние) грани мн-в в $\mathbb{R}$

Аксиома полноты (непрерывности)

$]$ $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ причём $a \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$. Тогда $\exists c \in \mathbb{R}: a \leq c \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

Замечание: $\mathbb{Q}$ не облад. этим св-вом

ОПР 1. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Тогда A ограничено сверху, if $\exists\, b \in \mathbb{R} / a \leq b, \forall a \in A$.
В этом случае b назыв. верхней гранью мн-ва A.

ПР-РЫ: $(0;+\infty)$ - не ограничено сверху; $(-\infty, 0)$ ограничено сверху

Замечание!] A огран. сверху, b-верхн. грань $A \Rightarrow$ для $\forall c / c > b$ выполняется, что c-верхняя грань. Т.о. ограниченное сверху мн-во имеет ∞ число верхних граней

ОПР 2. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Тогда A ограничено снизу, if $\exists\, c \in \mathbb{R} / a \geq c, \forall a \in A$. В этом случае c - нижняя грань A

ПР-Р: $\mathbb{N}$ ограничено снизу

ОПР 3. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Тогда A ограничено $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(A$ ог. сверху$) \wedge (A$ ог. снизу$)$

Замечание $A \subset \mathbb{R}$, A-огран $\Leftrightarrow \exists\, c, b / A \subset [c, b]$

ОПР 4. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A ог. сверху $\Rightarrow$ наим. верхняя грань назыв. точной верхней гранью
$b = \sup A$ („супремум")

ПР-Р: $A = (0, 1)$; $\sup A = 1$; $A = \{\frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$ $\sup A = 1$

Теорема 1. $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, A ог сверху. Тогда $b = \sup A \Leftrightarrow$ 1) $\forall a \in A\ a \leq b$; 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, c \in A / c > b - \varepsilon$

▷ I. ($\Rightarrow$)] $b = \sup A \Rightarrow$ 1) верно т.к. b-верхн. грань A. Предположим, что 2) неверно:
$\exists\, \varepsilon > 0 / \forall c \in A: c \leq b - \varepsilon \Rightarrow$ $b - \varepsilon$ - верхн. грань A, но $b - \varepsilon < b \Rightarrow b$ - не min-ая верхн. грань. Противоречие $\Rightarrow$ 2) верно

II ($\Leftarrow$)] 1) и 2) верны для нек $b \in \mathbb{R}$. Тогда см 1) b-верхн. грань A. Предположим, что $b \neq \sup A$, т.е. b - не min. грань $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 / b - \varepsilon$ - верхняя грань $A \Rightarrow \forall c \in A$
$c \leq b - \varepsilon \Rightarrow$ усл. 2 - неверно. Пр-ие $\Rightarrow b = \sup A$ ◁

Теорема 2 A-огран. сверху $\Rightarrow \exists!\, b = \sup A$

▷ I Единственность
[П]: $\exists\, b_1 = \sup A$, $\exists\, b_2 = \sup A$: $b_2 > b_1$. Тогда имеем для $\varepsilon = b_2 - b_1$ (см Т1)
$\exists\, c \in A / c > b_2 - \varepsilon = b_2 - (b_2 - b_1) = b_1 \Rightarrow b_1 \neq \sup A$ (не явл. верхн. гранью) [П] $\Rightarrow b_2 = b_1$

II Существование
Имеем $A \neq \emptyset$. $B = \{$мн-во верхн. граней$\} \neq \emptyset$, т.к. A - ог сверху, причем $a \leq b\ \forall a \in A, \forall b \in B$
Тогда по аксиоме полноты $\exists\, c \in \mathbb{R} / a \leq c \leq b\ \ \forall a \in A, \forall b \in B$
Имеем (1) c-верхн. грань $A \Rightarrow c \in B$; (2) $\Rightarrow c$ - наим. из верхних граней $\Big\} \Rightarrow c = \sup A$ ◁

Замечание. Если $b = \sup A \in A$, то b называют максимальным (наиб) эл-том A ($b = \max A$)

ОПР 5. $A \subset \mathbb{R}$, A - огран. снизу ($\Rightarrow A \neq \emptyset$) Тогда наиб. из нижних граней назыв. точной нижней гранью. Обозн: $\inf A$ („инфимум").

Пр-р $A = \{\frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$ $\inf A = 0$

Теорема 1': $A \subset \mathbb{R}$, A-ог. снизу. Тогда $c = \inf A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ 1) $\forall a \in A, a \geq c$ 2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, d \in A / d < c + \varepsilon$

▷ ◁

Теорема 2': $A \subset \mathbb{R}$, A ог. снизу. Тогда $\exists!\, \inf A \in \mathbb{R}$ ▷ ◁

(Иногда говорят $\inf A = -\infty \Rightarrow A$ - не огранич. снизу)

Замечание! Если $c = \inf A \in A$, то c назыв. min эл-том A.
Обозн: $c = \min A$ ($\min A$ не всегда равен $\inf A$)

§3 Основные леммы

3.1. Нек обозначения и понятия

$(a,b) =]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$ ~~интервал~~
$[a,b) = [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x < b\}$ полуинтервал
$[a,b] =: \quad := \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x \le b\}$ отрезок

$\left.\right\}$ промежуток I; длина промежутка $|I|$

$[a;+\infty)$, $(a;+\infty)$; $(-\infty;a)$, $(-\infty;a]$ неограниченные промежутки

$]\ a \in \mathbb{R}$

Окрестность $O(a)$ точки a назыв. любой интервал, содержащий т. a

Рассмотр. также окрестности („центрированные") вида $O_\delta(a) := \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-a| < \delta,\ \delta > 0\}$
(δ-окр-ть)

Проколотая окр-ть: $\dot{O}(a) = \{x \in O(a), x \ne a\}$
$\dot{O}_\delta(a) = \{0 < |x-a| < \delta\}$

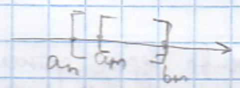
3.2. Лемма о вложенных отрезках

ОПР. • $\{\}$ отр-ков $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$ (*) называется системой вложенных отрезков, если $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$

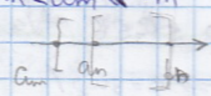
• $\{\}$ (*) назыв. сист-ой стягивающихся отрезков, если
1) (*) − $\{\}$ вложн. отрезков;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N} \,/\, (b_k - a_k) < \varepsilon$

ЛЕММА (о вложн. отрезках)
$]$ дана вложн. $\{\}$ отрезков $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$ (*)
Тогда: 1) $\exists c \in \mathbb{R} \,/\, c \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$
2) Если (*) − $\{\}$ стягив. отрезков, то т. c − единственная

▷ I Существование
Рассмотрим мн-во „левых концов" $A := \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ и мн-во „правых концов" $B := \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$
Имеем: $a_n \le b_m\ \forall n, m \in \mathbb{N}$ (1)
В самом деле: • $n \le m$:
$a_n \le a_m \le b_m$



• $n > m$
$a_n < b_n \le b_m$



$\Rightarrow$ (1) верно.

Следоват. см. аксиому непрерывности
$\exists c \in \mathbb{R} \,/\, a_n \le c \le b_m\ \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \le c \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$;
$\Rightarrow c \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$.

II Единственность
$]$ (*) − сист. стягивающихся отрезков
ПП $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \,/\, c_1 \in [a_n, b_n],\ c_2 \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N};\ c_1 \ne c_2$
Считаем для опред. $c_1 < c_2$
Имеем $a_n \le c_1 < c_2 \le b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Положим, что $\varepsilon = c_2 - c_1 > 0$
$b_n - a_n \ge c_2 - a_n \ge c_2 - c_1 = \varepsilon > 0$

Итак, $\exists \varepsilon > 0 \,/\, b_n - a_n \ge \varepsilon$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Пр-ие условию 2) из определ. $\{\}$ стягив. отрезков ◁

Задача Можно ли перенести Л. о вложенных отрезках на вложн. интервалы?
В.г. нет: $\{(\frac{1}{n}, 1), n \in \mathbb{N}\}$. $(0, \frac{1}{n})$
▷ от пр-ного

Сл-ие. Мн-во $\mathbb{R}$ - несчётно
Док. Д-ть, что $[0,1]$ - несчётное мн-во
П: предп., что $[0,1]$ - счётное мн-во $\Rightarrow$ $[0,1] = \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$
Пусть $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, причём $[a_1, b_1] \not\ni x_1$
Далее пусть $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, причём $[a_2, b_2] \not\ni x_2$
и т.д.
$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $[a_n, b_n] \not\ni x_n$, $n = 2, 3 \dots$
Получили, что с-ма $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$ - { вложенных отрезков $\Rightarrow$ см. Л о влож. отр
$\exists c \in \mathbb{R} / c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$; т.е. $a_n \leq c \leq b_n$, $\forall n$
Заметим, что $c \in [0,1] \Rightarrow \exists k / c = x_k \Rightarrow c \notin [a_k, b_k] \Rightarrow$ пр-ие

! Задача: Д-ть, что м-во ирр. чисел несчётно. (от прот)

3.3 Лемма Бореля-Лебега о конечном покрытии

ОПР. М-во А покрывает мн-во $B \overset{def}{\Longleftrightarrow} B \subset A$
С-ма мн-в $\{D\}$ покрывает мн-во В $\Longleftrightarrow$ Объединение мн-в из с-мы $\{D\}$ содержит мн-во В $(B \subset \bigcup D)$

Лемма (Бореля-Лебега)
Из любой с-мы интервалов (!) покрывающей отрезок (!) можно выделить конечное подпокрытие (т.е. можно выделить конечную подс-му интервалов, снова покрывающую отрезок)

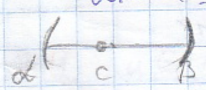
П: нельзя выделить конечное подпокрытие отрезка $[a, b]$
• Полагаем $[a_1, b_1] = [a, b]$ - не допускает конечного подпокрытия
• Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и положим $[a_2, b_2]$ - та половина $[a_1, b_1]$, { не допускает конечного подпокрытия
...
$[a_{n+1}; b_{n+1}]$ - та половина $[a_n, b_n]$, { не допускает конечн. подпокрытия (если обе половины допускают, то и весь отрезок тоже)

Т.о. построена { влож. отрезков $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\}$, причём это { стягивающихся отрезков, т.к. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Но, по Л. о вл. отр $\exists c \in \mathbb{R} / c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Имеем: $c \in [a, b]$ $\Rightarrow$ т.к. $[a, b]$ покрывается с-мой интервалов $\exists (\alpha, \beta) / c \in (\alpha, \beta)$
Положим $\varepsilon := \min\{c - \alpha, \beta - c\}$. Тогда $\exists k \in \mathbb{N} / \cancel{b_k - a_k} < \varepsilon$ (стяг. отрезки)
Заметим, что $c \in [a_k, b_k]$ $\Rightarrow$ $[a_k, b_k] \subset (\alpha, \beta) \Rightarrow$
$\Rightarrow [a_k, b_k]$ покрывается одним интервалом из { интервалов, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ П, т.к. по построению $[a_k, b_k]$ не допускает конечного подпокрытия.



! Задача: 1. Можно ли в Л Бореля-Лебега заменить интервалы на отрезки? $[0, 2]$ нельзя контрпример ($[\cancel{0}, 1 - \frac{1}{n}] + [1, 2]$)
2. Можно ли в Л Б-Л заменить отрезок на интервал? $(0, 1)$ $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right)$ $(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1})$

3.4 Лемма Больцано-Вейерштрасса

ОПР. Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда a - предельная точка мн-ва А $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall O(a)$, $\mathring{O}(a) \cap A \neq \varnothing$ (любая прокол. окр т. a содержит эл-ты мн-ва А)

Обозн. $A' := \{$мн-во предельных точек А$\}$
Пр-ры: 1) $A = (0, 1)$ $A' = [0, 1]$
2) $A = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$
3) $A = \mathbb{N}$; $\mathbb{N}' = \varnothing$
4) $A = \mathbb{Q}$; $A' = \mathbb{R}$
5) $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $A' = \{0\}$

Лемма Больцано-Вейерштрасса о предельной точке
Пусть мн. $A \in [a, b]$, A - бесконечно $\Rightarrow$ $\exists$ хотя бы одна предельная точка $A_1 \in [a; b]$

▶ Напомним, что $a \in A'$ (мн-ву пред точек) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall O(a)\ \mathring{O}(a) \cap A \neq \emptyset$.
] мн. A - произвольное, удовлетворяющее условиям Леммы
$\boxed{П}$: $\forall x \in [a,b]\quad x \notin A'$

Фиксируем произв-ое $x \in [a,b]$. Тогда $x \notin A' \Rightarrow \exists O(x) / \mathring{O}(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow O(x)$ содержит не более 1 точки из A (сам x). Т.к. $x \in [a,b]$ - произвольно, то для $\forall x \in [a,b]\ \exists O(x) /$ $(\mathring{O}(x) \cap A = \emptyset)$, $O(x)$ содержит не более 1 точки $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ система интервалов $\{O(x), x \in [a,b]\}$ образует покрытие отрезка $[a,b]$ интервалами, т.е. $[a,b] \in \bigcup\limits_{x \in [a,b]} O(x) \Rightarrow$ по Лемме Бореля-Лебега $\exists$ конечное подпокрытие

$\{O(x_k), k=1,\ldots,m; x_k \in [a,b]\}$ так что $[a,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} O(x_k) = S$

Имеем $\begin{cases} \cdot S \text{ содержит} \leq m \text{ точек} \\ \cdot A \in [a,b] \subseteq S \end{cases} \Rightarrow A$ содержит $\leq m$ точек, но A бесконечно по усл-ию $\boxed{П}$ ◀

Следствие. Любое ограниченное бесконечное мн-во имеет хотя бы одну предельную точку

Вопрос: ① Верно ли, что $\forall$ огранич. мн-во имеет хотя бы одну пред. точку? (одно число в мн-ве)
② Верно ли, что $\forall$ беск. мн-во имеет хотя бы одну пред. точку? ($\mathbb{N}$)

Глава 3. Теория пределов

§1. Топология числовой прямой

Будем $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, точки $a, b, x, \ldots$ мн-ва $A, B, \ldots$

1.1. Св-ва окрестностей

] $a \in \mathbb{R}$. Тогда:
1. $\forall O(a)\ O(a) \neq \emptyset$ (содержит т. a)
2. $\forall O(a)\ \exists\ \delta > 0 / O_\delta(a) \subset O(a)$

▶] $O(a) = (\alpha, \beta) \ni a$

Положим $\delta = \min\{\beta - a, a - \alpha\} \Rightarrow O_\delta(a) \subset O(a)$ ◀

3. $\forall$ конечной $\{$окр-тей $\{O^{(k)}(a)\ k=1,\ldots,m\}\ \exists\ O(a) / O(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} O^{(k)}(a)$

▶ св-во 2 $\Rightarrow \forall k \in [1,\ldots,m]\ \exists\ \delta_k > 0 / O_{\delta_k}(a) \subset O^{(k)}(a)$
Положим, $\boxed{\delta = \min\limits_{k=\overline{1,m}} \delta_k}$. Тогда $O_\delta(a) \subset O_{\delta_k}(a) \subset O^{(k)}(a), \forall k = \{1,\ldots,m\}$
$\Rightarrow O_\delta(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} O^{(k)}(a)$ ◀

4. $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \Rightarrow \exists O(a), O(b) / O(b) \cap O(a) = \emptyset$

▶ Не ограничивая общности,] $b > a$
Положим $\delta = \frac{b-a}{3}$
Тогда $O_\delta(a) \cap O_\delta(b) = \emptyset$ ◀

5. $\forall\ b \in O(a)$, $O(a)$ является окр-тью b, т.е $O(a) = O(b)$

▶] $O(a) = (\alpha, \beta)$, $b \in (\alpha, \beta) \Rightarrow O(b) = (\alpha, \beta)$ ◀

Задача Верно ли св-во 3 для ∞ числа окр-тей? (окрестности одной и той же точки, $\cap = 0$)

1.2. Внутренние, внешние, граничные точки мн-ва A, точки прикосновения и изолированные точки

ОПР 1.] $a \in \mathbb{R}$. Тогда a - внутренняя т. м-ва $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} a$ принадлежит A вместе с ней своей окрестностью ($\exists\ O(a) / O(a) \in A$).
Обознач.: $A_i := \{$мн-во всех внутр. точек$\}$; A_i - внутренность мн-ва A

ПР-РЫ. ① $A=[0,1]$, $A_i=(0,1)$ ③ $A=\mathbb{N}$, $A_i=\varnothing$ ($\mathbb{N}_i=\varnothing$)
② $A=(0,1)$, $A_i=A$

Замечание: $a\in A_i \Rightarrow a\in A$.
$\not\Leftarrow$ в.г. (вообще говоря)

ОПР2.] $a\in\mathbb{R}$. Тогда a – внешняя т. мн-ва $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists O(a) / O(a)\cap A=\varnothing$

Обознач: $A_e := \{$мн-во $\forall$ внешних точек $A\}$. A_e – внешность A

Замечание! ① $a\in A_e \Rightarrow a\notin A$. ② $A_e=(CA)_i$
$\not\Leftarrow$ в.г.

ПР-РЫ. ① $A=(0,1)$ $A_e=\mathbb{R}/[0,1]=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$
② $A=\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_e=\varnothing$, $\mathbb{Q}_i=\varnothing$.

ОПР.3] $a\in\mathbb{R}$. Тогда т. a – граничная т. мн-ва $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall O(a), O(a)\cap A\neq\varnothing$, $O(a)\cap CA\neq\varnothing$

Обознач: $\partial A := \{$мн-во $\forall$ гр-х т-к $A\}$. М-во ∂A – граница мн-ва A

ПР-РЫ: ① $A=(0,1)$, $\partial A=\{0,1\}$ ② $A=(-1,0]\cup\{1\}$ $\partial A=\{-1;0;1\}$
③ $A=\mathbb{N}$; $\partial\mathbb{N}=\mathbb{N}$ ④ $A=\mathbb{Q}$ $\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}$

$a\in\partial A \not\Rightarrow a\in A$ замечание?

ОПР4. т. a – т. прикосновения мн-ва $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall O(a), O(a)\cap A\neq\varnothing$.

Обознач. $\bar{A} := \{$мн-во $\forall$ точек прикосновения$\}$
$\bar{A}$ – замыкание мн-ва A

ПР-РЫ ① $A=(0,1)$, $\bar{A}=[0,1]$ ② $A=(-\infty;0)\cup\{1;2\}$
$A=[0,1]$ $\bar{A}=A$ $\bar{A}=(-\infty;0]\cup\{1;2\}$

! Замечания. ① $a\in A\Rightarrow a\in\bar{A}$ ② $a\in A' \Rightarrow a\in\bar{A}$
$\not\Leftarrow$ в.г. пример! $\not\Leftarrow$ в.г. пример!

ОПР5. т. a – изолиров. т. мн-ва $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists O(a) / O(a)\cap A=\{a\}$

ПР-Р: $A=(0,1)\cup\{2\}$ 2 – изолир. точка

замечание ① a – изол. т. $A \Rightarrow a\in A$
$\not\Leftarrow$ в.г.

! Задача Д-ть! a-изол. т. $A \Rightarrow a\in\partial A$
$\not\Leftarrow$ в.г.

Теорема. ① $\bar{A}=A\cup A'$; ② $C\bar{A}=A_e$

①] $a\in A\cup A' \Rightarrow (a\in A)\vee(a\in A') \Rightarrow (a\in\bar{A})\vee(a\in\bar{A}) \Rightarrow (a\in\bar{A}) \Rightarrow A\cup A'\subset\bar{A}$

С другой стороны] $a\in\bar{A}$; если $a\in A.\cap\bar{A} \Rightarrow a\in A\cup A'$
если $a\notin A$, но $a\in\bar{A} \Rightarrow \forall O(a), \mathring{O}(a)\cap A\neq\varnothing \Rightarrow a\in A' \Rightarrow$
$\Rightarrow a\in A\cup A' \Rightarrow A\cup A'\supset\bar{A}$

$\Rightarrow \bar{A}=A\cup A'$

②] $a\in C\bar{A} \Rightarrow a\notin\bar{A} \Rightarrow \exists O(a) / O(a)\cap A=\varnothing \Rightarrow a\in A_e$
$\Leftarrow$ в обр. сторону

1.3 Открытые и замкнутые мн-ва

ОПР1. Мн-во $A\subset\mathbb{R}$ – замкнуто $\overset{def}{\Leftrightarrow} A'\subset A$ (т.е. оно содержит все свои предельные т.)

ПР-РЫ ① $[0,1]$ – замкнуто, $(0,1)$ – незамкнутое ③ $\varnothing$ – замкнуто
② $\mathbb{R}$ – замкнуто

ОПР2. Мн-во $A\subset\mathbb{R}$ – открыто $\overset{def}{\Leftrightarrow} A_i=A$ (A_i – внутр. точки; все т. мн-ва A – внутренние)

ПР-РЫ ① $(0;1)$ – открыто ② $[0;1)$ – неоткр, незамкн. ③ $\mathbb{R}$ – открыто ④ $\varnothing$ – открыто
⑤ $[0,1]\cup\{5\}$ – замкнуто ($A'=[0,1]\in A$)

Теорема 1 $\rceil\ a \in \mathbb{R}$, тогда любая окр-ть $O(a)$ – открытое мн-во ($O(a)$ – интервал)

▶ $\rceil\ b \in O(a)$ – произв точка

Рассмотрим окр-ть $O(b) = O(a)$ (п 3.1.1 св-во 5). Т.к. b – произв, то ◀

Следствие $\forall$ интервал – открытое мн-во

Теорема 2 Мн-ва A_i и A_e – открытые мн-ва.

