МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
факультет механико-математический

Математический анализ. 4 семестр

Лектор — профессор Бадерко Е.А.

Содержание

1. Глава 1. Интеграл Римана на брусе

§1 Определение интеграла Римана

Пункт 1.1 Брус в $\mathbb{R}^n$ и его разбиение

Определение 1.1. *Пусть* $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ $\in \mathbb{R}^n$, $a_i < b_i$

Множество

$$I = I^n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

называется брусом(промежутком, координатным параллелепипедом) в $\mathbb{R}^n$

Объемом(мерой) I *называют число*

$$|I| := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Пишут также $V(I) = \mu(I) = |I|$

Определение 1.2. *Пусть* I *- брус из определения 1.1 и* P_i *- разбиения отрезков* $[a_i, b_i]$ $i = \overline{1, n}$

Множество точек $\{\overline{x}_i\}$ *называется разбиением* P *бруса* I, *"*$\{\overline{x}_i\} = \{P_i\}$*"*

$$a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < ... < x_i^{(N_i)} = b_i$$

Наше разбиение P *"делит" брус* I^n *на* $N = N_1 \cdot N_2 \cdot ... \cdot N_n$ *"частичных брусов"*

$\overset{N_1}{[a_1, b_1]}, \overset{N_2}{[a_2, b_2]}, ..., \overset{N_n}{[a_n, b_n]}$

Замечание.

$I_{(j)} = [x_1^{j_1 - 1}, x_1^{j_1}] \times [x_2^{j_2 - 1}, x_2^{j_2}] \times ... \times [x_n^{j_n - 1}, x_n^{j_n}]$, $(j) = (j_1, j_2, ..., j_n)$ - мультииндекс

$I = \bigcup\limits_{(j)} I_{(j)}$ - N "мелких брусов"

Определение 1.3. *Диаметром разбиения* P *бруса* I *называется* $d(P) = \max\limits_{i = \overline{1, n}} d(P_i)$

Замечание. $0 < d(P) \leqslant \max\limits_{i = \overline{1, n}} |b_i - a_i| \leqslant (\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2)^{\frac{1}{2}} = \|\overline{b} - \overline{a}\|_2$

Определение 1.4. *Пусть* P *- разбиение бруса* I *из определения 1.3 такое, что* $I = \bigcup\limits_{(j)} I_{(j)}$

$\forall (j)$ *фиксируем произвольно* $\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, ..., \xi_n^{(j)}) \in I_{(j)}$

$\xi_i^{(j)} \in [x_i^{(j-e)}, x_i^{(j)}]$, *где* $(j-e) = (j_1 - 1, j_2 - 1, ..., j_n - 1)$ $\quad \xi := \{\xi^{(k)}\}$ - *"метка"*

Разбиение P *вместе с "меткой"* ξ *называется размеченным разбиением бруса* I^n

Пункт 1.2 Интеграл Римана на брусе

Определение 1.5. *Пусть* $f : I \to \mathbb{R}$ *и* (P, ξ) *- размеченное разбиение бруса* I : $I = \bigcup\limits_{(j)} I_{(j)}$

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{(j)} f(\xi^{(j)}) \cdot |I_{(j)}|$$

называется интегральной суммой функции $f(x)$*, соответствующей размеченному разбиению* (P, ξ)

Пример.

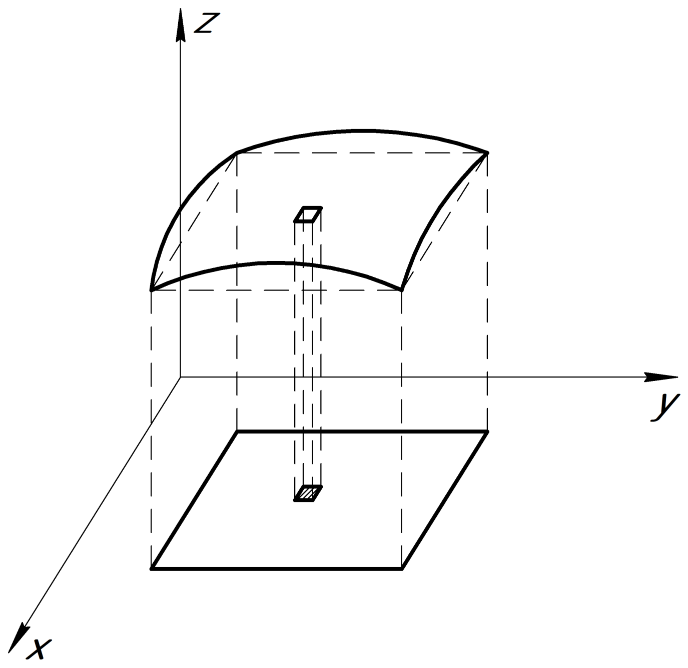


Рис. 1. Цилиндроид

Было: Площадь под графиком $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