▶ 1) Д-жем, что A_i открытое.

$\rceil\ a \in A_i \Rightarrow \exists\ O(a) / O(a) \subset A$ (по опред внут. точки)

$\Rightarrow O(a) \subset A_i$; в самом деле, $\rceil\ b \in O(a)$ произвольна $\Rightarrow$ окр-ть $O(b) = O(a) \subset A$

$\Rightarrow b \in A_i$

Итак, $\forall b \in O(a)$ $b \in A_i \Rightarrow O(a) \subset A_i$

2) Д-жем, что A_e – открытое

$\rceil\ a \in A_e \Rightarrow \rceil\ O(a) / O(a) \not\subset A$ (по опред внеш точки) $\Rightarrow O(a)$

Теорема 3 A – замкнуто $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

▶ 1) $\Rightarrow$

по Т. из 3.1.2 $\overline{A} = A \cup A'$ (*)

$\rceil\ A$ – замкнуто $\Rightarrow$

$\Rightarrow A' \subset A \Rightarrow A = A \cup A' \overset{*}{\Rightarrow} A = \overline{A}$

2) $\Leftarrow$ $\rceil\ A = \overline{A} \overset{*}{=} A \cup A' \Rightarrow A' \subset A \Rightarrow A$ – замкнуто ◀

Теорема 4 A – замкнуто $\Leftrightarrow$ CA – открыто

▶ 1) $\Rightarrow$ $\rceil\ A$ – замкнуто. $\boxed{П}$: CA – неоткрытое $\Rightarrow (CA)_i \neq CA \Rightarrow CA_i \subset CA \Rightarrow \rceil\ a \in CA / a \notin CA_i$

$\Rightarrow \forall O(a)$, $O(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in \overline{A}$ (точка прикосновения) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \cup A' \Rightarrow a \in A$ ($A' \subset A$, т.к. A – замкнуто) Но по предположению $a \notin A$ (т.к. $a \in CA$) $\Rightarrow \boxed{P}$

2) $\Leftarrow$ $\rceil\ CA$ – открыто. $\boxed{П}$: A – незамкнутое $\Rightarrow A' \not\subset A \Rightarrow \exists\ a \in A' / a \notin A$

$\Rightarrow a \in A'$, $a \in CA \Rightarrow a \in A' \cap CA$. Но CA – открыто

$a \in A' \Rightarrow \forall O(a)$ $O(a) \cap A \neq \emptyset$

CA – откр $\Rightarrow a \in (CA)_i \Rightarrow \exists\ O(a) / O(a) \subset CA \Rightarrow O(a) \cap A = \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{P}$ ◀

Задача 1) Д-ть: A – открыто $\Leftrightarrow$ CA – замкнуто

▶ $\rceil\ CA = B$ $CB = A$; по Т4 B – замкн, CB – открыто ◀

2) Д-ть: $\overline{A}$ – замкнуто

Теорема 5 1) $\rceil\ A_n \subset \mathbb{R}$, A_n – откр, $n = 1, \dots, m \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{m} A_n$ – открыто

2) $\rceil\ A_n \subset \mathbb{R}$ A_n – замкн $n = 1, \dots, k$. $\bigcup_{n=1}^{k} A_n$ – замкнуто

▶ 1) Обозначим $A := \bigcap_{n=1}^{m} A_n$

Д-жем, что A – открыто.

$\rceil\ a \in A$ произвольная $\Rightarrow a \in A_n$, $\forall n = \overline{1, m}$. Но A_n – открыто $\Rightarrow \exists\ O^{(n)}(a) \subset A_n$, $n = \overline{1, m}$

Но по св-ву 3 из 3.1.1 $\exists\ O(a) \subset \bigcap_{n=1}^{m} O^{(n)}(a) \subset \bigcap_{n=1}^{m} A_n = A$

$\Rightarrow a$ - внутр. точка $A \Rightarrow \forall a \in A$, a - внутр $\Rightarrow A$ - открытое ◄

②] A_n - замкнутые, $n=\overline{1,k}$.] $B := \bigcup_{n=1}^{k} A_n$

П: B - незамкнутое $\Rightarrow \exists\, a \in B' \,/\, a \notin B$ ($B' \not\subset B \Rightarrow B' \in CB$) $\Rightarrow \exists a \in B' \cap CB$
$\Rightarrow a \in B' \cap CA_n, \forall n = \overline{1,k}$; A_n - замкн $\Rightarrow CA_n$ - открытое, $\forall n = \overline{1,k} \Rightarrow a \in B' \cap \left(\bigcap_{n=1}^{k} CA_n\right)$

$\Rightarrow \exists\, O(a) \,/\, O(a) \in \bigcap_{n=1}^{k} CA_n = C\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = CB \Rightarrow O(a) \cap B = \emptyset$. Но $a \in B' \Rightarrow$ П откр. ◄

Задачи ① Д-ть что Т5 не верна для бесконечного числа мн-в
$\left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \right\}$

② Д-ть, что если A_n - откр. (замкн.) $\Rightarrow \bigcup_{1}^{\infty} A_n$ - откр ($\bigcap_{1}^{\infty} A_n$ - замкн.)
или рассмотреть $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ ($\bigcap_{\alpha} A_\alpha$)

Теорема 6.] $A \subset \mathbb{R}$. Тогда ∂A - замкнутое мн-во.

► Достаточно д-ть, $\overline{(\partial A)} = \partial A$.

1) Д-жем, что $\overline{\partial A} \subset \partial A$
] $a \in \overline{\partial A} \Leftrightarrow a$ - т. прикосновения мн-ва $\partial A \Rightarrow \forall O(a)$ $O(a) \cap \partial A \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, b \in O(a) \cap \partial A \Rightarrow \forall O(b) \,/\, O(b) \cap A \neq \emptyset$, $O(b) \cap CA \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в частности по с-ву 5 3.11. $O(a) \cap A \neq \emptyset$, $O(a) \cap CA \neq \emptyset \Rightarrow a \in \partial A \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{(\partial A)} \subset \partial A$

2) Д-жем, что $\partial A \subset \overline{(\partial A)} \overset{*}{=} \partial A \cup (\partial A)'$. Но $\partial A \subset \partial A \cup (\partial A)' = \overline{(\partial A)}$
т.е. $\partial A \subset \overline{(\partial A)}$

$\Rightarrow$ по 1 и 2 $\overline{(\partial A)} = \partial A$ ◄

1.4 Две теоремы о предельных точках.

Т1] $A' \neq \emptyset$. Тогда т. $a \in A' \Leftrightarrow \forall O(a)$, $O(a) \cap A$ - бесконечное мн-во

► ① $\Rightarrow$] $a \in A'$. Достаточно доказать, что $\mathring{O}(a) \cap A$ - беск. мн-во
От противного $\mathring{O}(a) \cap A$ - конечно, т.е. $= \{a_1 \ldots a_m\}$
Положим. $h_n = |a - a_n|$, $h = \overline{1,m}$.] $h = \frac{\min h_n}{2}$, $n = \overline{1,m}$. Тогда $\mathring{O}_h(a) \cap A = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow$ противоречит определению предельной точки.

② $\Leftarrow$ Очевидно ◄

Т2] Мн-во A' замкнуто
► 1) Если $A' = \emptyset \Rightarrow$ верно
2) Предположим, что $A' \neq \emptyset$. Надо доказать, что $\overline{A'} = A' \cup (A')' \equiv A'$
$A' \subset A' \cup (A')' = \overline{A'}$
Д-жем, что $\overline{A'} \subset A'$
] $a \in \overline{A'}$ - произвольная т, т.е. т. прикосновения $A' \Rightarrow \forall O(a)$ $O(a) \cap A' \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, b \in O(a) \cap A'$, т.к. $b \in A'$, то её окр-ть $O(b) = O(a)$ (см Т1) содержит бесконечное кол-во точек $\in A \Rightarrow \exists\, c \in \mathring{O}(a) \cap A \Rightarrow \mathring{O}(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in A'$
$\overline{A'} \subset A'$ ◄

Задача 1 Д-ть, что $(A')' \subset A'$, ($= \overline{A'}$)
2. Д-ть, что $A' \subset (A')'$ - неверно в.г. Пр-р. $A = \{\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$
$A' = \{0\}$, $(A')' = \emptyset$

§2 Предел. Последовательность

2.1 Определение. Единственность

Рассмотрим функцию (от-е) $f: n\in\mathbb{N} \to f(n) =: \underset{\in\mathbb{R}}{a_n}$

Тогда посл-ть $(a_n, n\in\mathbb{N}) \neq \{a_n, n\in\mathbb{N}\}$

ОПР1 Посл-ть $(a_n, n\in\mathbb{N})$ сходится к числу $a\in\mathbb{R}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall O(a)\ \exists N\in\mathbb{N} / a_n\in O(a), \forall n>N$

Замечан. Посл-ть $(a_n, n\in\mathbb{N})$ расходится $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall a\in\mathbb{R}\ \exists O(a) / \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N: a_n\notin O(a)$

T1 $a=\lim\limits_{(n\to\infty)} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} / |a_n-a|<\varepsilon\ \forall n>N$.

▶ Надо д-ть $a=\lim a_n$ (см ОПР1) $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} / a_n\in O_\varepsilon(a), \forall n>N$ (*)
1) $\Rightarrow$] $a=\lim a_n$ (ОПР 1) $\Rightarrow$ Выбирая в этом определении окр-ти $O_\varepsilon(a)$, получаем (*)
2) $\Leftarrow$] верно (*).] $(O(a))$ - произв окр. т. a $\overset{\text{св.2 окр-тей}}{\Longrightarrow} \exists O_\varepsilon(a) \subset O(a) \overset{\text{см}(*)}{\Longrightarrow}$
$\exists N\in\mathbb{N}\ a_n\in O_\varepsilon(a) \subset O(a)\ \forall n>N$ ◀

Отрицание (*) $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0 / \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N$: усл: $|a_n-a|\geq\varepsilon$

ПР-РЫ. ① $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, если $n>\frac{1}{\varepsilon}$
$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

② $a_n = \begin{cases} 1, & n=2k \\ -1, & n=2k+1, k\in\mathbb{N}\end{cases}$

$\forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0 / \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N$ усл $|a_n-a|\geq\varepsilon$

①] $|a|\leq\frac{1}{2}$ $\varepsilon=\frac{1}{2}$!
$n=2k$ $|a_n-a| = |1-a| \geq \frac{1}{2}=\varepsilon$
$n=2k+1$: $|-1-a| = |1+a| \geq \frac{1}{2}=\varepsilon$.

② $|a|\geq\frac{1}{2}$ $|1-a|$

T2. $\lim a_n = a$, $\lim a_n = b \Rightarrow a=b$. (единственность предела)

▶ П: $a\neq b \Rightarrow$ св-во окр $\exists O(a), \exists O(b) / O(a)\cap O(b) = \varnothing$
Имеем $\lim a_n = a \Rightarrow \exists N_1\in\mathbb{N} / a_n\in O(a), \forall n>N_1$.
$\lim a_n = b \Rightarrow \exists N_2\in\mathbb{N} / a_n\in O(b), \forall n>N_2$
Положим, $N=\max(N_1,N_2) \Rightarrow a_n\in O(a)\cap O(b) = \varnothing\ \forall n>N$. П ◀

ОПР2 Посл-ть (a_n) - бесконечно малая $\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim a_n = 0$

ОПР3. • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N} / a_n>M\ \forall n>N$
• $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N} / a_n<-M\ \forall n>N$
• (a_n) - беск. большая посл-ть. $\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim |a_n| = +\infty$

Задача ① a_n - ∞ малая $a_n\neq 0\ \forall n>N \Rightarrow \frac{1}{a_n}$ б.б.
② • $\lim a_n = +\infty \Rightarrow$? a_n - б.б
• $\lim a_n = -\infty \Rightarrow$? a_n - б.б
• (a_n) - б.б $\Rightarrow$? $(\lim a_n = +\infty) \vee (\lim a_n = -\infty)$

ОПР4 Посл-ть (a_n) - ограничена $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists M>0 / |a_n|\leq M, \forall n\in\mathbb{N}$

T3. Произведение бесконечно малой посл-ти на огранич. есть б.м. послед-ть

▶] (a_n) - б.м посл-ть, (b_n) - огр. посл. Тогда $\exists M>0 / |b_n|\leq M\ \forall n$
Имеем (a_n) - б.м $\Rightarrow \forall\varepsilon\ \exists N\in\mathbb{N} / |a_n|<\frac{\varepsilon}{M}, \forall n>N$.
Тогда $|a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon, \forall n>N \Rightarrow a_n b_n \to 0$ ◀

ПР-РЫ: ① Рассмотрим $(q^n, n\in\mathbb{N})$, где $|q|<1$. Тогда (q^n) – б.м. п-ть

▶ $|q|<1 \Rightarrow \exists h>0 / |q| = \frac{1}{1+h} \Rightarrow |q|^n = \left|\frac{1}{1+h}\right|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{1+nh}$ (по нер-ву Бернулли) $< \frac{1}{h}\cdot\frac{1}{n} \to 0$ ◀

② $(a_n = -n, n\in\mathbb{N})$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

③ $a_n = ((-1)^n\cdot n, n\in\mathbb{N})$; a_n – б.б. посл-ть.

Т4. $\rceil \lim a_n = a;\ a \overset{(<)}{>} b \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N} / a_n \overset{(<)}{>} b\ \forall n>N$

▶ ① $\rceil a>b$. Положим $\varepsilon = a-b$. Т.к. $\lim a_n = a$, то $\exists N\in\mathbb{N} / |a_n - a| < \varepsilon = a-b,\ \forall n>N \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} a_n < a+\varepsilon \\ a_n > a-\varepsilon \end{cases} \forall n>N \Leftrightarrow$ $\cancel{a}\ a+b < a_n < a+a-b$
$b < a_n\ \forall n>N$

② $\rceil a<b$. Положим $\varepsilon = b-a$. Т.к. $\lim a_n = a$, то $\exists N\in\mathbb{N} / |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n>N \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon = b \Rightarrow a_n < b\ \forall n>N$ ◀

ЗАМЕЧАНИЕ. $\lim a_n = a,\ a\geqslant b \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} \exists N\in\mathbb{N} / a_n\geqslant b,\ \forall n>N$, например $(a_n = (-1)^n\cdot\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N})$
$\lim a_n = 0$, но $a_n < 0$, если $n = 2k+1$

Т5. $\rceil \lim a_n = a;\ \exists N_0\in\mathbb{N} / a_n \overset{(\leqslant)}{\geqslant} b,\ n\geqslant N_0 \Rightarrow a \overset{(\leqslant)}{\geqslant} b$

▶ ① $\rceil \lim a_n = a,\ a_n\geqslant b,\ \forall n\geqslant N_0$. От противного: предположим $a<b \overset{T4}{\Rightarrow} \exists N_1\in\mathbb{N} /$
$a_n < b\ \forall n>N_1$; положим $N := \max(N_0, N_1)$. Тогда $a_n < b\ \forall n>N$,
$a_n \geqslant b.\ \forall n>N$ $\quad$ [Р].

② $\rceil \lim a_n = a$, $a_n\leqslant b\ \forall n\geqslant N_0$. Аналогично ◀

Замечание. $\lim a_n = a,\ a_n > b \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} a>b$. Например, $(a_n = \frac{1}{n})$, $a_n > 0$;
$\lim a_n = 0$

(*) см. после $\S$2.2 Т2.

2.2 Предельный переход и арифметические операции

Т1 $\lim a_n = a\ (\in\mathbb{R})$, $\lim b_n = b\ (\in\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \lim(a_n + b_n) = a+b$

▶ $\rceil \varepsilon>0$ – произвольно. $\lim a_n = a \Rightarrow \exists N_1\in\mathbb{N} / |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n>N_1$.
$\lim b_n = b \Rightarrow \exists N_2\in\mathbb{N} / |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall n>N_2$
$\rceil N = \max(N_1, N_2) \Rightarrow |(a_n+b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$
$= \varepsilon\ \forall n>N$ ◀

Замечание. $\lim a_n^{(k)} = a^{(k)}$, $k = 1,\dots,m$! (конечное число слагаемых!) $\Rightarrow$
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} a_n^{(k)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lim a_n^{(k)}$ ▶ ... ◀ по индукции или с ε

Следствие: $\lim a_n = a \in\mathbb{R} \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$, где α_n – б.м.

▶ 1) $\Rightarrow$ $\rceil \lim a_n = a \Leftrightarrow \lim(a_n - a) = 0 \Rightarrow a_n - a =: \alpha_n$, где α_n – б.м.
2) $\Leftarrow$ $\rceil a_n = a + \alpha_n \overset{T1}{\Leftrightarrow} \lim a_n = \lim(a+\alpha_n) = \lim a + \lim \alpha_n = a + 0 = a$ ◀

Т2 $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b \Rightarrow \exists \lim(a_n b_n) = ab$.

▶ $a_n b_n - ab = \underbrace{(a_n - a)}_{\text{б.м}}\underbrace{b_n}_{\text{огр}} - \underbrace{a}_{\text{число}}\underbrace{(b - b_n)}_{\text{б.м}} =: \underbrace{\alpha_n}_{\to 0} + \underbrace{\beta_n}_{\to 0} \overset{T1}{\Rightarrow} 0+0=0$ ◀

(*) К $\S$1.1 Т6 $\lim a_n = a \in\mathbb{R} \Rightarrow (a_n)$ – огран. ВСТАВКА К 1.1.

▶ $\rceil \varepsilon = 1$. Т.к. $\lim a_n = a$, то $\exists N\in\mathbb{N} / |a_n - a| < 1,\ \forall n>N$
$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leqslant |a_n - a| + |a| < |a| + 1\ \ \forall n>N$
Положим $M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots |a_N|, |a|+1) \Rightarrow |a_n| \leqslant M, \forall\ \cancel{n\geqslant M}\ n\in\mathbb{N}$ ◀

Замечание $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)} = a^{(k)}$, $k = 1,\dots,m$ $\Rightarrow \exists \lim \prod\limits_{k=1}^{m} a_n^{(k)} = \prod\limits_{k=1}^{m} a^{(k)}$.

② ⇐] имеется п/п-ть $(a_{n_k}, k\in\mathbb{N}) / \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in\mathbb{R}$
Обозн $b_k := a_{n_k}, k\in\mathbb{N}$
Имеем: $\forall O(a)\ \exists N\in\mathbb{N} / b_k\in O(a)\ \forall k>N \Rightarrow$
$\Rightarrow O(a)$ содержит б. число эл-тов из $(a_n) \Rightarrow a$ – т. сгущения (a_n) ◄

T2 (Б–В). Любая огр посл-ть имеет хотя бы одну точку сгущения
► Рассмотрим мн-во $A = \{$ эл-ты посл-ти $(a_n, n\in\mathbb{N})\}$
A – огр мн-во
① A – конечно $\Rightarrow \exists a\in A /$ посл-ть $(a_{n_k} = a\ \forall k\in\mathbb{N})$ – п/посл-ть a_n
но $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

② A – бесконечно. Т.о, A беск. и ограничено
Б–В для мн. б: $\exists a\in A' \Rightarrow$ по T.1 из гл. п. о пред точках
$\forall O(a)$ $O(a)\cap A$ содержит ∞ число эл-тов, другими словами $O(a)$ содержит ∞ число эл-тов посл-ти $a_n \Rightarrow a$ – т. сгущения (a_n) ◄

Сл-ие Из любой огр посл-ти можно извлечь сходящуюся п/п-ть (см T.1)

T3 (критерий сходимости посл-ти)
$\exists \lim a_n = a\in\mathbb{R} \Longleftrightarrow a_n$ – огр, a_n имеет одну и только одну т. сгущения
► ① ⇒] $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
a) $\Rightarrow a_n$ – огр. (было д-но)
б) Очевидно, что a – т. сгущ
П: $\exists b\neq a$, b – т. сгущ (a_n) Тогда $\exists O(a)\ O(b) / O(a)\cap O(b) = \varnothing$
т.к. $\lim a_n = a\in\mathbb{R}$, то для $O(a)\ \exists N\in\mathbb{N} / a_n\in O(a)\ \forall n>N$
$\Rightarrow a_n\notin O(b), \forall n>N$
$\Rightarrow O(b)$ может содержать $\leq N$ эл-тов из $(a_n) \Rightarrow$ пр-ие, т.к. b – т. сгущ.
② ⇐] (a_n) – огр. и имеет единств. т. сгущ $a\in\mathbb{R}$.
Д-м, что $\exists \lim a_n = a$
П: $\lim a_n \neq a \Rightarrow \exists \varepsilon>0 / \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N$ с усл. $|a_n - a|\geq\varepsilon$
$\Rightarrow \exists n_1 \geq 1 / |a_{n_1} - a| \geq \varepsilon$
$\exists n_2 > n_1 / |a_{n_2} - a| \geq \varepsilon$
...
$\exists n_k > n_{k-1} / |a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$

Рассм п/посл-ть $(b_k = a_{n_k}, k\in\mathbb{N})$; (b_k) – огран (т.к. (a_n) – огр) $\overset{T2}{\Longrightarrow} \exists$ т. сгущ $b\in\mathbb{R}$ в посл-ти $(b_k) = (a_{n_k}) \Rightarrow b$ – т. сгущ (a_n), но по построению (a_{n_k}) $b\neq a$
$\Rightarrow (a_n)$ имеет хотя бы 2 т. сгущ.: a и b, $a\neq b \Rightarrow$ П ◄

Сл-ие.] (a_n) сх-ся ⇒ любая её п/п-ть сходится. $(\lim a_{n_k} = a = \lim a_n)$
► a_n – сходится $\Rightarrow (a_n)$ – огран $\Rightarrow (a_{n_k}, k\in\mathbb{N})$ – огр $\overset{T2(Б-В)}{\Longrightarrow} \exists$ п/п-ть $(b_l = a_{n_k}^{(l)}, l\in\mathbb{N} /$
$\exists \lim\limits_{l\to\infty} b_l = b \Rightarrow b$ – т. сгущения $\overset{T3}{\Longrightarrow} b = a$ ◄

Пр-р $((-1)^n, n\in\mathbb{N})$ – расх, т.к. у неё 2 т. сгущения

2.6. Верхний и нижний пределы посл-ти

T1 (м-во т. сгущения огранич. посл-ти)] (a_n) – огр. посл-ть, $S := \{$мн-во т. сгущения $(a_n)\}$.
Тогда 1) $S\neq\varnothing$; 2) S – огранич; 3) $S = \bar{S}$ (т.е. S замкнуто); 4) $\exists\ a^0 := \max S$;
$\exists\ a_0 := \min S$
► ① По 2.5 T2 $\Rightarrow S\neq\varnothing$.
② Д-жем, что S – огр. П: предположим, что S – неогр. мн-во. По усл., (a_n) – огран ⇒
$\Rightarrow \exists M>0 / |a_n| \leq M, \forall n\in\mathbb{N}$ (*)
S – неогр ⇔ $\forall C>0\ \exists a\in S / |a| > C$
т.к. по предпол. S – неогр, то $\exists a\in S / |a| > 2M$

Но $a \in S \Rightarrow a$-т. сгущения $(a_n) \Rightarrow \exists a_n / |a_n - a| < M$

Тогда $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a|$

$\geq |a| - |a_n - a| > 2M - M = M \Rightarrow$ пр-ие с $(*)$

$\Rightarrow S$-огр.

3) Д-жем, что $S = \overline{S} = S \cup S'$ а) Очевидно, что $S \subset \overline{S}$

б) Д-жем, что $\overline{S} \subset S$

Пусть $a \in \overline{S} \Rightarrow a$-т. прикосновения $S \Rightarrow \forall O(a), O(a) \cap S \neq \varnothing$

$\Rightarrow \exists b \in O(a) \cap S$

Имеем $b \in S$, т.е. b-т. сгущения $\Rightarrow$ её окр-ть $O(b) = O(a)$ содержит ∞ число эл-в $(a_n) \Rightarrow a$-т. сгущения $(a_n) \Rightarrow a \in S$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \overline{S} \subset S \\ S \subset \overline{S} \end{matrix}\right\} \Rightarrow S = \overline{S}$

4) Д-жем, что $\exists a^0 := \max S$.

Имеем: по п.2 $\Rightarrow S$-огр. $\Rightarrow \exists \sup S =: a^0 \in \mathbb{R}$

Т.к. $a^0 = \sup S$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b \in S / a^0 - \varepsilon \leq b \leq a^0$. В частности $b \in O_\varepsilon(a^0)$

Но b-т. сгущения $(\in S) \Rightarrow O_\varepsilon(a^0)$ содержит ∞ число эл-тов из (a_n)

Т.к. $\forall O(a^0) \; \exists O_\varepsilon(a^0) \subset O(a^0)$, то в итоге получаем что $a^0 \in S$

Аналогично доказывается утв для a_0 (или $\hat{a}_n = -a_n$)

ОПР 1 Пусть (a_n)-огр. посл-ть. Тогда $\overline{\lim}\, a_n := \max S$ (верхний предел посл-ти (a_n))

$\underline{\lim}\,(a_n) := \min S$ (нижний предел посл-ти)

Т 2 Посл-ть (a_n) -сходится $\Leftrightarrow (a_n)$-огр., и $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$

2.7. Критерий Коши сходимости посл-ти.

ОПР Посл-ть (a_n) - посл-ть Коши (фундам. посл-ть) $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} / |a_n - a_m| < \varepsilon$, $\forall n, m > N$.

Т (крит. Коши сходимости посл-ти)

(a_n) - сходится $\Leftrightarrow (a_n)$ - посл-ть Коши

1) $\Rightarrow$ Пусть (a_n) сходится $\Rightarrow \exists \lim a_n =: a \in \mathbb{R}$

Имеем $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} / |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$

$\Rightarrow |a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_m - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \forall n, m > N$

$\Rightarrow (a_n)$-посл-ть Коши

2) $\Leftarrow$ Пусть (a_n)-посл-ть Коши

а) Д-жем, что (a_n)-огр.

Для $\varepsilon = 1 \quad \exists N \in \mathbb{N} / |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m > N$

Фиксируем произв. $n_0 > N \Rightarrow |a_m| = |a_m - a_{n_0} + a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|, \forall m > N$

Положим $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_{n_0}|\} \Rightarrow |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

б) Д-жем, что (a_n)-сходится

п. а $\Rightarrow (a_n)$-ограничен $\Rightarrow \exists a$ - т. сгущ. (a_n)

Т.о. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} / |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > N$ (т.к. (a_n) - посл-ть Коши) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 > N / |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (т.к. a-т. сгущ)

$\Rightarrow |a_n - a| = |(a_n - a_{n_0}) + (a_{n_0} - a)| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > N$

$\Rightarrow \lim a_n = a$

замечание: (a_n)-расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n, m > N / |a_n - a_m| \geq \varepsilon$

ПР-Р $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \; n \in \mathbb{N}$

(a_n) расходится

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$, $\forall N \in \mathbb{N} \; \exists n = N+1, m = 2n$: $|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \exists \varepsilon = \frac{1}{2} \;/\; \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n = N+1, m = 2n \quad |a_m - a_n| \geq \frac{1}{2}$.

§ 3. Предел функции

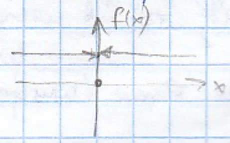
3.1 Определение. Единственность

Св-ва проколотых окр-тей

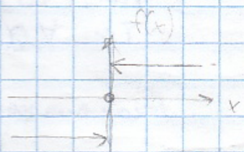
1) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \dot{O}(a) \neq \varnothing$
2) $\forall \dot{O}(a) \; \exists \; \delta > 0 \;/\; \dot{O}_\delta(a) \subset \dot{O}(a)$
3) $\forall \dot{O}^{(1)}(a), \ldots, \dot{O}^{(m)}(a) \; \exists \; \dot{O}(a) \;/\; \dot{O}(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} \dot{O}^{(k)}(a)$
4) $a \neq b \Rightarrow \exists \; O(a), O(b) \;/\; \dot{O}(a) \cap \dot{O}(b) = \varnothing$

ОПР 1 (по Коши) $\exists f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$ (можно не писать, но в других т $a \in A'$). Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall O(b) \; \exists \dot{O}(a) \;/\; f(x) \in O(b), \; \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

ПР-Р 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$



2) $\operatorname{sgn} x = f(x)$ $\quad \nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$



▶ по опред ◀

Т1. $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда а) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \dot{O}(a) \;/\; |f(x) - b| < \varepsilon$ $\forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

б) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \;/\; |f(x) - b| < \varepsilon \;\; \forall x \in A$ если $0 < |x - a| < \delta$

ПР-Р $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

▶ Зорич с. 136 ◀

Т2. (единственность lim) $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \Rightarrow b = c$

▶ П $b \neq c \Rightarrow$ по с-вам окр-тей $\exists \; O(c), \exists O(b) \;/\; O(b) \cap O(c) = \varnothing$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow \exists \; \dot{O}^{(1)}(a) \;/\; f(x) \in O(b) \;\; \forall x \in \dot{O}^{(1)}(a) \cap A$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \Rightarrow \exists \; \dot{O}^{(2)}(a) \;/\; f(x) \in O(c) \;\; \forall x \in \dot{O}^{(2)}(a) \cap A$

Св-во окр-тей (3) $\exists \; O(a) \;/\; \dot{O}(a) \subset \dot{O}^{(1)}(a) \cap \dot{O}^{(2)}(a)$. Тогда $\forall x \in \dot{O}(a) \cap A \neq \varnothing$ ($a \in A'$)

$\left.\begin{array}{l} f(x) \in O(b) \\ f(x) \in O(c) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in O(b) \cap O(c) = \varnothing \Rightarrow$ Пр-ие. ◀

ОПР 2 $f: A \to \mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$ (A неогранич сверху), тогда $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall O(b) \; \exists \; M > 0 \;/\; f(x) \in O(b), \; \forall x \in A: x > M$ $(\forall x \in A \cap (M; +\infty))$

$f: A \to \mathbb{R}$, $\inf A = -\infty$; тогда $\exists \lim f(x) = b \in \mathbb{R}$ $x \to -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall O(b) \; \exists \; M > 0 \;/\; f(x) \in O(b)$, $\forall x \in A: x < -M$ (или $M < 0$)

ПР-Р: (1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ (2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$ (3) $f(n) = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

ОПР 3. $\exists A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда посл-ть $(x_n, n \in \mathbb{N})$ — посл-ть Гейне $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (2) $\lim x_n = a$ (3) $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ОПР 4 (по Гейне) (можно трактовать как теорему)

$f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда $\exists \lim f(x) = b \in \mathbb{R} \iff$ для $\forall$ посл-ти Гейне, связанной с точкой a, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$

Т 2 (эквивалентность опр. по Коши и по Гейне).

$f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (по Коши) $\iff \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (по Гейне).

▶ (1) $\Rightarrow$ Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ (К.).] $\varepsilon > 0$ - произв. Тогда по усл. для $\exists$

$\exists\, O(a) / |f(x) - b| < \varepsilon,\ \underline{\forall x \in \mathring{O}(a) \cap A}$ $(*)$

• Пусть (x_n) - произв. посл-ть Гейне, связ. с т. a

Имеем $x_n \to a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} / x_n \in O(a), \forall n > N$

Но по опр. посл-ти Гейне $x_n \in A$, $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x_n \in \mathring{O}(a) \cap A, \forall n > N}$ $(**)$

В итоге $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} / |f(x_n) - b| < \varepsilon, \forall n > N$ (см $(*)$ и $(**)$)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$; т.к. (x_n) - произв. посл-ть Гейне, то 1 д-но

(2) $\Leftarrow$] $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ (Г.)

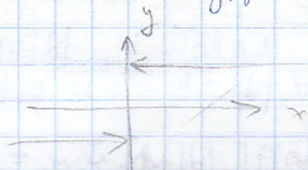
ПП: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$; $\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in \mathring{O}_\delta(a) \cap A$ с усл: $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$.

Тогда (x_n) - посл-ть Гейне, связ. с т. a, в самом деле:

$|x_n - a| < \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow x_n \to a$, причём $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\forall n$

Тогда по усл (Г.) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. С другой стороны $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ П

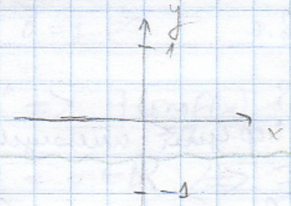
Пр-ры (1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$



$x_n = \frac{1}{n}$ $f(x_n) = 1 \to 1$

$y_n = -\frac{1}{n}$ $f(y_n) = -1 \to -1$

(2) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$



$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $x_n \neq 0$, $x_n \in \mathbb{R}$

Тогда $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$

$y_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ $f(y_n) = \sin(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = -1$

$y_n \neq 0$
$y_n \in \mathbb{R}$
$y_n \to 0$, $n \to \infty$

опр Г.

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ОПР 5 $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда f - б. малая при $x \to a$; $f = \bar{o}(1), x \to a \overset{def}{\iff} \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

Задачи: 1) определить $f = o(1)$, $x \to +\infty$ $\sup A = +\infty$

2) опред. $f = o(1)$, $x \to -\infty$ $\inf A = -\infty$

ОПР 6 $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \overset{def}{\iff} \forall M > 0\ \exists\, O(a) / f(x) > M$, $\forall x \in \mathring{O}(a) \cap A$

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \overset{def}{\iff} \forall M > 0\ \exists O(a) / f(x) < -M$ $\forall x \in \mathring{O}(a) \cap A$

(3) f - б.б. при $x \to a \overset{def}{\iff} \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$

Пр-р (1) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $A = \{x > 0\}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; f - б.б. при $x \to 0$

Задачи: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \; -$

ОПР 7. $f: A \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, B := A \cap (-\infty; a), \; a \in B'$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b \in \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (левый предел)

$\forall O(b) \; \exists O(a) / f(x) \in O(b) \; \forall x \in \dot{O}(a) \cap B$.

Замечание $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / |f(x) - b| < \varepsilon, \forall x \in A \cap (a-\delta, a)$

Задача: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$, б.д.

ОПР 7'. $f: A \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \; C := A \cap (a; +\infty), a \in C'$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b \in \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (правый пр)

$\forall O(b) \; \exists O(a) / f(x) \in O(b) \; \forall x \in \dot{O}(a) \cap C$ можно $O(a)$, т.к $a \notin C$

Замеч.'

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 / |f(x) - b| < \varepsilon \; \forall x \in A \cap (a, a+\delta)$

Пр-ры ① $f(x) = sgn(x)$ $\exists \lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$, $\exists \lim\limits_{x\to -0} f(x) = -1$

② $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$ $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to +0} (f(x)) = +\infty$

$\exists B, C$ – из опр-ий 7 и 7'

Т3 $f: A \to \mathbb{R}, a \in B' \cap C'$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b) \wedge (\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b)$

Замеч. $a \in B' \cap C' \Rightarrow a \in A'$
$\not\Leftarrow$ в.г

3.2. Нек св-ва функц, имеющих предел

ОПР1 $f: A \to \mathbb{R}$ Тогда f – огр. функ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists M > 0 / |f(x)| \leq M, \forall x \in A$.

ОПР2. $f: A \to \mathbb{R}, a \in \bar{A}$ f – локально огранич. в т. $a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists M > 0 \; \exists O(a) /$
$|f(x)| \leq M, \forall x \in O(a) \cap A$

Замеч. $f: A \to \mathbb{R}$ – огр $\Rightarrow$ f – лок. огр. в т. a, $\forall a \in A$.
$\not\Leftarrow$ в.г. нет, например: $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$

Задач: $\exists \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$

Формулировать и доказывать самостоятельно

$\exists \lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = b \in \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}, a \in A'$, $\forall$ посл. Г. (a_n) связ с т. a посл-ть $(f(x_n))$ – огр-а. Верно ли что f – лок. ограничена в т. a?

Т1 $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $g: A \to \mathbb{R}$
f – б.м. при $x \to a$, g – лок. огр. в т. a
$\Rightarrow f \cdot g$ – б.м. при $x \to a$

▷ По усл. $\exists O(a), \exists M > 0 \ / \ |g(x)| \le M, \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

$]\ \varepsilon > 0$ произв-но. Т.к. $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$, то $\exists \dot{O}^{(1)}(a) / \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}, \ \forall x \in \dot{O}^{(1)}(a) \cap A$

$\exists \dot{O}^{(2)}(a) \subset \dot{O}(a) \cap \dot{O}^{(1)}(a)$

Тогда $|f(x) \cdot g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon \ \forall x \in \dot{O}^{(2)} \cap A$ ($\neq \varnothing$, т.к. x – пред)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = 0$ ◁

! Задача $f, g: A \to \mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$), f – б.м. при $x \to +\infty$
$\exists C > 0, \exists M > 0 \ / \ |g(x)| \le M$, $\forall x \ge C$ $(\le -M)$ $\Rightarrow (f \cdot g)$ – б.м. при $x \to \underset{(-)}{+} \infty$

+ то же самое для правого и левого предела

ПР-Р $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) = 0$ по Т1 x – б.м., $\sin \frac{1}{x}$ – огр

Т2 $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ – локально ограничена в т. a

▷ Т.к. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то для $\varepsilon = 1$ $\exists \dot{O}(a) / \ |f(x) - b| < 1, \ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

$\Rightarrow |f(x)| = |f(x) - b + b| < 1 + |b|$, $\forall x \in \dot{O}(a) \cap A$
$\Rightarrow$ если $a \notin A$, то $|f(x)| \le M := 1 + |b| \ \forall x \in O(a) \cap A$.

Если $a \in A$: $|f(x)| \le M_1 := \max\{1 + |b|, |f(a)|\}$, $\forall x \in O(a) \cap A$ ◁

! Задача: Д-ть Т.2 (сформул. тоже) для $a = \pm\infty$

Верно ли, что $f: A \to \mathbb{R}$ – огр, $a \in A'$ $(a = \pm\infty)$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$? $\left(\sin \frac{1}{x}\right)$

Т3 $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \dot{O}(a) / f(x) = b + \alpha(x), \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$, где α – б.м. при $x \to a$

▷

$f(x) - b$)

a→+∞, то $\varphi(a) \to |x>C|$

$\boxed{T4}$ $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $b \underset{(<)}{>} C \Rightarrow \exists\, \dot{O}(a) / f(x) \underset{(<)}{>} c \ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$.

▶ Пусть $\varepsilon = b - c > 0$. Тогда $\exists\, \dot{O}(a) / |f(x) - b| < \underbrace{b - c}_{\varepsilon}$ $\forall x \in \dot{O}(a) \cap A$ проколотая, т.к.

$b - b + c < f(x) < b + (b - c) \Rightarrow f(x) > c, \ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$ ◀

Задача: $a \overset{+}{(-)} \infty$

Замечание: $b \geq c \overset{в.\,г.}{\not\Rightarrow} \exists\, \dot{O}(a) / f(x) \geq c \ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$.

$\boxed{T5}$ $f: A \to B$, $a \in A'$, $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\exists\, \dot{O}(a) / f(x) \underset{(\leq)}{\geq} c \ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

$\Rightarrow b \geq c$. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = x}$ – контрпример для $\geq$

▶ Пусть $\exists\, \dot{O}(a) / f(x) \geq c \ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

П: $b < c$ $(b = \lim\limits_{x\to a} f(x))$
T4

$\Rightarrow \exists\, \dot{O}^1(a) / f(x) \geq c \ \forall x \in \dot{O}^1(a) \cap A$

$\exists\, \dot{O}^{(2)}(a) \subset \dot{O}(a) \cap \dot{O}^1(a) \Rightarrow \forall x \in \dot{O}^{(2)}(a) \cap A$ $\neq \varnothing$, т.к. $a \in A'$ $(f(x) < c) \wedge (f(x) \geq c)$

$\Rightarrow$ П ◀

Задачи: 1) $a \pm \infty$ $(\sup A = +\infty, \ \inf A = -\infty)$
2) T5, T1 – д-во по Гейне.

Замечание: $\underset{в\ \dot{O}(a) \cap A}{f(x) > c} \overset{в.\,г.}{\not\Rightarrow} \lim f(x) > c$ $(f(x) = |x| > c$

Напоминание: $\sup A = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow}$ A-неогр. сверху $\Leftrightarrow$ A-огр. сверху $\overset{def}{\Leftrightarrow} \neg(\exists M \underset{\in \mathbb{R}}{>} 0 \ \ x \leq M \ \forall x \in A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \ \exists x \in A / x > M$

$\inf A = -\infty$

3.3 Критерий Коши существования предела ф-ции в точке

T (Кр. Коши) $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \dot{O}(a) /$
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall x, y \subset \dot{O}(a) \cap A$.

▶ 1) $\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) =: b \in \mathbb{R}$. Пусть $\varepsilon > 0$ – пр-но. Тогда $\exists\, \dot{O}(a) / |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall x \in \dot{O}(a) \cap A \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x) - b + b - f(y)| \leq |f(x) - b| + |f(y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$\forall x, y \in \dot{O}(a) \cap A$.

2) $\Leftarrow$ Пусть выполн. усл. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \dot{O}(a) / |f(x) - f(y)| = \varepsilon, \forall x, y \in \dot{O}(a) \cap A$
a) $\Rightarrow \forall \varepsilon = \frac{1}{n} \ \exists\, \delta_n > 0 / |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}, \ \forall x, y \in \dot{O}_{\delta_n}(a) \cap A =: B_n$

б) $\forall n \in \mathbb{N}$ фиксируем произвольно $x_n \in B_n$ через П нельзя! см опр- для $\forall$ посл-ти
Рассмотрим (x_n) и соотв. посл-ть $(f(x_n))$
Д-жем, что $(f(x_n))$ – посл-ть Коши (фунд.)

Имеем: $\forall n, m \in \mathbb{N} \ \forall x \in B_n \cap B_m \neq \varnothing$

$\begin{cases} |f(x)-f(x_n)| < \frac{1}{n} \\ |f(x)-f(x_m)| < \frac{1}{m} \end{cases}$ (см. п. а) $\Rightarrow$ $|f(x_n)-f(x_m)| = |f(x_n)-f(x)+f(x)-f(x_m)| < \frac{1}{n}+\frac{1}{m} < \varepsilon$
$x \in B_n \cap B_m$ $\quad \forall n,m > N$, где $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $f(x_n)$ – посл-ть Коши.

Замечание: $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$

б) п. б) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) =: b \in \mathbb{R}$

Имеем: (см. п. б) $|f(x_n) - \underbrace{f(x_m)}_{\kappa \lim\limits_{m\to+\infty}}| < \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$

ПП5 $\Rightarrow$ $|f(x_n)-b| \leq \frac{1}{n}$

г) $\forall x \in B_n = \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap A$
Имеем: $|f(x)-b| = |f(x)-f(x_n)+f(x_n)-b| \leq \underbrace{|f(x)-f(x_n)|}_{<\frac{1}{n}} + \underbrace{|f(x_n)-b|}_{\leq \frac{1}{n} (п. б)} < \frac{2}{n} < \varepsilon$
$\forall n > N$, $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$.