Стало: Объем цилиндроида $z = f(x, y)$ $(x, y) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{D} = [a, b] \times [c, d]$

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{i=j}^{N_2} f(\xi_i, \eta_j) |\triangle x_i \triangle y_j|$$

Определение 1.6. *Число $\mathcal{J}$ называется пределом $\sigma(P,\xi)$ при $d(P) \to 0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;:\; |\sigma(P,\xi) - J| < \varepsilon \;\; \forall (P,\xi) \text{ с } d(P) < \delta$$

Обозначение: $\mathcal{J} = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi)$

$\mathcal{J}$ - кратный интеграл Римана функции $f(x)$ по брусу I^n

База. Пусть $\mathcal{P}$ - множество всех размеченных разбиений (P,ξ) бруска I

Вводим базу $\mathscr{B} = \{B_\delta\}$, где $B_\delta := \{(P,\xi) : d(P) < \delta\}, \;\; 0 < \delta \leqslant \delta_0 = \max\limits_{i=\overline{1,n}}(b_i - a_i)$

Утверждение. $\mathscr{B}$ - база.

1. $B_\delta \neq 0 \;\; \forall \delta \in (0, \delta_0)$

2. $\forall \delta_1, \delta_2 \;\; \delta_3 = min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow \exists B_{\delta_3} \subset (B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2})$ (построить измельчение)

Следствие. $\mathcal{J} = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi) \Leftrightarrow \mathcal{J} = \lim\limits_{\mathscr{B}} \sigma(P,\xi)$ - предел по базе $\Rightarrow$ единственность предела, критерий Коши

Критерий Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall (P,\xi)(P',\xi') : \; d(P), d(P') < \delta \Rightarrow |\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P',\xi')| < \varepsilon$$

Определение 1.7. *f называется интегрируемой по Риману на брусе I, если*

$$\exists \mathcal{J} = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) \in \mathbb{R}$$

Обозначение. $\int\limits_{I^n} f(x) d\overline{x} = \int\limits_{I^n} f(x_1,..,x_n) dx_1 ... dx_n$

Определение 1.8. *$R(I)$ - множество всех функций, интегрируемых по Риману на брусе $I = I^n$*

Пример. $f(x) = c \Rightarrow \int\limits_{I^n} f(x) d\overline{x} = \int\limits_{I^n} f(x_1,..,x_n) dx_1 ... dx_n = c|I| = c \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Теорема 1.1. *(Необходимое условие интегрируемости)*

$f \in \mathbb{R}(I^n) \Rightarrow f \in B(I^n)$

Доказательство.

От противного. Пусть $f \in \mathbb{R}(I^n)$, но $f \notin B(I^n)$.

Пусть P - произвольное разбиение бруса $I = \bigcup\limits_{(k)} I(k) \Rightarrow \exists\ k_0:\ f \notin B(I_{(k_0)})$. Возьмем $\varepsilon = 1$.

По определению интегрируемости

$$\exists \delta > 0:\ \forall (P,\xi)(P',\xi) \quad d(P) < \delta,\ d(P') < \delta \ \ |\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P',\xi')| < \varepsilon = 1$$

Пусть $P = P'$, ξ и ξ' будут отличаться только на частичном брусе с мультииндексом (k_0).

Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in I_{(k_0)} \quad \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in I_{(k_0)}$

В силу выбора разбиений (P,ξ) и (P',ξ')

$$|\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P',\xi')| = |f(\alpha) - f(\beta)| \cdot |I_{(k_0)}| =: A$$

Фиксируем α, β выбираем в силу неограничнности f на I_{k_0}: $|f(\beta)| \geqslant \dfrac{1}{|I_{k_0}|} + |f(\alpha)| \Rightarrow A \geqslant 1 \Rightarrow$ противоречие. ■

Пункт 1.3 Суммы Дарбу и предельный критерий интегрируемости

Определение 1.9. *Пусть $f \in B(I)$, P-разбиение бруса I: P порождает деление I на $N = N_1 ... N_n$ частичных брусов. $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$. Тогда:*

1. Число $S(f,P) = S(P) = \sum\limits_{k=1}^{N} M_k |I_k|$, где $M_k := \sup\limits_{I_k} f$ называется верхней суммой Дарбу функции f, соответствующей разбиению P.

При измельчении разбиения $P' \prec P : S(P') < S(P)$

2. Число $s(f,P) = s(P) = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k |I_k|$, где $m_k := \inf\limits_{I_k} f$ называется нижней суммой Дарбу функции f, соответствующей разбиению P

При измельчении разбиения $P' \prec P : s(P') \geqslant s(P)$

Лемма 1. $f \in B(I) \Rightarrow \begin{cases} S(P) = \sup\limits_{\xi} \sigma(P,\xi) \\ s(P) = \inf\limits_{\xi} \sigma(P,\xi) \end{cases} \quad \forall P \in \mathcal{P}^*$, где $\mathcal{P}^*-$множество разбиений без метки

Доказательство.