В итоге $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{O}_{\delta_n}(a) \ / \ |f(x)-b| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathring{O}_{\delta_N}(a) \cap A$, δ_N – из п. а
$N \geq \frac{2}{\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$.

Замечание.

1) Имеет место нер-во $||a|-|b|| \leq |a-b|$, $a, b \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} |a| \overset{(2)}{\leq} |b| + |a-b| \\ |a| \overset{(1)}{\geq} |b| - |a-b| \end{cases}$

Д-жем (1): $|b| = |(b-a)+a| \leq |a-b|+|a| \Rightarrow |a| \geq |b|-|a-b|$
(2): $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$

2) $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$ (сл. из замеч. 1)
$\not\Leftarrow$ в. г.

3) $f(x) \underset{x\to a}{\to} b \Rightarrow |f(x)| \underset{x\to a}{\to} |b|$
$\not\Leftarrow$ в. г.

Задача: 1) Сформ. и д-ть критер. Коши для одностор. пределов

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$? $\qquad g(x) = \begin{cases} f(x), & x < a \\ b, & x \geq a \end{cases}$

$\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$

Если не получается, то повторить д-во кр. Коши

2) Сформ. и д-ть кр. Коши для $\qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ / \ |f(x)-f(y)| < \varepsilon \ \ \forall x, y \in (M, +\infty) \cap A$
На случай $\sup A = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

Пр-р $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Надо д-ть: $\exists \ \varepsilon > 0 \ / \ \forall \delta > 0 \ \exists \ x, y \in \mathring{O}_\delta(0) \ / \ |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$
$\varepsilon = 1$; $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $x < \delta$; $\quad y = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $y < \delta$; $n \in \mathbb{N}$.

3.4 Предельный переход и арифметич. операции

T1 $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $g: A \to \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = b+c$ (1)

► $\exists (x_n)$ – произв. посл-ть Г., связ. с т. a. Тогда по опр. Гейне $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = c$

$\Rightarrow$ по Т. для посл-тей $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = b+c \Rightarrow$ (1) верно ◄

Замечания. ① Аналог. доказывается $\lim\limits_{x\to a} f_k(x) = b_k$, $k=1 \ldots m \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k$

► ... ◄

② Задача: сф-ть и д-ть соотв. теоремы для случаев
а) $\lim\limits_{x\to a\pm 0}$ б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$

T2 Усл. Т1 $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$ ► по Гейне ◄

► $f(x)\cdot g(x) - bc = \underbrace{(f(x)-b)}_{б.м}\underbrace{g(x)}_{лок. огр} + \underbrace{(g(x)-c)}_{б.м}\cdot b \to 0$ ◄

для $\lim\limits_{x\to a\pm 0}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$

T3 Усл. Т1, $c \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ ► по Г. ◄

► $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{f(x)\cdot c - b\,g(x)}{g(x)\cdot c} \to 0 = o(1)\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{g(x)} \to 0$

в некот. окр-ти т. a $\dot{O}(a) \cap A$ (т.к. $\exists\ O(a) / |g(x)| > \left|\frac{c}{2}\right|\ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$)

$\Rightarrow \frac{1}{|c|}\cdot\frac{1}{|g(x)|} \leq \frac{2}{c^2}$ т.е. $\frac{1}{c\,g(x)}$ – лок. огр. функц. в т. a. ◄

Вопрос. f, g – б.б при $x \to a$ $\overset{В.2}{\not\Rightarrow}$ $f+g$ – б.б при $x\to a$
$f(x) = x$, $g(x) = -x$.

3.5 Предельный переход и неравенства

T1 $a \in A'$, $f, g: A \to \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $b > c \Rightarrow \exists\, O(a) / f(x) > g(x)$ $\forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

► $h(x) = f(x) - g(x)$ – " – ◄

T2 $a \in A'$, $f, g: A \to \mathbb{R}$ $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, $\exists\, O(a) / f(x) \geq g(x)\ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

$\Rightarrow b \geq c$

T3 $a \in A'$, $f, g, h: A \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R}$

$\exists\, O(a) / f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

► $\exists (x_n)$ – произв. п-ть Г., связ. с т. $a \Rightarrow f(x_n) \to b$, $g(x_n) \to b$, $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ $n \geq N$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} h(x_n) = b$ (при $n \geq N$ $x_n \in \dot{O}(a) \cap A$) ◄

3.6 Предел композиции

Т. $\boxed{\begin{matrix} f: A \to B, \ a \in A' \\ g: B \to \mathbb{R}, \ b \in B' \end{matrix}}$, 1) $\forall O(b) \ \exists O(a) \ / \ f(x) \in \overset{\circ}{O}(b), \ \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap A$; 2) $\exists \lim\limits_{x \to b} g(x) = C$ $\Big\} \Rightarrow$

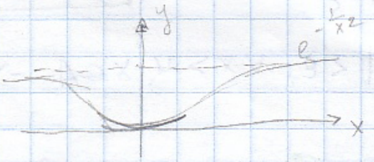
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = C$.

▶ усл. 2) $\Rightarrow \forall O(c) \ \exists O(b) / g(y) \in O(c), \ y \in \overset{\circ}{O}(b) \cap B$. (*)

усл 1) $\Rightarrow$ для $O(b) \ \exists O(a) / f(x) \in \overset{\circ}{O}(b), \ \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap A$.

В итоге: $\forall O(c) \ \exists O(a) / g(f(x)) \in O(c) \ \forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap A$.
$\Rightarrow f(x) \in \overset{\circ}{O}(b) \cap B$ (см (*)) ◀

ПР-РЫ ① $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \to 0$



$\sin e^{-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\sin e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{1}{x^2}}}$

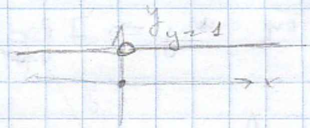
$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$

$g(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y}{y}, & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & y = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ($0 = b$, $0 = a$)

Имеем $\left.\begin{matrix} f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ по Т $\exists \lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x^2}} \sin e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$

② $g(y) = |\operatorname{sgn} y|, \ y \in \mathbb{R}$



$f(x) \equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix} \exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \\ \exists \lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) \overset{?}{\neq} 1$, но $g(f(x)) = g(0) = 0 \not\to 1$

Не выполнено усл. 1 теор: $x \notin \overset{\circ}{O}(0)$

③ $g(y) = |\operatorname{sgn} y|, \ y \in \mathbb{R}$
$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0$

$\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ (б.м $\times$ огр) $\quad \exists \lim\limits_{x \to 0} g(y) = 1$

$\lim g(f(x)) \overset{?}{\neq} 1$ Но $g(f(x_n)) = 1$, $g(f(y_n)) = g(0) = 0 \ \forall n \Rightarrow$
$x_n \to +0$, $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $\quad y_n = \dfrac{1}{\pi n} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$ (разные ответы при разных посл-тях Гейне)

! Задачи Сформул. и д-ть анал. для $a = (\pm)\infty$, $x \to a \pm 0$

3.7 lim монотонной функции.

$f: A \to \mathbb{R}$

① f монот. возрастает на A $(\uparrow) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{(x_1 \leq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2)) \ \forall x_1, x_2 \in A\}$
② f – монот. убыв на A $(\downarrow) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{(x_1 \leq x_2) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in A\}$
③ f строго возрастает на A $(\uparrow\uparrow) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in A\}$
④ f-строго убывает на A $(\downarrow\downarrow) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in A\}$

Т 1 $A \subset \mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$; $f: A \to \mathbb{R}$, $f \uparrow$ на A. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ f–огранич. сверху.

▶ (1) $\Rightarrow$ $f\uparrow$ на A, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \exists \underset{M\in A}{M>0} / f(x) \le C, \forall x > M, x\in A$

Т.к. $f\uparrow$ на A, то $\forall x \le M, x\in A$: $f(x) \le f(M) \le f(\underbrace{M+x_0}_{\exists M\in A}) \le C$

$\Rightarrow f(x) \le C, \forall x \in A \Rightarrow f$ - огр. сверху

(2) $\Leftarrow$ $f\uparrow$ на A, f - огр. сверху.

Рассмотрим мн-во $F := \{y = f(x), x\in A\} = f(A)$

F - огр. сверху $\Rightarrow \exists \sup F =: b \in \mathbb{R}$ (не $+\infty$)

Имеем: • $\forall x\in A$ $f(x) \le b$

• $\boxed{\forall \varepsilon>0}$ $\exists M \in A / f(M) > b-\varepsilon \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \underset{x\in A}{\forall x > M}$ $f(x) \ge f(M) > b-\varepsilon$

В итоге, $\forall x > M, x\in A$ $\begin{cases} f(x) \le b < b+\varepsilon \\ f(x) > b-\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \boxed{|f(x)-b| < \varepsilon \;\; \forall x \in A\cap(M;+\infty)}$

Итак $\forall \varepsilon>0$ $\exists M>0 / |f(x)-b| < \varepsilon, \forall x > M, x\in A \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b = \sup F := \sup\limits_{x\in A} f(x)$ ◀

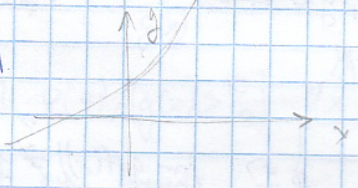
$\boxed{\text{Сл}}$ $\underset{\sup A=+\infty}{f: A\to\mathbb{R}}$, $f\uparrow$ на A, f огр. сверху $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sup\limits_{x\in A} f(x) := \sup f(A)$

$\boxed{\text{T.1'}}$ $f: A\to\mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$, $f\downarrow$ на A $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ огр. снизу

▶ ◀

$\boxed{\text{Сл}}$ $f: A\to\mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$, $f\downarrow$, f огр. снизу $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \inf\limits_{x\in A} f(x) := \inf f(A)$

$\boxed{\text{T2}}$ $f: A\to\mathbb{R}$, $\inf A = -\infty$, $f\uparrow$ на A.
Тогда $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
f огран. снизу



$\boxed{\text{T2'}}$ $f: A\to\mathbb{R}$, $\inf A = -\infty$, $f\downarrow$ на A. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f$ огр. сверху

3.8 Сравнение асимптотического поведения функций

$\boxed{\text{ОПР 1}}$ $f, g: A\to\mathbb{R}$, $a\in A'$. Тогда $f = \underline{O}(g)$ при $x\to a \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists O(a)\ \exists \alpha: \dot{O}(a)\cap A \to \mathbb{R}$
α - огр. функция, с-во представл. $f(x) = \alpha(x)\, g(x)$, $\forall x \in \dot{O}(a)\cap A$

$\boxed{\text{ОПР 1'}}$ $f, g: A\to\mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$ $(\inf A = -\infty)$. Тогда $f = \underline{O}(g)$ при $x\to +\infty\,(-\infty) \overset{def}{\Leftrightarrow}$
$\exists M>0, \exists \alpha: \underset{\ne\varnothing, \text{ т.к. } \sup A = +\infty}{(M,+\infty)\cap A} \to \mathbb{R}$ / α - огр. функция $f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$ $\forall x > M, x\in A$
$((-\infty,-M)\cap A \to \mathbb{R})$ $(\forall x < -M, x\in A)$

$\boxed{\text{ОПР 1''}}$ $x\to a\pm 0$ (полуокр-ти)

Пр-ры (1) $f: A\to\mathbb{R}$, $a\in A'$, f - огр. ф-ция локально в т. a $\Leftrightarrow f = \underline{O}(1)$, $x\to a$

(2) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x\ne 0$. $\Rightarrow f = \underline{O}(x)$ $x\to 0$

(3) $f(x) = x\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $f(x) = \underline{O}(x)$ $x\to\pm\infty$

Замечания (1) Усл. ОПР 1; $\exists O(a) / g\ne 0$ в $\dot{O}(a)\cap A$. Тогда $f = \underline{O}(g(x))$, $x\to a$
$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ - огранич. локально в т. a

(2) $f = O^*(g)$, $x\to a \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists O(a), \alpha: \dot{O}(a)\cap A \to \mathbb{R}$
$f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$ $\forall x\in \dot{O}(a)\cap A$, причём $\exists \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) \in \mathbb{R}$

$f = O^*(g) \Rightarrow f = \underline{O}(g)$, $x\to a$

③. Усл. замеч. 2 выполн.
$\exists\, O(a) / g(x) \neq 0,\ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$. Тогда $f = O^*(g),\ x \to a;\ f = \underline{O}(g),\ x \to a \iff$

$\iff \exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{ОПР 2}}$ $f, g: A \to \mathbb{R},\ a \in A'$. Тогда $f \sim g$ при $x \to a \overset{def}{\iff} \exists\, O(a),\ \exists\, \alpha: \dot{O}(a) \cap A \to \mathbb{R} /$

$\exists \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1,\quad f(x) = \alpha(x) \cdot g(x),\ \forall x \in \dot{O}(a) \cap A$

$\boxed{\text{ОПР 2'}}$ $f, g: A \to \mathbb{R},$

$\boxed{\text{ОПР 2''}}$

Св-ва $\sim$

① $f \sim g,\ x \to a \Rightarrow g \sim f,\ x \to a$

② $f \sim g,\ g \sim h,\ x \to a \Rightarrow f \sim h,\ x \to a$

$\left.\begin{matrix} f_1 \sim g_1 \\ f_2 \sim g_2 \end{matrix}\right\}\ x \to a \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

$\not\Rightarrow f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

③ $f(x) \sim g(x),\ x \to a$

Зсм-я: ① $g \neq 0$ в $\dot{O}(a) = \{(f \sim g$ при $x \to a\} \iff$

$\iff \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

②. $f \sim g \equiv 0,\ x \to a$; по опр. $\exists\, \alpha: \dot{O}(a) \to \mathbb{R} / f(x) = \alpha(x) \cdot 0$
$\forall x \in \dot{O}(a) \cap A\ (f: A \to \mathbb{R})$

Пр-ры.

① $x \to 0$: $\sin x \sim x$ (уметь д-ть)

② $x \to +\infty$: $x^2 + x \sim x^2$

③ $x \to (\pm 0)$ $x + x^2 \sim x$

Основные эквивалентности. $(x \to 0)$

① $\sin x \sim x$ ② $\ln(1+x) \sim x$ 3) $e^x - 1 \sim x$ 4) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

▶ ... ◀

Св-ва $f \sim g$ (для вычисления пределов)

① $f_1 \sim g_1,\ f_2 \sim g_2,\ x \to a \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2\quad x \to a$

▶ $\left.\begin{matrix} \exists\, \dot{O}^{(k)}(a),\ \exists\, \alpha: \dot{O}^{(k)}(a) \to \mathbb{R} /\ f_k(x) = \alpha_k(x) \cdot g_k(x)\ \ \forall x \in \dot{O}^{(k)}(a);\ k = 1, 2 \\ \exists\, \dot{O}(a) \subset \dot{O}^{(1)}(a) \cap \dot{O}^{(2)}(a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f_1 f_2 = \alpha\, g_1 g_2$ в $\dot{O}(a) \cap A,$

где $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2,\quad \alpha(x) \to 1,\ x \to a$. ◀

② Усл. ①; $f_2, g_2 \neq 0$ в нек. $\dot{O}(a) \cap A$

$\Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2},\ x \to a$ ▶ _ ◀

③ $f_1 \sim g_1;\ f_2 \sim g_2,\ x \to a \overset{в\text{-}г}{\not\Rightarrow} f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2,\ x \to a$

Например, ⓐ $f_1(x) = g_1(x) = x$; $f_1 \sim g_1\quad x \to 0$
$f_2(x) = -x + x^2$; $g_2(x) = -x + x^3$; $f_2 \sim g_2(x)\quad x \to 0$

Но: $f_1 + f_2 = x^2$ $\quad x^2 \not\sim x^3$ $\quad x \to +\infty$
$g_1 + g_2 = x^3$

ⓑ $x \to +\infty,\ f_1(x) = x^2 = g_1(x);\quad f_1 \sim g_1\quad x \to +\infty$
$f_2(x) = -x^2 + x\quad g_2(x) = -x^2 + 1\qquad f_2 \sim g_2\quad x \to +\infty$

Но $f_1 + f_2 = x$
$g_1 + g_2 = 1\qquad x \not\sim 1\quad x \to +\infty$

• $f = \underline{O}(g), x \to a \overset{\text{в.г.}}{\Rightarrow} g = \underline{O}(f)$?

• $f \underset{x\to a}{\sim} g \Rightarrow f = \underline{O}(g), x \to a$ — верно
$\not\Leftarrow$ в.г.

ОПР 9 $f, g: A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Тогда $f = \overline{o}(g)$, $x \to a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \dot{O}(a), \exists \alpha: \dot{O}(a) \to \mathbb{R} / f(x) = \alpha(x) g(x)$ $\forall x \in \dot{O}(a) \cap A$, где $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ $(\alpha(x) = \overline{o}(1), x \to a)$

ЗАМЕЧАНИЕ 1) $\exists g \neq 0$ в нек. $\dot{O}(a) \cap A \Rightarrow \{f = \overline{o}(g), x \to a \Leftrightarrow \frac{f}{g} = \overline{o}(1)\}$

2) $f = \overline{o}(g), x \to a \underset{\not\Leftarrow \text{в.г.}}{\Rightarrow} f = O(g)$, ~~$x \to a$~~

ПР-РЫ 1) $x \sin x = \overline{o}(x)$, $x \to 0$
2) $x \to 0$: $x^{3/2} = \overline{o}(x)$
3) $x \to +\infty$ $x = \overline{o}(x^2)$

ЗАПОМНИТЬ! $x \to 0$ I. (ф.т.)
1) $\sin x = x + \overline{o}(x)$
2) $\ln(1+x) = x + \overline{o}(x)$
3) $e^x - 1 = x + \overline{o}(x)$
4) $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + \overline{o}(x)$

— получить эквивал.

II. 1) $x \to +0$
$\ln^m x = \overline{o}(\frac{1}{x})$? — верно $\forall \alpha > 0$ $\forall m$
$\frac{1}{x} = \overline{o}(\ln x)$ — неверно

$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln^m x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\ln^m x}{x^{-\alpha}} = 0$

2) $x \to +\infty$
$x = \overline{o}(e^x)$? — верно
$e^x = \overline{o}(x)$ — неверно
$\lim_{x\to\infty} \underset{\infty\cdot 0}{x e^{-x}} = 0$, или $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

3.

§4. Предел функц. по базе

ОПР 1 Мн-во $A \subset X$ (универс.)
Система мн-в $\mathcal{B} = \{B\}$ называется базой (базисом фильтра), если: 1) $B \neq \emptyset$, $\forall B \in \mathcal{B}$

рукописная B(бэ)

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} / B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Пр-ры
1) $A \in \mathbb{R}$, $a \in A'$, $B := \dot{O}(a) \cap A$; $\mathcal{B} := \{B\}$ $x \to a$
2) $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$
$\{B = O(a) \cap A\}$
3) $x \to +\infty$: $A \subset \mathbb{R}$, $\sup A = +\infty$
$B = A \cap (M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$
4) $x \to -\infty$ сами
5) $x \to a - 0$. $A \in \mathbb{R}$, $a \in (A \cap \{x < a\})'$ — пред. т.
$B = \{(-\infty, a) \cap A\}$
6) $x \to a + 0$
7) $A = \mathbb{N}$, $B := \{N+1, N+2, \dots\}$, $N \in \mathbb{N}$; $\lim_{n\to\infty} x_n$

ОПР 2. $f: A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ — база в A. Тогда $\lim_{\mathcal{B}} f = b \in \mathbb{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall O(b) \exists B \in \mathcal{B} / f(x) \in O(b)$ $\forall x \in B$
(предел по базе)

ОПР 2' $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists B \in \mathcal{B} / |f(x) - b| < \varepsilon$ $\forall x \in B$

ОПР 3 $f: A \to \mathbb{R}$; $\mathcal{B}$ — база в A; $\lim_{\mathcal{B}} f = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall M > 0$ $\exists B \in \mathcal{B} / f(x) > M$ $\forall x \in B$

ОПР4 $f: A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-база в A, тогда f - б.м. по $\mathcal{B} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{\mathcal{B}} f = 0$

Д-ва теорем: ед-ть lim, арифм (стр. $\bar{o}(1) = \bar{o}(1)$), нер-ва

T1 $f, g: A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{B\}$; $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = b$, $\lim\limits_{\mathcal{B}} g = c \Rightarrow \exists \lim\limits_{\mathcal{B}} (f+g) = b+c$

▶ $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B_1 \in \mathcal{B} / \frac{\varepsilon}{2} > |f(x) - b|, \forall x \in B_1$.
Аналогично $\exists B_2 \in \mathcal{B} / |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in B_2$

Имеем $\exists B_3 \in \mathcal{B} / B_3 \subset B_1 \cap B_2$
Тогда $|(f+g)(x) - (b+c)| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ◀

T2 (Кр. Коши существования $\lim\limits_{\mathcal{B}}$) $f: A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-база в A. Тогда $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f \in \mathbb{R}$
$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathcal{B} / |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in B$ (*)

▶ I $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f =: b \in \mathbb{R}$,] $\varepsilon > 0$ - произвольно $\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} / |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in B \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - b| + |f(y) - b| < \varepsilon, \forall x, y \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (*) верно.

II $\Leftarrow$] $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} / |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in B$ (*)

1) $* \Rightarrow \forall n \quad \exists B_n \in \mathcal{B} / |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}, \forall x, y \in B_n$

2) $B_n \neq \varnothing \quad \forall n \Rightarrow \exists x_n \in B_n$. Рассмотрим $(f(x_n), n \in \mathbb{N})$

Д-жем, что $f(x_n)$ - посл-ть Коши (т.е. $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$)
$\sigma(P^{(n)}, \xi^{(n)}) - \sigma(P^{(m)}, \xi^{(m)})$

] $\varepsilon > 0$ пр-но; фиксируем произвольно $N \in \mathbb{N}$ с усл. $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$
Имеем: $\forall n, m \in \mathbb{N} \ \exists B \in \mathcal{B} / B \subset B_n \cap B_m$ (опр. базы) $B \neq \varnothing$
Т.к. $B \neq \varnothing$, то $\exists x \in B \subset B_n \cap B_m \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| \leq |f(x_n) - f(x)| + |f(x_m) - f(x)| <$
$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N} \leq \varepsilon \quad \forall n, m > N$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} / |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \forall n, m > N \Rightarrow f(x_n)$ - посл-ть Коши

3) П 2) $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) =: b \in \mathbb{R}$

Имеем из п2) $|\underset{\text{фикс}}{f(x_n)} - \underset{\left(\underset{m \to \infty}{\to b}\right)}{f(x_m)}| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \quad \forall n, m$

$\left.\begin{aligned} &\lim\limits_{m \to \infty} |f(x_n) - f(x_m)| = |f(x_n) - b| \\ &\lim\limits_{m \to \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[|\lim| = \lim| \, |]{\lim \text{ сохр } \leq} |f(x_n) - b| \leq \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

4)] $\varepsilon > 0$ - пр-но, $N \in \mathbb{N}$ с усл $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Рассмотрим B_N

Имеем для $x \in B_N$ $\quad |f(x) - b| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_N)|}_{\text{по опр } B_N < \frac{1}{N}} + \underbrace{|f(x_N) - b|}_{\text{п. 3 } < \frac{1}{N}} < \frac{2}{N} \leq \varepsilon$

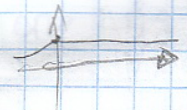
В итоге: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B := (B_N) \in \mathcal{B} / |f(x) - b| < \varepsilon \ \forall x \in B$ -
опред lim $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) \in \mathbb{R}$ ◀

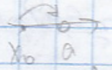
Задача: сформулировать и д-ть т. о lim по базе композиции ф-ций
Вопрос: справедливо ли утвержд.:] $f: A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-база в A, $f \uparrow$ на A, f огранич на A $\Rightarrow \exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f$? "нет", рассмотрим раз $x \to \pm\infty$

Д- A'

Т3 $f: A \to \mathbb{R}$, $A \cap (-\infty, a] =: B$, $a \in B'$, $f \uparrow$ на B
Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, O(a) / f|_{O(a) \cap B}$ — огр. ф-ция (сверху)
$\Rightarrow$ — есть предел $\Rightarrow$ огр. (сужение — ф-ция опред на подмн-ве)

▶ I $\Leftarrow$ Положим $g(x) := \begin{cases} f(x); x \in B \\ b := \sup\limits_{O(a) \cap B} f \end{cases}$, $\forall x \in C$, где $C = A \cap (a, +\infty)$
Тогда g — огр. сверху на A; $g \uparrow$ на A. $\Rightarrow$ Т. Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ ◀





$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 \in B / g(x_0) > b - \varepsilon$
$\forall x > x_0, x_0 \in B \quad g(x) \geq g(x_0) > b - \varepsilon$
$b - \varepsilon < g(x) \leq b$

ГЛАВА 4 Непрерывные ф-ции

§ 1. Непрерывность ф-ции в точке. Точки разрыва.

1.1 Непрерывность ф-ции в точке

ОПР 1 Пусть $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Тогда f — непрерывна в т. a ($f \in C(a)$) $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall O(f(a))$ $\exists O(a) / f(x) \in O(f(a)), \forall x \in O(a) \cap A$

Замечание 1 Пусть a — изолированная т. $A \Rightarrow f \in C(a)$
2 Пусть $a \in A$, a — не изолир точка $\Rightarrow$ a — предельная ($\neg(\mathring{O}(a) = \varnothing)$)

Т $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$
Тогда $f \in C(a) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

▶ I $\Rightarrow$ $f \in C(a)$

II $\Leftarrow$ Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \forall O(f(a)) \; \exists O(a) / f(x) \in O(f(a)) \; \forall x \in \mathring{O}(a) \cap A$, $f(a) = f(a)$ $\Rightarrow \forall x \in O(a) \cap A$ ◀

СЛ-ИЕ $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. Тогда $f \in C(a) \overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ посл. Г (x_n), сход. к т. a, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

ПР-РЫ
1. $f(x) = const$, $x \in \mathbb{R}$
$f \in C(a)$ $\forall a \in A$
2. $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$
$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$ $(\delta = \varepsilon)$
3. $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = 2\underbrace{\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|}_{\leq \frac{x-a}{2}} \underbrace{\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|}_{1} \leq \underbrace{|x-a|}_{\to 0} < \varepsilon$ $(\delta = \varepsilon)$

ОПР 2: $f: A \to \mathbb{R}$, $B := A \cap (-\infty, a]$, $a \in A \cap B'$. Тогда f непрерывна слева в т. a $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$

ОПР 2' $f: A \to \mathbb{R}$, $B := A \cap [a; +\infty)$, $a \in A \cap B'$. Тогда f — непрер справа в т. a $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

Т $f: A \to \mathbb{R}$, $B := A \cap (-\infty; a]$, $C = A \cap [a, +\infty)$, $a \in A \cap B' \cap C'$
Тогда $f \in C(a) \Leftrightarrow f$ — непр слева в т. a и непр справа в т. a

▶

Пр-ры ① $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x>0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$ f непр слева в $x=0$

② $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$ $f \in C(0)$ – нет.

$\begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ $f \in C(0)$

$\boxed{\text{ОПР 3}}$ $f: A \to \mathbb{R}$. Тогда f непрерывна на всём мн-ве A. $(f \in C(A)) \overset{def}{\iff}$ f – непр в т. a $\forall a \in A$.

1.2. Локальные св-ва непрерывной ф-ции

$\boxed{\text{Т1}}$ (локальная ограниченность ф-ции, непрерывной в точке)
$f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $f \in C(a) \Rightarrow$ f лок. ограничена в т. a

▶ ① a – изолированная т. A. $\Rightarrow \exists\, \overset{\circ}{O}(a) \,/\, \overset{\circ}{O}(a) \cap A = \varnothing \Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{O}(a)$ $f(x) = f(a)$ – огранич.

② $a \in A, a \in A' \underset{f \in C(a)}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R} \xRightarrow[\text{ф-ции, имеющей предел}]{\text{Т. о лок. огр}}$ $f(x)$ – лок. огранич в т. a ◀

$\boxed{\text{Т2}}$ (о сохранении знака) $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $f \in C(a)$, $f(a) \underset{(<)}{>} 0 \Rightarrow \exists\, O(a) / f(x) \underset{(<)}{>} 0$ $\forall x \in O(a) \cap A$

▶ 1) a – изол

2) a – пред

◀

$\boxed{\text{Т3}}$ $(+, *, \div)$ $f, g: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $f, g \in C(a)$

$\Rightarrow$ 1) $f + g \in C(a)$
2) $f \cdot g \in C(a)$
3) $\frac{f}{g} \in C(a)$, $g(a) \neq 0$

▶ а) a – изолир. – верно, т.к. любая ф-ция непрер в изол точке
б) $a \in A' \cap A$ Следует из т. об арифметических операциях с ф-циями, имеющими предел $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$ ◀

Замечание! т. остаётся верной для $\sum\limits_{i=1}^{k} f_i$, $\prod\limits_{i=1}^{m} f_i$

Т 4 (была) $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $b \in B'$, $\exists \lim\limits_{y \to b} g(y) = c \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$

$\forall\, O(b)\ \exists\, O(a) / f(x) \in \overset{\circ}{O}(b) \cap B$ $\forall x \in \overset{\circ}{O}(a) \cap A$.

$\boxed{\text{Т4}}$ о композиции непрерывных ф-ций. $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $f \in C(a)$, $g \in C(f(a))$ ($f(a) \in B$ – не нужно, т.к. $f: A \to B$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g \circ f \in C(a)$

▶ ① $g \in C(f(a)) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, O(f(a)) / |g(y) - \underset{g \circ f(a)}{g(f(a))}| < \varepsilon$, $\forall y \in O(f(a)) \cap B$
$f \in C(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ② Для окр-ти $O(f(a))$ $\exists\, O(a) / f(x) \in O(f(a)) \cap B$ $\forall x \in O(a) \cap A$.
В итоге $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, O(a) / |g(f(x)) - g(f(a))| = |g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \varepsilon$,
$\forall x \in O(a) \cap A \Rightarrow g \circ f \in C(a)$ ◀

Пр-ры 1. Рассм $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0,\ x\in\mathbb{R},\ a_i\in\mathbb{R} \Rightarrow f\in C(a)\ \forall a\in\mathbb{R}$ (по Т3)

2. Рациональная ф-ция $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $\underbrace{x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,\ldots,x_m\}}_{A}$, где P_n, Q_m — многочл степеней n и m соотв

$x_1,\ldots,x_m$ — Q корни $\Rightarrow f(a)\in C(a)\ \forall a\in A$

$\exists X:=\{x\in\mathbb{R} / Q(x)=0\}$
$A:\mathbb{R}\setminus X$

3. $f(x)=a^x,\ \underset{a>0}{a\neq 1},\ x\in\mathbb{R}$.

Тогда $f\in C(x_0),\ \forall x_0\in\mathbb{R}$

▶ достаточно рассмотр. $a>1$ (если $0<a<1$, то $a^x=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$)

1) $x_0=0$: Имеем: $\forall n\in\mathbb{N},\ a^{\frac{n}{n}}=(1+\underbrace{(a^{\frac{1}{n}}-1)}_{>0})^n \overset{\text{б. Ньютона}}{\geq} 1+n(a^{\frac{1}{n}}-1) \Rightarrow a-1>n(a^{\frac{1}{n}}-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<a^{\frac{1}{n}}-1<\dfrac{a-1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0$

$\Rightarrow$ т. о зажатой пос-ти $\exists\lim\limits_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}})=1$ (1) $\Rightarrow \exists\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-\frac{1}{n}})=1$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N} / \begin{matrix}|a^{1/n}-1|<\varepsilon\\ |a^{-1/n}-1|<\varepsilon\end{matrix}\ \forall n>N$.

$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n}}<a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon\quad \forall n>N$

Для выбранного N положим $n_0>N$ (фикс), например $n_0=N+1$

$1-\varepsilon<a^{-1/n_0}<a^{1/n_0}<1+\varepsilon$ (3)

Положим $\delta:=\dfrac{1}{n_0}$ ($n_0=n_0(\varepsilon)$). Тогда $\forall x$: $\underset{-\delta<x<\delta}{|x|<\delta}=\dfrac{1}{n_0}$ имеем

$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^x<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon$ (см (3)) $\Rightarrow |a^x-1|<\varepsilon\quad\forall x\in O_\delta(0)$

В итоге $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 / |a^x-1|<\varepsilon\ \forall x\in O_\delta(0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to 0}a^x=1=a^0$

2) $x_0\in\mathbb{R}$:

$a^x-a^{x_0}=a^{x_0}(\underbrace{a^{x-x_0}-1}_{\to 0\ (\text{см п. 1})})\to 0,\ x\to x_0 \Rightarrow f\in C(x_0)$

1.3 Классификация т. разрыва

$\boxed{\text{ОПР 1}}$ $f: A\to\mathbb{R},\ a\in A\cap A'$, f — разрывна в т. $a \overset{def}{\Longleftrightarrow} f\notin C(a)$
т. a — $\boxed{\text{т. разрыва}}$ ф-ции f

Пр-ры 1. $f(x)=|\operatorname{sgn}x|,\ x\in\mathbb{R}$
$f\notin C(0)$

2. $f(x)=\operatorname{sgn}x,\ x\in\mathbb{R}$
$f\notin C(0)$ $\exists f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)=-1$; $\exists f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$; $f(0)=0$

3. $f(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
f разрывна в т. 0

4. $f(x)=\sin\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\nexists\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $f\notin C(0)$

5. Ф-ция Дирихле $f(x):=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\overline{\mathbb{Q}}\end{cases}$, $]\ a\in\mathbb{R}$, произвольно

$\exists (a_n^{(1)}) \,/\, a_n^{(1)} \to a,\ a_n^{(1)} \in \mathbb{Q},\ a_n^{(1)} \neq a \Rightarrow f(a_n^{(1)}) = 1,\ \forall n$

$\exists (a_n^{(2)}) \,/\, a_n^{(2)} \to a,\ a_n^{(2)} \in \overline{\mathbb{Q}},\ a_n^{(2)} \neq a \Rightarrow f(a_n^{(2)}) = 0,\ \forall n$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow f(x) \notin C(a)\ \forall a \in \mathbb{R}$

Обознач: $f(a \pm 0) = \lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ (если этот $\lim \exists$)

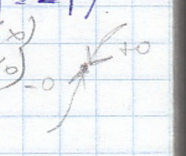
$\boxed{\text{ОПР 2}}$ $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$. т. a – $\boxed{\text{устранимая}}$ т. разрыва (f имеет в т. a устранимый разрыв) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists f(a-0), \exists f(a+0)$ $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$ (пр-р 1)

$\boxed{\text{ОПР 3}}$ $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$; f имеет в т. a разрыв $\boxed{\text{I рода}} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$
(в т. a f имеет устр. разрыв) $\vee$ ($\exists f(a \pm 0)$, $f(a+0) \neq f(a-0)$) (пр-р 2)

$\boxed{\text{ОПР 4}}$ f имеет в т. a разрыв $\boxed{\text{II рода}} \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \notin C(a)$, разрыв не I рода $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\nexists \lim\limits_{x \to a-0} f(x)) \vee (\nexists \lim\limits_{x\to a+0} f(x))$ (см. пр-ры 3–5)

Теор. о точках разрыва монотонной ф-ции на отрезке
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \uparrow (\downarrow)$ на $[a,b] \Rightarrow$ f может иметь на $[a,b]$ т. разрыва только I рода

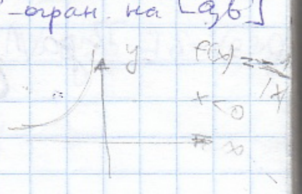
▶ Не ограничивая общности, рассматриваем $f\uparrow$ на $[a,b]$ (иначе рассм. $g = -f$)
Надо показать: $\forall x_0 \in [a,b]$ $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x), \text{ если } x_0 \in (a,b], = \sup\limits_{x \in [a,x_0)} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x), \text{ если } x_0 \in [a,b) = \inf\limits_{x\in(x_0;b]} f(x) \end{cases}$



Напомним! $\sup\limits_A f := \sup\{f(x), x \in A\}$
$\inf\limits_A f := \inf\{f(x), x \in A\}$

(1) $] x_0 \in (a,b]$

$f\uparrow$ на $[a,b] \Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$ f-огран. на $[a,b]$
$\Rightarrow$ f-огран. на $[a,x_0) \Rightarrow \exists \sup\limits_{[a,x_0)} f =: b_0$



Д-жем, что $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_0$

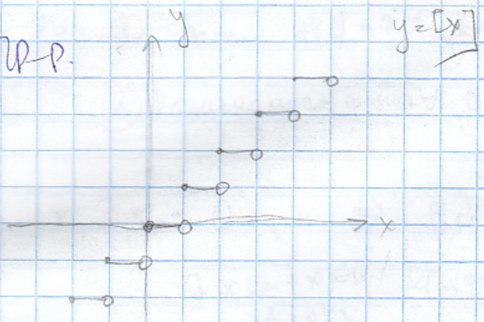
Имеем: $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in [a, x_0) \,/\, f(x_1) > b_0 - \varepsilon$
Но $f\uparrow$ на (x_1, x_0). Положим $\delta := x_0 - x_1$. Тогда $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$
имеем $f(x)$ $(f\uparrow)$ $\Rightarrow f(x_1) \le f(x) \le b_0 < b_0 + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) =: f(x_0 - 0) = \sup\limits_{[a,x_0)} f(x)$

(2) $] x_0 \in [a,b)$. Д-м, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \inf\limits_{(x_0;b]} f(x)$

Пр-р.



1.4 Глобальные св-ва функц, непрерывных на отрезке

Л1. $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A \cap A'$, $f \in C(a) \Rightarrow \forall (x_n \in A, n \in \mathbb{N}) / \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,
$f(x_n) \to f(a), n \to \infty$.

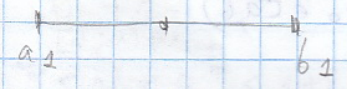
► • $f \in C(a) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists O(a) / |f(x) - f(a)| < \varepsilon \ \ \forall x \in O(a) \cap A$
• $x_n \to a, n \to \infty \Rightarrow$ для $O(a)$ $\exists N \in \mathbb{N} / x_n \in O(a), \forall n > N$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \ \ \forall n > N$ ◄

Л2. $f \in C[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) / f(c) = 0$

► • Положим $[a_1, b_1] := [a,b]$, $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$

• Делим $[a_1, b_1]$ – пополам
Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то доказано
Иначе обозначаем $[a_2, b_2]$ – та половина отрезка $[a_1, b_1]$, для к. $f(a_2) f(b_2) < 0$



И т.д. Построили $[a_n, b_n]$.
Два случая:
1) $\exists n_0 \in \mathbb{N} / f\left(\frac{a_{n_0}+b_{n_0}}{2}\right) = 0$ – верно (доказано)
2) $\nexists n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ построена система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n], n \in \mathbb{N}\} / f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \forall n$

Л. Кантора о влож. отрезках: $\exists c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$
Имеем $|b_n - c| \le (b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0 \Rightarrow b_n \to c$; аналогично $a_n \to c, n \to \infty$

Тогда Л1 $f(b_n) \to f(c)$, $f(a_n) \to f(c)$.
$0 > f(b_n) \cdot f(a_n) \to f^2(c) \ge 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) f(b_n) \le 0$ $\quad f^2(c) \le 0 \Rightarrow 0 \le f^2(c) \le 0 \Rightarrow f(c) = 0$ ◄

Т1 (о промежут. значениях непрерывной функц на отрезке)

$f \in C[a,b]$, $f(a) < f(b)$ $(>)$ $\Rightarrow \forall M \in (f(a), f(b))$ (или $\forall M \in (f(b), f(a))$)
$\exists c \in (a,b) / f(c) = M$

► Положим $g(x) = f(x) - M$, где $M \in (f(a), f(b))$. Тогда $g \in C[a,b]$ (Σ непр. ф)
$g(a) = f(a) - M < 0$
$g(b) = f(b) + M > 0$ $\Rightarrow$ по Л2 $\exists c \in (a,b) / g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = M$ ◄

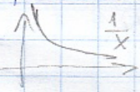
Вопрос: $f \in C(A)$, $A = [a,b] \cup [c,d]$; $f(a) \cdot f(d) < 0 \Rightarrow$ отр. ли ∇? в.г. нет

T2 (первая т. Вейерштрасса для непрерывной ф-ции на отрезке)
$f \in C[a,b] \Rightarrow f$ огр. на $[a,b]$ (обозн. $f \in B[a,b]$)

▶ $\forall x_0 \in [a,b]$ $f \in C(x_0) \Rightarrow f$ лок. огранич. в т. $x_0 \Rightarrow \exists\, O(x_0), \exists M(x_0) /$
$|f(x)| \le M(x_0)$ $\forall x \in O(x_0) \cap [a,b]$

Рассмотрим { интервалов $\{O(x), x \in [a,b]\}$
Имеем: $[a,b] \subset \bigcup\limits_{x\in[a,b]} O(x)$ (т.к. $\{O(x), x\in[a,b]\}$ - покрытие $[a,b]$ интервалами)
лм $\xRightarrow[\text{о подпокр}]{\text{Б-Л}}$ $\exists$ конечное подпокрытие $[a,b]$: $\{O(x_1), \dots O(x_m)\} / [a,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} O(x_k)$

Положим $M := \max\limits_{k=\overline{1,m}} M(x_k)$. Тогда $\forall x \in [a,b]$ $\exists k \in \{1, \dots m\} / x \in O(x_k) \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)| \le M(x_k) \le M \Rightarrow f(x)$ - огран. на $[a,b]$ ◀

Вопрос: $f \in C(a,b) \overset{?}{\not\Rightarrow} f \in B(a,b)$  нет
(Можно перенести на $\overset{?}{\text{в}}$ кон. число отр)

T3 (вторая т. Вейерштрасса) $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, x_1 \in [a,b] / f(x_1) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$
$\exists\, x_2 \in [a,b] / f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$

▶ 1) Д-м, что $\exists\, x_1 \in [a,b] / f(x_1) = \sup\limits_{[a,b]} f$.
Заметим, что $f \in B[a,b]$ (T2 - I т. Вейерштрасса) $\Rightarrow \exists \sup\limits_{[a,b]} f =: M \in \mathbb{R}$
$\boxed{\text{П}}$: $\forall x \in [a,b]$ $f(x) < M$
Рассмотрим вспомогательную ф-цию $g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$, $x \in [a,b]$
Тогда: $g \in C[a,b] \underset{T2}{\Rightarrow} \exists B > 0 / 0 < g \le B$, $0 < \frac{1}{M - f(x)} \le B \Leftrightarrow M - f(x) \ge \frac{1}{B} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) \le M - \frac{1}{B} = M' < M$

Итак, $f \le M'$ на $[a,b] \Rightarrow M'$ - верхн. грань $f(x)$ ($f[a,b]$)
$M' < \sup f = M$ - $\boxed{\text{Р}}$.
2) $f^*(x) = -f \Rightarrow \exists x_2 \in [a,b] / f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ ◀

Замечание: 1. кон. число отр
2. $f \in C(a,b) \underset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}$ Например $f(x) = x$, $x \in (0,1)$

ОПР $f: A \to \mathbb{R}$. Тогда f - $\boxed{\text{равном. непрерывна}}$ на мн-ве $A \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 /$
$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in A$ с усл. $|x_1 - x_2| < \delta$

(Равном. непр. отлич от обычной тем, что у обычной δ зависит от точки)

ЗАМ-ие 1. f - равном. непр на $A \Rightarrow f \in C(A)$
▶ ... ◀
2. f - непр на $A \underset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}$ f - равном. непр. Например: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$
$f(x) \in C(0,1)$
Д-ем, что f - не равном. непр на $(0,1)$, т.е.
$\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0$ $|f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon$ для $\exists x_1, x_2 \in A / |x_1 - x_2| < \delta$
В с.р.] $\varepsilon := 1$ $\forall \delta > 0$ $x_1(\delta) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $x_2(\delta) = \frac{1}{2\pi n}$, n - велико наст, чтобы
$|x_1(\delta) - x_2(\delta)| < \delta$ $0 < x_1(\delta) < \frac{\delta}{2}$
$0 < x_2(\delta) < \frac{\delta}{2}$
При этом $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 0$ $\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 1 \ge \varepsilon = 1$

T. 4: T. Кантора о непрерывной ф-ции на отрезке
$f \in C[a,b]$, $\Rightarrow f$ - равном. непр на $[a,b]$

▷ $]\ f \in C[a,b]$ П: f не равн непр на $[a,b]$, т.е. $\exists \varepsilon>0 / \forall \delta>0\ \exists x_1,x_2 \in [a,b] /$ $|f(x_1)-f(x_2)| \geqslant \varepsilon$, $|x_1-x_2|<\delta$

В частности, $\delta=\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}: \exists \alpha_n \in [a,b], \exists \beta_n \in [a,b] / |\alpha_n-\beta_n|<\frac{1}{n}$, $|f(\alpha_n)-f(\beta_n)| \geqslant \varepsilon$

Рассмотрим посл-ть $(\alpha_n; n\in\mathbb{N})$. Имеем $a \leqslant \alpha_n \leqslant b$, $\forall n \Rightarrow (\alpha_n)$ — огранич. посл-ть

$\Rightarrow$ Т. Вейер. $\exists$ п/п-ть $(\alpha_{n_k}, k \in \mathbb{N}) / \alpha_{n_k} \to \alpha \in \mathbb{R}$ $k\to\infty$

Рассмотр п/п-ть $(\beta_{n_k}, k\in\mathbb{N})$. Имеем: $\beta_{n_k} = (\beta_{n_k}-\alpha_{n_k})+\alpha_{n_k}$. Но $|\beta_{n_k}-\alpha_{n_k}| \leqslant \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(\beta_{n_k}-\alpha_{n_k})=0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\beta_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\alpha_{n_k} = \alpha$; $\beta_{n_k}\to\alpha$, $k\to\infty$

Заметим, что $\alpha\in[a,b]$, т.к. $[a,b]$ — замкнутое мн-во $\Rightarrow f \in C(\alpha)$

Л1 $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(\alpha_{n_k}) \to f(\alpha) \\ f(\beta_{n_k}) \to f(\beta)=f(\alpha)\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon \leqslant |f(\alpha_{n_k})-f(\beta_{n_k})| \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<\varepsilon\leqslant 0$ (пред. переход)

$0<0$ Р ◀

1.5. Т. об обратной ф-ции

Т1 $f\in C[a,b]$, $f\uparrow\uparrow$ на $[a,b] \Rightarrow 1) \exists\ g := f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$, причем 2) $g\uparrow\uparrow$ на $[f(a), f(b)]$, 3) $g \in C[f(a), f(b)]$

▷ 1) Д-м, что $f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ (1) — биекция

а) f из (1) инъективно, в. с. д, $x_1\neq x_2$, не огран. общности, $x_1<x_2$. Тогда $f(x_1)<f(x_2)$ ($f\uparrow\uparrow$)

б) f из (1) сюръективно, т.е. $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ (2)

в. с. д., $]\ y\in f([a,b]) \Rightarrow \exists\ x\in[a,b] / f(x)=y$, но $a\leqslant x\leqslant b \Rightarrow$ $f(a)\leqslant f(x)=y\leqslant f(b) \Rightarrow y\in[f(a), f(b)] \Rightarrow f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$.

$]\ y\in[f(a), f(b)]$. Если $(y=f(a)) \vee (y=f(b)) \Rightarrow y\in f([a,b])$

Пусть $f(a)<y<f(b) \xRightarrow{\text{Т1 из п. 4}} \exists\ x\in[a,b] / f(x)=y \Rightarrow$

$\Rightarrow y\in f([a,b]) \Rightarrow [f(a), f(b)] \subset f([a,b])$

$\Rightarrow [f(a), f(b)] = f([a,b]) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Вывод: $f: [a,b]\to[f(a), f(b)]$ — биекция

$\Rightarrow g := f^{-1} = [f(a), f(b)] \to [a,b]$

2) $g\uparrow\uparrow$ на $[f(a), f(b)]$

В с. д. $]\ f(a)\leqslant y_1<y_2\leqslant f(b)$

П: $g(y_1)=x_1 \geqslant g(y_2)=x_2$

Т.е. $x_1\geqslant x_2 \Rightarrow \underset{f(g(y_1))}{f(x_1)} \geqslant \underset{f(g(y_2))}{f(x_2)} \Leftrightarrow y_1\geqslant y_2$ — пр-ие Р

$\Rightarrow g(y_1)<g(y_2)$

3) Д-жем, что g — непрер на $[f(a), f(b)]$, т.е. $g\in C(M)$, $\forall M \in [f(a), f(b)]$

а) $]\ M\in[f(a), f(b)]$. Д-жем, что $g\in C(M)$

П: $g\notin C(M)$. Но $g\uparrow \Rightarrow$ т. о т. разрыва монот. ф-ции $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\underbrace{g(M-0)}_{\lim\limits_{y\to M-0} g(y)} \neq g(M)) \vee (\underbrace{g(M+0)}_{\lim\limits_{y\to M+0} g(y)} \neq g(M))$ (т. разр I рода)

$]\ g(M-0)\neq g(M)$. Заметим, что (см т. о т. разр монот. функц) $g(M+0) = \sup\limits_{[a,M)} g$; кроме того, $g(M-0)<g(M)$ (П: $g(M-0)>g(M)$, т.е. $g\notin C(M)$ = не м б по предположению)

$\lim\limits_{y\to M-0} g(y)>g(M) \xRightarrow{\text{лок св-во функций из предела}} \exists\ (M-\delta, M) / \forall y\in(M-\delta, M)$, $g(y)>g(M)$ $\forall y\in(M-\delta, M)$

по $y < M$, $g\uparrow$ — $\boxed{P}$).

Имеем: $\forall y \in [f(a), M)$: $f(a) \leq y \leq \sup\limits_{[f(a), f(b)]} y$

$g[f(a), f(b)] \neq [a, b]$
$= [a, g(M-0)] \cup [g(M), b]$

3) Заново: а) $\exists M \in [f(a), f(b)]$ д-жем, что $\lim\limits_{y \to M-0} g(y) = g(M)$ $(= g(M-0))$

$\boxed{\Pi}$: $\exists$ $g(M-0) \neq g(M)$, $\Rightarrow g(M-0) < g(M)$ [Т-ма о разрывах монот. функц на отрезке] $\Rightarrow g(M-0) = \sup\limits_{[f(a), M)} g < g(M)$

Имеем: • Если $f(a) \leq y < M \Rightarrow \underbrace{g(f(a))}_{a} \leq g(y) < \sup\limits_{[f(a), M)} g = g(M-0) < g(M)$

$\Rightarrow a \leq g(y) \leq \sup\limits_{[f(a), M)} g = g(M-0)$

• Если $M \leq y \leq f(b) \Rightarrow g(M) \leq g(y) \leq b$

В итоге $\forall y \in [f(a), f(b)]$ $g(y) \in [a, g(M-0)] \cup [g(M); b] \subsetneq [a, b]$ $\boxed{P}$

$\Rightarrow g(M-0) = g(M)$

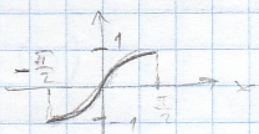
б) $\exists M \in [f(a), f(b))$ д-жем. что $\lim\limits_{y \to M+0} g(y) = g(M+0) = g(M)$

$\boxed{\Pi}$: $\exists$ $g(M+0) \neq g(M) \Rightarrow g(M+0) > g(M)$ ...

аналогично

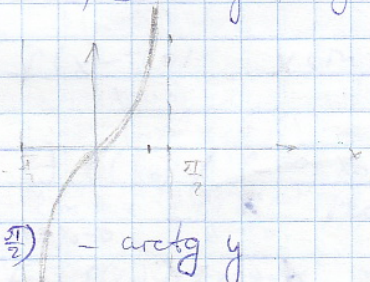
Замечание — Т1' $\exists f \in C[a, b]$, $f \downarrow\downarrow$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 1) $\exists g = f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b]$
2) $g \downarrow\downarrow$, 2) $g \in C[f(b), f(a)]$

Пр-ры 1) $f(x) = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



• Имеем: $f \in C[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$f \uparrow\uparrow$ на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$\Rightarrow$ по Т1 $\exists g = f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$g = \arcsin y$ $\in [-1, 1]$ $g\uparrow\uparrow$ $g \in C[-1; 1]$

2) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



Имеем: $f \in C(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$,
$f \uparrow\uparrow \Rightarrow f$ - биекция
$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ на $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \exists g = f^{-1} = (-\infty; +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ — $\operatorname{arctg} y$

Рассмотрим сужение f на $[-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$
$f_\varepsilon : [-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon] \to [\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)]$
$\exists M \in (-\infty; +\infty)$: $\exists \varepsilon > 0 / M \in [\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)]$
$g = g_\varepsilon : [\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)] \to [-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon]$
$g_\varepsilon \in C(M)$ по Т1 $\Rightarrow g \in C(M)$

3. $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}(-\infty; +\infty)$

▷ $f: (-\infty; +\infty) \to (0; +\infty)$ - биекция

$\Rightarrow \underbrace{g = f^{-1}}_{g(y) = \log_e y}$ $\quad (0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$

$] M \in (0; +\infty)$ Рассмотрим сужение f на $[-B, B]$

$f_B : [-B, B] \to [e^{-B}, e^{B}]$

Выберем $B > 0$ / $M \in [e^{-B}, e^{B}]$ и рассмотрим $g_B = f_B^{-1}, [e^{-B}, e^{B}] \to [-B, B]$

$\Rightarrow$ по т 1 $g_B \in C(M)$, $g_B \equiv g$ на $[e^{-B}, e^{B}] \Rightarrow g \in C(M)$ ◁

Непрерывность элементарных функц.

1. Многочлен $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $x \in \mathbb{R}$ (Σ непр функц)
2. Рацион $Q(x) = \frac{P_{1,m}(x)}{P_{2,n}(x)}$, $x_1, \ldots x_n$ - корни $P_{2,n}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$
3. Показат. функция a^x $a \neq 1$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$
4. Логарифм. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$; $x \in (0, +\infty)$
5. Степенная $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$ $\quad e^y \ (\ln y)$

▷ (т. о суперпозиции! непрер. функц) ◁

6. Тригонометрические функц, обратные тригоном функц
7. Суперпозиции вышеперечисл функц (1–6)

ГЛАВА 5 Дифференцируемые функции одной переменной

§1. Производная функции

1.1. Производная. Примеры

ОПР 1. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_i$. Тогда $\underbrace{f'(x_0)}_{\text{производная } f \text{ в т. } x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (если этот предел $\exists$)
$(\Rightarrow x_0 \in A')$

! Не надо говорить, что f дифференц. в т. x_0

Замеч. 1) $f \in \mathcal{D}(x_0) \Rightarrow f \in C(x_0)$

$\rbrack$ $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b \in \mathbb{R}$ $(x_0 \in A_i \Rightarrow x_0 \in A') \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b + o(1)$, $x \in \dot{O}(x_0) \cap A$

Тогда $f(x) - f(x_0) = b(x-x_0) + o(1)(x-x_0) \to 0$, $x \to x_0$

$\Rightarrow f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$; т.к. $x_0 \in A_i \subset A' \Rightarrow f \in C(x_0)$

2) $x_0 \in A_i$, $f \in C(x_0) \not\Rightarrow f \in \mathcal{D}(x_0)$; Например $f(x) = |x|$

$x>0$ $\frac{|x|-0}{x} = 1$ $x \to 0+$ $\quad$ $x<0$ $\frac{|x|}{x} = -1$ $x \to 0-$

ПР-РЫ 1) $f: A \to \mathbb{R}$ $f = const = c$ на A
$\Rightarrow \forall x_0 \in A_i$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in A$

2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) $f(x) = \sin x$

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} \to \cos\frac{x+x_0}{2} \to \cos x_0$$

$\Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}$ $f'(x_0) = \cos x_0$

4) $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad f \in C(0)$

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x \sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$ — предела нет

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad \frac{f(x)-f(0)}{x} = x \sin\frac{1}{x} \to 0$

ОПР 2. 1) $f: A \to \mathbb{R}$: $x_0 \in A$, $\exists\, O(x_0) / (-\infty, x_0] \cap O(x_0) \subset A$.
Тогда $\underbrace{f'_-(x_0)}_{\text{левая пр-ая } f} := \lim\limits_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если этот $\lim$ $\exists$.

2) $f: A \to \mathbb{R}$ в т. x_0 $x_0 \in A$, $\exists\, O(x_0) / [x_0, +\infty) \cap O(x_0) \subset A$
Тогда $\underbrace{f'_+(x_0)}_{\text{правая пр.}} := \lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если этот $\lim$ $\exists$

Пр-р: $f(x) = |x|$; $\exists f'_+(0) = 1$, $\exists f'_-(0) = -1$

Т1 $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_0$. Тогда $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow (\exists f'_+(x_0)) \wedge (\exists f'_-(x_0)) \wedge (f'_+(x_0) = f'_-(x_0))$

▶ ~ т. о пределе ◀

Замеч. ① $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_0$

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \overset{+}{(-)}\infty$, то говорят, что $f(x_0) = \overset{+}{(-)}\infty$

(обращается, а не равна)

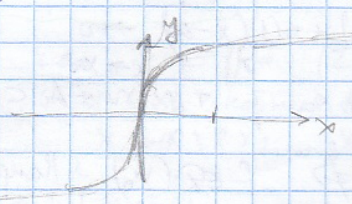
② Аналогично используют понятие $f'_+(x_0) = \overset{+}{(-)}\infty$
$f'_-(x_0) = \overset{+}{(-)}\infty$

③ $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

где $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x)$

Пр-ры (к зам-ям 1 и 2)



1 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$

$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \to +\infty$

2 $f(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

$x > 0$: $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{x} \to +\infty$

$(\to -\infty,\ x < 0)$

Зам: $f(-a, a) \to \mathbb{R}$, $\forall x \in (-a, a)\ \exists f'(x)$, f-чётная (нечётная)

$\Rightarrow f'(x)$ - нег (чёт)

▶ $f'(-x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-(x-h)) - f(-x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$ ◀

1.2 Дифференцируемость ф-ции в точке. Дифференциал

ОПР: $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_i$. Тогда f дифф. в т. x_0 $(f \in \mathcal{D}(x_0)) \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists O(x_0), \exists M \in \mathbb{R}$ /

$f(x) - f(x_0) = M(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$ $\forall x \in O(x_0)$, где $\alpha(x) = \bar{o}(1), x \to x_0$

$(+\alpha(x) \cdot (x - x_0))$ $\alpha(0) = 0$

(случай с прок. окр-тью рассмр)

Выражение $M(x - x_0)$ назыв. дифференциалом ф-ции f в т. x_0

Обозн: $df(x_0) = df(x_0, x - x_0)$
$x \to 0$

П-р: ① $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

дифф. в 0? нет $x^{\frac{1}{3}} = 0 \cdot x + \underset{\bar{o}(x)}{x^{\frac{1}{3}}}$ ~~$\ne$~~

② $f(x) = x^2 = 0 \cdot x + x^2$ $df(0) = 0$

Замеч: ① $f \in \mathcal{D}(x_0) \Leftrightarrow \exists O(x)\ \exists M \in \mathbb{R}$ / $f(x) - f(x_0) = M(x - x_0) + \bar{o}(x - x_0)$ $x \to x_0$

$\forall x \in \overset{\circ}{O}(x)$ (рассмр 0 в 0 и $\forall x \in O(x_0)$)

② $f \in \mathcal{D}(x) \Leftrightarrow \exists O(x), \exists M \in \mathbb{R}$ / $\underset{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta f(x)} = M \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ $\Delta x \to 0$

③ Df $g_1(x)\to 0,\ g_2(x)\to 0,\ x\to x_0$
$g_1 \sim g_2,\ x\to x_0$, то говорят, что g_2 — главная часть g_1 при $x\to x_0$

Если $x\to x_0$ $f\in D(x_0)$ $x_0\in A$, то $f(x)-f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} M(x-x_0)$

$M(x-x_0)$ линейное выражение
Поэтому говорят, что $d f(x_0)$ — главная линейная часть приращения

④. $f\in D(x_0) \Rightarrow \Delta f(x_0) \approx d f(x_0) = M(x-x_0)$ с точностью до б. малых порядка >1

(T) $f: A\to\mathbb{R}$, $x_0\in A_i$. Тогда $f\in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0)\in\mathbb{R}$.

▶ 1)] $f\in D(x_0)$. Имеем: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = M+\bar{o}(1) \Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}(M+\bar{o}(1)) = M$

2)] $\exists f'(x_0)\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = M \Rightarrow f(x)-f(x_0) = M(x-x_0)+\bar{o}(x-x_0),\ x\to x_0$
$\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+\bar{o}(1),\ x\to x_0,\ \forall x\in \mathring{O}(x_0)\right)$ ◀

Сл-ие $f\in D(x_0) \Rightarrow d f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

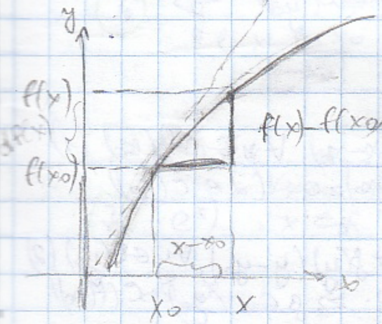
Пр-р: $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(x)=1 \Rightarrow d f(x) = 1\cdot\Delta x$ (или $d f(x_0) = 1(x-x_0)$),
или $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Delta f(x) = (x+\Delta x)-x = \Delta x = df(x) = dx$
Поэтому выражение $d f(x) = f'(x)\cdot\Delta x = f'(x)\cdot dx$.

Кроме того, используется обозначение $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ (формально)

Замеч.: $f'(x_0) = \pm\infty \Rightarrow f\notin D(x_0)$

1.3 Геометрический смысл производной.

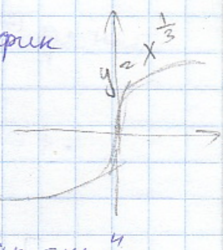
Опр: $f: A\to\mathbb{R}$, $x_0\in A_i$; прямая с ур-нием $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ называется касательной к графику ф-ции f в т. x_0.



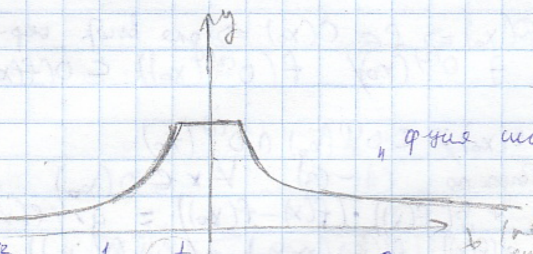
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = tg$ секущей

$\Rightarrow f'(x_0)$ — tg угла накл. касат. к + напр. Ox.

Если $f'(x_0) = \pm\infty$, то говорят, что в т. x_0 график ф-ции f имеет вертикальную касательную



ПРИМЕР: $f(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$



бесконечно дифф. ф-ция в 0.

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1-e^{-\frac{1}{x^2}}-1}{x} = -\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = -\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

§ 2. Правила дифференцирования. Сумма, произв. частное

2.1 Механическая интерпретация производной

Пусть t – время, $s(t)$ – путь, пройденный точкой за t. Тогда $[s(t+\Delta t) - s(t)]$ – путь пройденный точкой за Δt $\Rightarrow$ средняя скорость $v_{cp} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

$$v_{cp} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} s'(t), \text{ если } s \in \mathcal{D}(t)$$

Правила: Арифметические операции

T1 $f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_i$, $f, g \in \mathcal{D}(x_0) \Rightarrow (f+g) \in \mathcal{D}(x_0)$, причём $(g+f)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$$\blacktriangleright \frac{[f(x)+g(x)] - [f(x_0)+g(x_0)]}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)+g'(x_0) \blacktriangleleft$$

T2 $f, g: A \to \mathbb{R}$; $x_0 \in A_i$; $f, g \in \mathcal{D}(x_0) \Rightarrow fg \in \mathcal{D}(x_0)$, причём $(fg)'(x_0) = (f'g(x_0) + fg')(x_0)$

$$\blacktriangleright \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{(f(x)-f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0) \to$$

непр. т.к. дифф.

$$\to f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) \blacktriangleleft$$

Сл-ие Т1: $f_i: A \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$, $x_0 \in A_i$, $f_i \in \mathcal{D}(x_0)$, $i = \overline{1,m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{m} f\right) \in \mathcal{D}(x_0), \text{ причём } \left(\sum_{i=1}^{m} f_i\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{m} f_i'(x_0)$$

Сл-ие: $f_k: A \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,m}$, $x_0 \in A_i$ $f_k \in \mathcal{D}(x_0)$, $k \in \overline{1,m} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} c_k f_k\right)' \in \mathcal{D}(x_0)$

T3 $f, g: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_i$, $f, g \in \mathcal{D}(x_0)$, $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathcal{D}(x_0)$, причём

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$\blacktriangleright \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} = \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} \cdot \frac{(f(x)-f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} =$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \blacktriangleleft$$

2.2 Производная композиции

T4: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_i$, $y_0 := f(x_0) \in B_i$, $f \in \mathcal{D}(x_0)$, $g \in \mathcal{D}(y_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow g \circ f \in \mathcal{D}(x_0), \text{ причём } (g\circ f)'(x_0) = g'(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) \cdot f'(x_0)$$

$\blacktriangleright$ • $f \in \mathcal{D}(x_0) \Rightarrow \exists\, O^{(1)}(x_0) / f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)$ $\forall x \in O^{(1)}(x_0)$ (1)

где $\alpha = \bar{o}(1)$ при $x \to x_0$, $\alpha(x_0) = 0$ $(\alpha \in C(x_0))$

• $g \in \mathcal{D}(y_0)$, $y_0 = f(x_0) \Rightarrow \exists\, O(y_0) / g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + \beta(y)(y-y_0)$, $\forall y \in O(y_0)$ (2)

где $\beta = \bar{o}(1)$, $y \to y_0$, $\beta(y_0) = 0 \Rightarrow \beta \in C(y_0) = C(f(x_0))$

• $f \in \mathcal{D}(x_0) \Rightarrow f \in C(x_0) \Rightarrow$ для выбр. окр-ти $O(y_0) = O(f(x_0))$

$\exists\, O^{(2)}(x_0) / f(O^{(2)}(x_0)) \subset O(f(x_0)) = O(y_0)$ (3)

• $\exists\, O(x_0) / \subset O^{(1)}(x_0) \cap O^{(2)}(x_0)$

Тогда по (1) – (3) $\forall x \in O(x_0)$ $g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) +$

$+ \beta(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0)) = g'(f(x_0))(f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)) +$

$+ \underbrace{\beta(f(x))}_{\bar{o}(1)}(f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\alpha(x)g'(f(x_0))}_{\bar{o}(1)\ x\to x_0}(x-x_0) +$

$+ \underbrace{\beta(f(x))}_{\beta\circ f \in C(x_0)} \cdot f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\underbrace{\beta(f(x))}_{\text{огр.}}\underbrace{\alpha(x)}_{\text{б.м.}}}_{\bar{o}(1)}(x-x_0)$

$\beta \circ f \xrightarrow[x\to x_0]{} \beta(\underbrace{f(x_0)}_{y_0}) = 0$

В итоге, $\exists\, O(x_0) /\ g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)(x-x_0) + \gamma(x)(x-x_0),\ \forall x \in O(x_0)$,
где $\gamma(x) := \alpha(x) f'(x_0) + \beta(f(x)) \cdot f'(x_0) + \beta(f(x))$

Заметим, что $\gamma(x) = \bar{o}(1),\ x \to x_0,\ \gamma(x_0) = 0$

2.3 Производная обратной функции.

(Т) $f: [a;b] \to [f(a); f(b)]$, $f \uparrow\uparrow$ на $[a;b]$, $f \in C[a;b]$, $x_0 \in (a,b)$, $f \in \mathcal{D}(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, g := f^{-1}: [f(a); f(b)] \to [a;b]$, причём g дифф-ма в т. $y_0 := f(x_0)$,
причём $g'(y_0) = g'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Имеем: $\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} \xrightarrow[y \to y_0]{}$
$\exists\, x \in (a,b),\ y = f(x),\ x = g(y),\ y_0 = f(x_0)$

$\to \dfrac{1}{f'(x_0)}$, т.к. $x = g(y_0) \to g(y_0) = x_0$ т.к. $g \in C(y_0)$

Производные элем. функций

1) $(\mathrm{const})' = 0$
2) $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ (по индукции по пр-ию)
3) $(\sin x)' = \cos x$ 3'. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (по произв. дроби)
4) $(\cos x)' = -\sin x$ 4'. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5) $f(x) = \arcsin x$.
$g(y) = \arcsin y$, $y \in (-1;1)$.
$x = \arcsin y$, $y = \sin x$.
$x' = \dfrac{1}{g'(x)} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

5') $(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

6) $y = \ln x$, $x > 0$ $\quad] x_0 > 0$
$\dfrac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \dfrac{\ln \frac{x}{x_0}}{(\frac{x}{x_0} - 1) x_0} = \dfrac{\ln\left(1 + \overset{\to 0}{(\frac{x}{x_0} - 1)}\right)}{(\frac{x}{x_0} - 1) x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \dfrac{1}{x_0}$

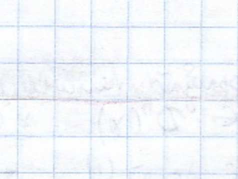
$\Rightarrow$ Т.к. $x_0 > 0$ пр-но, то есть $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$
Кроме того $\log_a' x = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a\, x}$ $\quad a \neq 1, a > 0$

7) $(e^x)'$; $x \in \mathbb{R}$

$\dfrac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \dfrac{(e^{\overset{\to 0}{x-x_0}} - 1)}{x - x_0} \to e^{x_0}$ $\quad \to 1$ (I зам. предел) $\quad$ (д-во по обратной)
$\Rightarrow (e^x)' = e^x$.

$\Rightarrow (a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot a^x$

8) $y = x^\alpha$ $\quad x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = \dfrac{\alpha}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$ $\quad (x^\alpha)' \xrightarrow[x \to +0]{} \infty$, $0 < \alpha < 1$



Замечание к Т о производной композиции (сл-ие)
Инвариантность формы 1-го(!) дифференциала
$d(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot \underbrace{f'(x)\, dx}_{df(x) = dy} = g'(y)\, dy = g'(f(x))\, df(x)$

§3. Производные и дифференциалы высших порядков
3.1 Производные высших порядков.

ОПР1. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_i$ $\exists\, O(x_0) / f \in D(O(x_0))$, т.е. $\forall x \in O(x_0)\ \exists f'(x)$ | $f \in D(a,b) \overset{def}{\iff} \forall x \in (a,b),\ f \in D(x)$

Тогда $f''(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел $\exists$

ПР-Р $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + (-1)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ $x = 0$

Заметим, что $f' \notin C(0)$ (нет $\lim$ когда $x \to 0$)

$f' \notin C(0) \Rightarrow f' \notin D(0)$

Обозн $\exists f''(x_0) \Rightarrow f \in D^2(x_0)$
$\exists f''(x_0)\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \in D^2(a,b)$

Аналогично

ОПР2 (по индукции) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_i$, $\exists\, O(x_0) / f \in D^n(O(x_0))$, т.е. $\exists f^{(n)}(x)\ \forall x \in O(x_0)$

Тогда $f^{(n+1)}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}$, если этот предел $\exists$.

Механическая интерпретация 2ой производной $f''(x)$.

t - время, $t > 0$

$s(t)$ - путь пройденный точкой за время t. Предположим, что $\exists\ s'(t), s''(t)$

Тогда скорость v в момент времени t: $v(t) = s'(t)$, $t > 0$

$a = \dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \to v'(t) = s''(t)$ — ускорение.

Замечание $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Тогда $f \in D[a,b] \overset{def}{\iff}$ 1) $f \in D(a,b)$
2) $\exists\ f'_+(a) \in \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x \to a+}$)
3) $\exists\ f'_-(b) \in \mathbb{R}$

Т Формула Лейбница

$f, g \in D^n(x)$ $x \in (a,b)$ ($f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$), $n \geq 1$

$$\Rightarrow [(f \cdot g)(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad (*)$$

▷ По индукции:
- $n = 1$ $(*)$ — верно $[(f \cdot g)(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ (Обозн: $f^{(0)}(x) := f(x)$)
- предположим, что $(*)$ верна для $s = n$
- д-жем для $s = n+1$

Имеем: $[f(x)g(x)]^{(n+1)} := [(f \cdot g)^{(n)}(x)]' \overset{*}{=} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)' =$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)]' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) + f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) = C_n^0 f^{(0)}(x) \cdot g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)}}_{:= A} + C_n^n f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) = C_n^0 f^{(0)} \cdot g^{(n+1)} \oplus$$

В сумме A сделаем замену индексов: $l = k+1$. Тогда

$$A = \sum_{l=0}^{n-1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n-l+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$$

Обозначим $k := l$

$$\oplus \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(C_n^k + C_n^{k-1})}_{= C_{n+1}^k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} =$$

В итоге $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)$. ◄

3.2 Дифференциалы высших порядков

$df(x) = f'(x)dx$

ОПР 1. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A^i$, $\exists O(x_0) / f \in D(O(x_0))$. Тогда $f \in D^2(x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ функция $x \mapsto df(x) (= f'(x)dx) \in D(x_0)$. При этом выражение $d^2f(x) := d((df)(x))$ называется вторым дифференциалом функции f в т. x_0

ЗАМ-Я. ① $f \in D^2(x_0) \Rightarrow d^2f(x) = f''(x_0)(dx)^2$

► $d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2$ ◄

② Обозначение! $dx^2 := (dx)^2$

ПР-РЫ: ① $d^2(x) = f''(x)(dx)^2 = 0$ $\quad d^2x \neq dx^2$

② $d(x^2) = 2(dx)^2 = 2dx^2$ $\quad d(x^2) \neq dx^2$

ОПР 2. Дифференцируемость произвольного порядка определяется по индукции

$f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A^i$ $\exists O(x_0) / f \in D^n(O(x_0))$ $n \geq 1$. Тогда $f \in D^{(n+1)}(x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ функция $x \mapsto d^nf(x)$ дифф-ма в т. x_0 (обозн. $f \in D^{n+1}(x_0)$)

При этом выражение $d^{n+1}f(x) := d((d^nf)(x))$ называется дифференциалом $(n+1)$-го порядка в т. x_0 обозн.

ЗАМ-ИЕ ① $f \in D^{n+1}(x_0) \Rightarrow d^{n+1}f(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)\, dx^{n+1}$, где $dx^{n+1} := (dx)^{n+1}$

ПР-Р: $f(x) = x^m$ $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$; $d^mf(x) = m!\, dx^m$

ЗАМ-ИЕ (инвариантность формы)

2ой дифференциал не обладает инвариантностью формы

► $(g \circ f)''(x) = (g(f(x)))'' = (g'(f(x)) \cdot f'(x))' = g''(f(x)) \cdot [f'(x)]^2 +$

$+ g'(f(x)) \cdot f''(x)$

$\Rightarrow d^2(g(f(x))) = g''(f(x)) \cdot \underbrace{(f'(x)dx)^2}_{[df(x)]^2} + g'(f(x)) f''(x)\, dx^2 =$

$= g''(f(x))(df(x))^2 + g'(f(x)) f''(x) dx^2 \Rightarrow f''(x) \neq 0$ — нет инвар. формы

Инв. формы 2го дифф. имеет место в частном случае: $f(x) = ax + b$ ($f''(x) = 0$) ◄

Обозн.: $f''(x_0) = (d^2f/dx^2)(x_0)$ $\quad f^{(n)}(x_0) =: \frac{d^nf}{dx^n}(x_0)$ (т.к. $d^2f(x) = f''(x)dx^2$)

§ 4. Основные теоремы дифференциального исчисления

4.1 Т. Ферма, Т. Ролля.

ОПР 1. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A^i$. Тогда а) x_0 — т. локального максимума (минимума) функции $f \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists O(x_0) / f(x) \leq f(x_0)$ ($\geq f(x_0)$), $\forall x \in O(x_0)$

б) x_0 — т. локального экстремума функции $f \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (x_0 — т. лок. max) $\vee$ (x_0 — т. лок. min)

ОПР 2: $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A^i$. Тогда а) x_0 — т. строгого лок. max (min) функции $f \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists O(x_0) / f(x) < f(x_0)$ ($> f(x_0)$) $\forall x \in \mathring{O}(x_0)$

б) x_0 — т. строгого лок. extr функции $f \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (x_0 — т. строгого лок. max) $\vee$ (x_0 — т. строгого лок. min)

Т 1 (Ферма): $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ — т. лок. экстрем.; $f \in D(x_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

► $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow (\exists f'_+(x_0)) \wedge (\exists f'_-(x_0)) \wedge (f'_+(x_0) = f'_-(x_0))$

Не огр. общности считаем, что x_0 — т. лок. max

Имеем $x < x_0$ $\quad \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{< 0}} \geq 0$ Переходя к $\lim$ $x \to x_0 - 0$ $\quad f'_-(x_0) \geq 0$ (1)

Аналогично $x > x_0$ $\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leq 0 \overset{\text{пред. переход}}{\Rightarrow} f'_+(x_0) \leq 0$ (2)

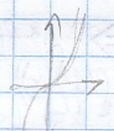
$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ по усл) $\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0 = f'(x_0)$

Сл-ия: ① . $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A_f$; x_0 – т. лок. макс (мин.) $\exists f'_-(x_0)$, $\exists f'_+(x_0)$
$\overset{\text{см. д-во}}{\Rightarrow}$ $f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$

② $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\exists \varepsilon > 0 / f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in [a, a+\varepsilon) \Rightarrow f'_+(a) \leq 0$

Замечание (!) Необходимое условие $\exists$ лок. ext в точке (см т. Ферма) НЕ является, в.ч. достаточным условием.

Например, $f(x) = x^3$ $x_0 = 0$; $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$.
но $x = 0$ – не т. лок. ext.



Т2 (Т. Ролля). $f \in C[a,b]$, $f \in \mathcal{D}(a,b)$, $f(a) = f(b)$. $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$

Т2 т. Вейерштр. $\Rightarrow \exists x_{min} \in [a,b]$, $\exists x_{max} \in [a;b] / f(x) \geq f(x_{min})$, $\forall x \in [a,b]$
$f(x) \leq f(x_{max})$ $\forall x \in [a,b]$

1) Если $f \equiv const$, то $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ Т2 верна $\Rightarrow$ Если $x_{min} = x_{max} \Rightarrow$
$\Rightarrow \min\limits_{[a,b]} f = \max\limits_{[a,b]} f \Rightarrow f \equiv const$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ Т2 верна

2) Предположим, что $x_{min} \neq x_{max} \Rightarrow (x_{min} \in (a,b)) \vee (x_{max} \in (a,b))$

(Иначе $x_{min} = a$ или b, $x_{max} = a$ или $b \Rightarrow f(x_{min}) = f(x_{max})$ – ?!)

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$ + лок. ext $\Rightarrow$ Полагая $c = x_0$, получаем $f'(c) = 0$ по Т. Ферма

Сл-ие $f \in C[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow$ между двумя нулями ф-ции f на $[a,b]$ есть нуль производной

Задачи: ① $\exists P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 2$ имеет ровно n действит. различных корней $\Rightarrow$ $P_n'(x)$ имеет $(n-1)$ корней

② $P_n(x)$ имеет $\leq n$ действ. корней (различных) $\Rightarrow$
$\Rightarrow P_n'(x)$ $\leq n-1$ корней ($a_n \neq 0$)

4.2 Т-мы Коши и Лагранжа

Т1 (Коши) $f, g \in C[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b)$; $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ (1)

($g(b) - g(a) \neq 0$, т.к. см т. Ролля)

$(1) \Leftrightarrow [f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)$ (2)
Положим $h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x)$

Имеем: $h \in C[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b)$ (лин. комб.)
Далее $h(a) = f(b)g(a) - \cancel{f(a)g(a)} - g(b)f(a) + \cancel{g(a)f(a)} =$
$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$
$h(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) =$
$= g(a)f(b) - g(b)f(a) = h(a)$

$\Rightarrow h$ удовлетв. всем условиям т. Ролля $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / h'(c) = 0$.
$\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)

Т2 (Лагранжа).
$f \in C[a,b] \cap D(a,b)$. Тогда $\exists\, c \in (a,b) / \ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

▶ Т. Коши: $g(x) = x \quad \forall x \in [a,b]$. Тогда $g \in C[a,b] \cap D(a,b)$, $g'(x) = 1 \neq 0$.

$\overset{\text{Т1(Коши)}}{\Longrightarrow} \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f'(c)}{\underset{1}{g'(c)}} \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ ◀

Замечание ① $f \in D(a,b) \Rightarrow f \in C(a,b) \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b)\ x_1 < x_2 \quad f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$ для нек. $c \in (x_1, x_2)$

② Др. запись ф-лы Лагранжа (т. о среднем Лагранжа)
$f(b)-f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a)$, где $\theta \in (0,1)$.
Пусть теперь $a > b$: $f \in C[b,a] \cap D(b,a)$.
Тогда $f(a) - f(b) = f'(b+\theta(a-b))(a-b)$
Но $b + \theta(a-b) = a + a(\theta-1) + b(1-\theta) = a - (1-\theta)a + b(1-\theta) =$
$= a + (1-\theta)(b-a) = a + \theta_1(b-a)$, где $\theta_1 = 1-\theta \in (0,1)$

В итоге, $f(a)-f(b) = f'(a+\theta_1(b-a))(a-b)$

$\Rightarrow$ если $f \in D(a,b)$, то $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \quad f(x_2)-f(x_1) = f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1)$,
где $\theta(x_1,x_2) \in (0;1)$

Сл-ия ① $f \in D(a,b)$. Тогда $f \equiv const$ на $(a,b) \Leftrightarrow f' \equiv 0$ на (a,b)
▶ ① $\Rightarrow$ $(const)' = 0$
② $\Leftarrow$ Тогда $f' = 0$ на (a,b). П: $f \not\equiv const$ на $(a,b) \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in (a,b) /$
$f(x_1) \neq f(x_2)$, $x_1 < x_2$.
Т. Лагранжа $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2-x_1)$, $c \in (a,b) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ Р

② $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ и, кроме того, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$. Тогда $\exists\ f'_+(a) = l$ ◀

▶ $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 / |f'(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta)$

$\Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - l\right| \overset{\text{Т2}}{=} |f'(c_x) - l|$, где $c_x \in (a,x) < \varepsilon$, $\forall x \in (a, a+\delta)$
(т.к. $c_x \in (a,x) \Rightarrow c_x \in (a, a+\delta)$) ◀

Зам-ие ① Аналогично рассматр. $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)$
! ② Аналог. результат справедлив, если $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = \pm\infty \quad \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| > M \quad \forall M$
▶ — ◀

4.3 Правило Лопиталя. Раскрытие неопределённостей

Т1 $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\left.\begin{array}{l} (1)\ f, g \in D(a,b) \\ (2)\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0 \\ (3)\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b) \\ (4)\ \exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \\ \quad (l = \pm\infty \text{ тоже верно}) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

▶ 1) из 4 следует: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 / \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta)$ (1)

• Доопределим функции f и g в т. $x = a$: $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ (пределы)
• Имеем: $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| \overset{\text{Т. Коши}}{=} \left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta)$
(см. (1)), т.к. $c \in (a,x)$ по Коши. ◀

Замеч-я: ① Теор. верна для $l = \pm\infty$ ▶ — ◀
② Аналогично рассматр. случаи: • $\lim_{x \to b-0}$ $y = -x$
• $a = -\infty$ $y = \frac{1}{x}$
• $b = +\infty$

③ Усл-е 2 нельзя „выбросить"

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$; $\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$

④ а) $\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \not\Rightarrow_{\text{б2}} \exists \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Пр-р: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; $g(x) = x$.

$a = 0$ Имеем: $\frac{f(x)}{g(x)} = x \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ Но $f'(x)/g'(x) = f'(x)$ — не имеет lim. $x \to 0$

$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2 =$
$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ — $\nexists \lim$

б) Вычислим $f'(0)$
$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\sin\frac{1}{x} \to 0,\ x \to 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$

Т2 (Лопиталь 2.0 $\frac{\infty}{\infty}$)

$\left.\begin{array}{l} ①\ f, g \in \mathcal{D}(a,b) \\ ②\ \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty \\ ③\ g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b) \\ ④\ \exists \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

(если $l = \pm\infty$, то $\lim f = \infty$)

▶ а) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 / \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta)$ (2)

Положим $x_0 := a+\delta$
Имеем $\frac{f(x)}{g(x)} - l = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right]\cdot\left[1 - \overset{\to 0}{\frac{g(x_0)}{g(x)}}\right] + \frac{f(x_0) - lg(x_0)}{g(x)}$ (3)

$g(x) \neq 0$, т.к. $g(x) \to \infty$

В с.ф. (3) $\Leftrightarrow f(x) - lg(x) = \underbrace{\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right]\left[g(x) - g(x_0)\right] + f(x_0) - lg(x_0)}_{= A}$

$A = f(x) - \cancel{f(x_0)} - l[g(x) - g(x_0)] + \cancel{f(x_0)} - lg(x_0) \Rightarrow$ (3) — верно

Из (3) $\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq \underbrace{\overbrace{\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l\right|}^{<\varepsilon}}_{\text{по Коши; } c_x \in (x, x_0) \in (a, a+\delta)} \cdot \left(1 + \overbrace{\frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}}^{② \text{ заменить}}\right) + \frac{\varepsilon}{4} \overset{\text{см}(2)}{<} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{2}$

$\forall x \in (a, a+\delta_1)$, где $\delta_1 \in (0, \delta)$ дост. мало

$< 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{9\varepsilon}{4}$ ◀

II. В (3) перейдём к $\lim_{x\to a+0}$ $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq \varepsilon \cdot 1 + 0 < 2\varepsilon$?

Если $l = \pm\infty$:

12.12

Т 3 $\left(\frac{\infty}{\infty},\ l = \overset{+}{(-)}\infty\right)$

1) $f, g \in \mathcal{D}(a,b)$
2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$,
3) $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$
4) $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$

(без $\exists$ т.к. не конечный)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \overset{+}{(-)}\infty$

▶ Заметим, что $\exists\, b^* / f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b^*)$: в самом деле, ПП: $\forall b^*\ \exists\, x \in (a, b^*) / f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ в част. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n \in (a, a+\frac{1}{n}) / f'(x_n) = 0$. Тогда $x_n \to a+0$, $x_n \neq a$, причём $\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = 0\ \forall n \Rightarrow$ Пр с 4).

$\Rightarrow f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b^*)$ для нек. $b^* \in (a,b)$.

Имеем (см. усл. пред. Т для $\frac{g(x)}{f(x)}$), • $f \to \infty$, • $f'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b^*)$, • $\lim \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$

$\underset{\text{см Т.2}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{g(x)}{f(x)} = \pm 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \overset{+}{(-)}\infty$ ◀

Замечание, пр-ры: 1) $\lim\limits_{x\to+0} \overset{0}{x}\,\overset{\infty}{\ln x} = 0$, т.к.

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} (-x) = 0$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

4.4 Ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Обознач.: • $f \in \mathcal{D}^n(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f \in \mathcal{D}^n(x)\ \forall x \in (a,b)$, $n \geq 1$

• $f \in C^n(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (f \in \mathcal{D}^n(a,b)) \wedge (f^{(n)} \in C(a,b))$

• $f^{(0)} := f$

• $\sum\limits_{l}^{m} := 0$, если $m < l$ • $0! := 1$

• $f \in \mathcal{D}^n(x_0)$, $n \geq 0$. Тогда $\boxed{P_n(x) := f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$ – многочлен Тейлора для ф-ции f и т. x_0

Т. (ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

$f: \overset{\circ}{O}(x_0) \to \mathbb{R}$, • $f \in C^n(O(x_0)) \cap \mathcal{D}^{n+1}(\overset{\circ}{O}(x_0))$, $n \geq 0$ ($n = 0$ – Т Лагранжа)

$$\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{O}(x_0),\quad f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{ост. член в ф. Лагранжа}},\ \text{где} \quad (1)$$

$\xi \in \begin{cases} (x_0, x), & \text{если } x > x_0 \\ (x, x_0), & \text{если } x < x_0 \end{cases}$ (*)

▶ • $n = 0$ (1) принимает вид $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$ – верно по ф-ле Лагранжа, где ξ из (*) (Т. о среднем Лагранжа)

• $n \geq 1$. Рассматриваем случай $x > x_0$ ($x_0 > x$ – аналогично), x – фиксированно

Вводим ф-цию $F(t) := f(x) - f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{\lambda}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$, $t \in [x_0, x]$

где λ находится из ус-ия $F(x_0)=0$

Тогда ф-ла (1) будет доказана, если $\lambda = f^{(n+1)}(\xi)$, $\xi \in (x_0, x)$.

Т. Ролля $[x_0,x]$: имеем
- $F(x_0)=0$ (по опред. λ)
- $F(x)=0$ (подставить, посмотр.)
- $F \in D(x_0,x)$ (по ф-ле и по условиям)

$\xrightarrow{\text{Т. Ролля}} \exists\, \xi \in (x_0,x) / F'(\xi)=0$

Имеем:

$$F'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!_{(k-1)!}}(x-t)^{k-1}\cdot k + \frac{\lambda}{\cancel{(n+1)}!_{n!}}(x-t)^n \cancel{(n+1)}$$

$$= -\cancel{f'(t)} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \cancel{f'(t)} + \frac{\lambda(x-t)^n}{n!} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k}_{B} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}}_{A} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{\lambda(x-t)^n}{n!} \Big|_{t=\xi} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = f^{(n+1)}(\xi)$, $\xi \in (x_0,x)$

(в A полагаем $l=k-1$ $A = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)(x-t)^l}{l!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} = B$)

(В итоге $F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} + \frac{\lambda}{n!}(x-t)^n$ $t \in (x_0,x)$

$= 0 \Longleftrightarrow \lambda = f^{(n+1)}(t)$

Но $F'(\xi)=0$, $\xi \in (x_0,x) \Rightarrow \lambda = f^{(n+1)}(\xi)$)

Замечание: Пусть выполн. все условия теоремы. Тогда $f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k +$

$+ \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$,

где $\theta \in (0,1)$, $x_0+h \in \mathring{O}(x_0)$ $\quad (f(x_0)=f(x_0))$

4.5. Ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Вводим обозначение $f(x) = g(x) + \bar{o}((x-x_0)^n)$, $x \to x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, \mathring{O}(x_0) / \forall x \in \mathring{O}(x_0)$ верно $f(x) = g(x) + o((x-x_0)^n)$

Т (Т. Тейлора с ост. членом в ф. Пеано)

$f \in D^{n-1}(O(x_0)) \cap D^n(x_0)$, $n \geq 1 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k +$

$+ \bar{o}((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$ $\quad (1)$

- $n=1$. Р-во (1) принимает вид $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \bar{o}(x-x_0)$, $x \to x_0$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f \in D(x_0)$ — верно

- $n \geq 2$

$P_n(x)$ — многочл. Тейлора

Вводим ф-цию $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$, $x \in O(x_0)$ $\quad (2)$

Надо показать, что $\varphi(x) = \bar{o}((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$ $\quad (3)$

Имеем:
- $f \in D^{(n-1)}(O(x_0)) \Rightarrow f \in C^{n-2}(O(x_0))$
- $f \in D^n(x_0)$

$\Rightarrow f \in D^{n-1}(O_1(x_0))$, где $O_1(x_0) \subset O(x_0)$

Не ограничивая общности, $O_1(x_0) \underset{\text{нек}}{=} O(x_0)$

$\Rightarrow \varphi \in C^{n-2}(O(x_0)) \cap D^{n-1}(O(x_0)) \Rightarrow \forall$ усл. т. Лагранжа выполнены для $k=n-2$

по форм

$$\varphi(x) := f(x) - \underbrace{\left(f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)}_{P_n(x)}$$

По Т. Лагранжа $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{\varphi^{(n-1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$,

$\theta \in (0,1)$

Цель: $\varphi(x) = \bar{o}((x-x_0)^n)$ (3)

$\boxed{\text{Имеем } \varphi^{(m)}(x_0) = 0, \; m = 0, \dots n \quad (4)}$

В с.р. $\varphi^{(0)}(x_0) = \varphi(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

$$\varphi^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x) - \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot \left[\frac{d^m}{dx^m}(x-x_0)^k\right] \right\}\Bigg|_{x=x_0} \ominus$$

Но $\bullet\, m > k$: $\frac{d^m}{dx^m}(x-x_0)^k = 0$

$\bullet\, m < k$: $\frac{d^m}{dx^m}(x-x_0)^k\Big|_{x=x_0} = \text{const} \cdot (x-x_0)^{k-m} = \text{const} \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow m = k$

$\ominus\; f^{(m)}(x_0) - \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \cdot m! = 0 \Rightarrow (4)$ верно

В силу (4) $\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n-1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \ominus$

$\varphi^{(n-1)} \in D(x_0) \Rightarrow \varphi^{(n-1)}(x_0+\theta(x-x_0)) = \underset{\substack{\parallel \\ 0 \text{ по } (4)}}{\varphi^{(n)}(x_0)} \cdot \theta(x-x_0) + \bar{o}(x-x_0),\; x \to x_0$

$= \bar{o}(x-x_0)$

$\frac{\bar{o}(1)(x-x_0)^n}{(n-1)!} = \bar{o}(x-x_0)^n,\; x\to x_0$

$\ominus\; \frac{\bar{o}(x-x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} = \bar{o}((x-x_0)^n),\; x \to x_0$

Замечание 1: $f \in D^{n-1}(O(x_0)) \cap D^n(x_0)$

$f \in D^n(x_0) \Rightarrow f \in D^{n-1}(O(x_0))$, т.е. можно было написать просто $f \in D^n(x_0)$

Замеч 2: ф-ла Тейлора в т. $x_0 = 0$ назыв ф-лой Маклорена

Пр-ры

1) $e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),\; x \to 0$ (или $= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$)

2) $\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}),\; x \to 0$

3) $\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),\; x \to 0$

4) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n),\; x \to 0$

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n),\; x \to 0$

$\bar{o}(x^n) = O(x^{n+1})$

8.6. Исследование функций с помощью производной

6.1 Монотонность функции

Т $f \in D(a,b)$. Тогда $f \uparrow (\downarrow) \iff f' \geq 0$ $(\leq)$ на (a,b)

(Критерий монотонности дифференцируемой функции)

▶ 1) $\Rightarrow$] $f\uparrow$ на (a,b)

• $x > x_0$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \xRightarrow[x\to x_0+0]{\text{пр. пер}} f'(x) \geq 0$

• $x < x_0$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \xRightarrow[x\to x_0-]{} f'(x) \geq 0$

2) $\Leftarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$

Рассмотр. $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$

Т. Лагранжа о ср.: $f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(x_1+\theta(x_2-x_1))}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \geq 0$, $\theta \in (0,1)$

$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f\uparrow$ на (a,b) ◀

Замечания 1) $f(\uparrow\uparrow)$ на (a,b) $\not\Rightarrow$ $f'>0$ на (a,b)

пр-р: $f(x)=x^3$ на $(-1,+1)$

2) $f'>0$ на (a,b) $\Rightarrow$ $f\uparrow\uparrow$ на (a,b) (см п. 2 д-ва)

$f(x_2)-f(x_1) = f'(x_1+\Delta)(x_2-x_1) > 0$

Важно в 6.3, сл-ие 2

6.2 Экстремумы функции

Т Ферма $f: (a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $f \in D(x_0)$, x_0 — т. экстремума

$\Rightarrow f'(x_0)=0$

Т1 (Первое достаточное условие строгого экстремума)

1) • $f \in C(O(x_0)) \cap D(\mathring{O}(x_0))$, • $f' \underset{(>)}{<} 0$ в $O_-(x_0) := O(x_0)\cap(-\infty; x_0)$,

• $f' \underset{(<)}{>} 0$ в $O_+(x_0) := O(x_0)\cap(x_0;+\infty)$

$\Rightarrow$ x_0 — т. строгого лок. min (max)

2) $f' \underset{(>)}{<} 0$ в $\mathring{O}(x_0)$ $\Rightarrow$ x_0 — не явл. строгого экстремума

▶ 1) $f'<0$ в $O_-(x_0)$, $f'>0$ в $O_+(x_0)$

• $x<x_0 \xRightarrow{\text{Т.Л}} f(x_0)-f(x) = \underbrace{f(x_0+\theta(x_0-x))}_{<0}\underbrace{(x_0-x)}_{>0} < 0 \Rightarrow f(x_0)<f(x)$

• $x>x_0 \xRightarrow{\text{Т.Л}} f(x)-f(x_0) = \underbrace{f(x_0+\theta(x-x_0))}_{>0}\underbrace{(x-x_0)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(x)>f(x_0)$

$\Rightarrow$ x_0 — т. лок. min (строгого)

2)] $f'<0$ в $\mathring{O}(x_0)$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x<x_0 \Rightarrow f(x_0)<f(x) \\ \bullet\ x>x_0 \Rightarrow f(x_0)>f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$ x_0 — не лок. экстр

Замечание. $\left.\begin{array}{l} f\in D(a,b),\ x_0\in(a,b) \\ x_0 \text{ — т. строгого лок. min} \end{array}\right\} \overset{\text{в.с}}{\not\Rightarrow}$ $f'>0$ в $O_+(x_0)$ для нек $O(x_0)$

пр-р: $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} + 2x^2, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Имеем: $f(x) = x^2(\sin\frac{1}{x}+2) > 0 = f(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ 0 — т. строгого лок. min, но $f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x}+2) + \cos\frac{1}{x}\cdot x^2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= -\cos\frac{1}{x} + o(1)$, $x\to 0$

$x_k := \frac{1}{2\pi k} \Rightarrow f'(x_k) = -1 + o(1) < -\frac{1}{2} < 0$

$y_k = \frac{1}{\pi(2k+1)} \Rightarrow f'(x) = 1 + \bar{o}(1) > \frac{1}{2} > 0 \quad x \to 0$

$\Rightarrow f(x_0) < f(x)$

Т2 (второе достаточное условие)

$f \in D^2(x_0)$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \underset{(<)}{>} 0 \Rightarrow x_0$ – т. строгого лок. min (max)

$\blacktriangleright$ $f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{0}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \underbrace{o((x-x_0)^2)}_{o(1)(x-x_0)^2}$ (Тейлор-Пеано)

В итоге $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^2 \Big[\underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}}_{>0} + \bar{o}(1) \Big] > 0 \Rightarrow \exists\, O(x_0) / f(x) > f(x_0)$ в $O(x_0)$

$x \to x_0$ $\Rightarrow$ т. x_0 – строгий extr $\blacktriangleleft$

>0 в нек $O(x_0)$

Т3. (3-е дост. усл. строгого extr)

$f: O(x_0) \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, $f \in D^{n-1}(O(x_0)) \cap D^n(x_0)$; $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = \overline{1, n-1}$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда

(1) n – чётное, $n = 2k \Rightarrow x_0$ $\begin{cases} \text{т. строгого лок. min, если } f^{(2k)} > 0 \\ \text{т. строгого лок. max, если } f^{(2k)} < 0 \end{cases}$

(2) $n = 2k+1 \Rightarrow$ x_0 не является т. строгого extr.

$\blacktriangleright$ Зорич, §4

Замечания (1) $n = 1$ $f'(x_0) \neq 0 \xRightarrow{\text{Т. Ферма}}$ нет extr.

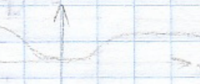
(2) $n = 2$: – Т2 – верно по нему

(3) Т2 – дост. усл. не есть необходимое

пр-р: $f(x) = x^4$.

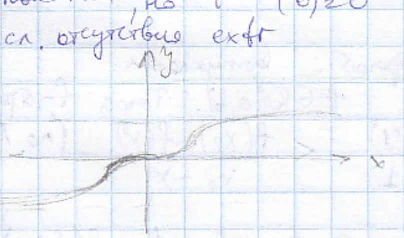
(4) Т3, п. 1 не есть необход. условие; $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ –

$x = 0$ – т. строгого лок. min но $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$

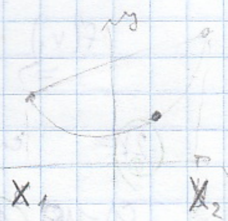


(5) Т3 п. 2 не есть необх. усл. отсутствия extr

$\begin{cases} g(x) = f(x), & x \geq 0 \\ g(-x) = -g(x), & x < 0 \end{cases}$



§3 Выпуклость функции и т. перегиба



ОПР 1 $\exists f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Тогда f – выпукла вниз (вверх) на $(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{(\geq)}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ (1) $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 \neq x_2$

Замеч: (1) $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_2 + \lambda(x_1 - x_2)$

(2) в опр не требуется $\exists f'$ на (a,b) $f(x) = |x|$ – вып вниз

ОПР 2 $\exists f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Тогда f – строго выпукла $\downarrow(\uparrow)$ на $(a,b) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{(>)}{<} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

Зам Говорят, что f выпукла на (a,b), если f вып. $\downarrow$ на (a,b)

Лемма. $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Тогда f — выпукла (строго) вниз (вверх) на $(a,b) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \underset{(\geq,>)}{\overset{\leq}{<}} \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad \forall x, x_1, x_2 \in (a,b) \,/\, x_1<x<x_2 \quad (2)$$

▶ а) Пусть $x \in (x_1,x_2) \subset (a,b)$, $x_1<x_2$

Тогда $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_2 + \lambda(x_1-x_2) \Rightarrow \lambda = \frac{-x_2+x}{x_1-x_2}$ (*), $1-\lambda = \frac{x_1-x}{x_1-x_2}$ (**)

б) Пусть $x \in (a,b)$. Тогда (1) $f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, где λ, $1-\lambda$ — (*) и (**).

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{(<)}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

$\Rightarrow (x_2-x_1) f(x) \leq (x_2-x) f(x_1) + (x-x_1) f(x_2)$

$(x_2-x) f(x) + (x-x_1) f(x) \leq (x_2-x) f(x_1) + (x-x_1) f(x_2)$

$(x_2-x)(f(x)-f(x_1)) \leq (x-x_1)(f(x_2)-f(x))$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \Leftrightarrow (2)$$

в обр. сторону — равносильно. ◀

Т1 Критерий выпуклости.

Пусть $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D(a,b)$. Тогда f — выпукл. вниз (вверх) $\Leftrightarrow f' \uparrow (\downarrow)$

▶ 1) $\Rightarrow$ $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ по Л1 (2) $\forall x, x_1, x_2$ $x_1<x<x_2$

В (2) к $\lim\limits_{x\to x_1}$ $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} =: A$

В (2) к $\lim\limits_{x\to x_2} \Rightarrow A \leq f'(x_2)$.

т.о. $f'(x_1) \leq A \leq f'(x_2) \Rightarrow f' \uparrow$.

2) $\Leftarrow$ $f' \uparrow$ на (a,b)

Д-жем (2)

Пусть $a<x_1<x<x_2<b$. Тогда (левая часть (2)) $= f'(\xi_1)$, $x_1<\xi_1<x$

(правая ч. (2)) $= f'(\xi_2)$, $x<\xi_2<x_2$

Но, т.к. $\xi_1<\xi_2$, то $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) \Leftrightarrow$ (лев. ч. (2)) $\leq$ (пр. ч. (2)) ◀

Т2. Критерий строгой выпуклости

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in D(a,b)$. Тогда f — строго выпукла вниз (вверх) $\Leftrightarrow f' \uparrow\uparrow (\downarrow\downarrow)$

▶ 1) $\Rightarrow$ $f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ (по лемме) $= f'(\xi_2)$

где $\xi_1 \in (x_1,x)$, $\xi_2 \in (x,x_2)$; $f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \overset{T1}{\leq} f'(x_2)$

$f'(x_1) \overset{T1}{\leq} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \overset{T1}{\leq} f'(x_2) \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1<x_2$; ξ_1 и ξ_2 не произвольны!

$\Rightarrow f' \uparrow\uparrow$

2) $\Leftarrow$ см Т1 п. 2, с заменой $\leq$ на $<$ ◀

Сл-ие 1. Пусть $f \in D^2(a,b)$. Тогда см Т1 1) f - выпукла вниз (вверх) $\Leftrightarrow$ $\cancel{f' \uparrow}$ $f'' \underset{(\leq)}{\geq} 0$

см. Т 1, зам. 2. $f \in D^2(a,b)$, $f'' \underset{(<)}{>} 0 \Rightarrow f$ строго выпукла вниз (вверх)

ОПР 3. Пусть $f \in C(O(x_0))$. Тогда x_0 – т. перегиба графика $f \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$(f$ строго выпукла вниз (вверх), в $O_-(x_0)) \wedge (f$ строго выпукла вверх (вниз) в $O_+(x_0))$

Т3. Необход. усл. $\exists$ т. перегиба

$f \in C(O(x_0))$, $f \in D(O(x_0)) \cap D^2(x_0)$, x_0 – т. перег. $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

▶ x_0 – т. перегиба, не огр. общности, f строго выпукл. вниз на $O_-(x_0)$, вверх – на $O_+(x_0)$

$\Rightarrow f' \uparrow\uparrow$ на $O_-(x_0)$, $f' \downarrow\downarrow$ на $O_+(x_0)$, причём $f' \in C(x_0)$ (т.к. $f \in D^2(x_0)$)

$\Rightarrow x_0$ – т. max. произв. $\overset{\text{Т. Ферма}}{\Longrightarrow}$ $f''(x_0) = 0$

не явл. дост! ПР-Р: x^2?

Т4 (дост. условие $\exists$ т. перегиба)

$f \in D(O(x_0)) \cap D^2(\mathring{O}(x_0))$

$\underset{(<)}{f'' > 0}$ на $\underset{f'\uparrow}{O_-(x_0)}$, $\underset{(>)}{f'' < 0}$ на $O_+(x_0) \Rightarrow x_0$ – т. перегиба.

▶ см. сл-ие...

$\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \overset{\exists O(x_0)}{} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} > 0 \Rightarrow \underset{f'\uparrow\uparrow}{f'(x) < f'(x_0)}$

$x < x_0$

$\lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \exists O(x_0)$ $\frac{f'(x) - f'(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} < 0$ $\underset{f'\downarrow\downarrow}{f'(x) - f'(x_0) < 0}$

$\to$ по кр. вып.

x_0 – т. перегиба.