1. а) Докажем, что $\sup \sigma(P,\xi) \leqslant S(P),\ \forall P \in \mathcal{P}^*$.

Разбиение P порождает представление бруса $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$

Для произвольного $P \in \mathcal{P}^*$ имеем:

$$\sup \sigma(P,\xi) = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{f(\xi_k)}_{\leqslant M_k = \sup\limits_{I_k} f} |I_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k| = S(P) \Rightarrow \sup \sigma(P,\xi) \leqslant S(P)$$

б) Докажем, что $\sup \sigma(P,\xi) \geqslant S(P)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольно: $\forall k = \overline{1,N} \;\; \exists \overline{\xi}_k \in I_k : \; f(\overline{\xi}_k) > M_k - \dfrac{\varepsilon}{|I|}, \;\; \overline{\xi} = (\overline{\xi}_1, ..., \overline{\xi}_N)$

Тогда:

$$\sum_{k=1}^{N} f(\overline{\xi}_k)|I_k| > \sum_{k=1}^{N} (M_k - \frac{\varepsilon}{|I|})|I_k| = S(P) - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \geqslant \sigma(P,\overline{\xi}) > S(P) - \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0 \underset{\text{к} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \xi}{\Rightarrow} \sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \geqslant S(P)$$

Для пункта 2 - аналогично ■

Замечание. $f \in C(I) \Rightarrow S(P)$ и $s(P)$ - интегральные суммы (так как $sup = max, \;\; inf = min$).

Обозначение. Так как разбиение P порождается "координатными" разбиениями $P_i, \; i = \overline{1,N}$, то далее будем использовать обозначение $P = (P_1, ..., P_n)$

Определение 1.10. *Пусть $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^*$.*

Тогда $\underset{(\tilde{P}_1,...,\tilde{P}_n)}{\tilde{P}_n}$ *- "измельчение" разбиения* $\underset{(P_1,...,P_n)}{P_n} \overset{def}{\Leftrightarrow} \tilde{P}_i$ *- измельчение P_i, $\forall i = \overline{1,n}$*

Обозначение: $\tilde{P} \prec P$

Лемма 2. Пусть $f \in B(I) \Rightarrow \forall \tilde{P}, P \in \mathcal{P}^*$ с условием $\tilde{P} \prec P$. Тогда:

1. $S(\tilde{P}) \leqslant S(P))$
2. $s(\tilde{P}) \geqslant s(P))$

Доказательство.

1. Разбиение P_k порождает представление $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$, а $\tilde{P}$ порождает $I_k = \bigcup\limits_{l=1}^{N_k l} I_{kl}$, так что

$I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \bigcup\limits_{l=1}^{N_k} I_{kl}$

Имеем:

$$S(\tilde{P}) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N_k} \underbrace{M_{kl}}_{= M_k = \sup\limits_{I_{kl}} f} |I_{kl}| \leqslant \sum_{k=1}^{N} M_k \sum_{l=1}^{N_k} |I_{kl}| = \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k| = S(P)$$

Пункт 2 - аналогично ■

Лемма 3. Пусть $f \in B(I)$. Тогда $s(P_1) \leqslant S(P_2) \ \ \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}^*$

Доказательство.

Положим $P_3 := P_1 \cup P_2 \Rightarrow P_3 \prec P_1, \ P_3 \prec P_2$

Имеем: $s(P_1) \underset{\text{Лемма 2}}{\leqslant} s(P_3) \leqslant S(P_3) \underset{\text{Лемма 2}}{\leqslant} S(P_2)$ ■

Определение 1.11. *Пусть $f \in B(I)$. Тогда:*

1. Верхний интеграл Дарбу $J_{\text{в}} := \inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} S(P)$

2. Нижний интеграл Дарбу $J_{\text{н}} := \sup\limits_{P \in \mathcal{P}^*} s(P)$

Обозначения. Пусть $f \in B(I)$. Тогда $\forall p \in \mathcal{P}^*$

1. Колебание $\omega_k(f)$ функции f на брусе $I_k := \sup\limits_{x,y \in I_k} |f(x) - f(y)| = M_k - m_k$

2. $\Omega(f, P) = \Omega(P) := \sum\limits_{k=1}^{N} \omega_k |I_k|$

Следствия(к Леммам 1,2,3)

1. $J_{\text{н}} \leqslant J_{\text{в}}$

Доказательство.

По Лемме 3: $s(P_1) \leqslant S(P_2), \ \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}^* \Rightarrow s(P_1) \leqslant \inf\limits_{P_2 \in \mathcal{P}^*} S(P_2) = J_{\text{в}} \ \ \forall P_1 \in \mathcal{P}^* \Rightarrow \underbrace{\sup\limits_{P_1 \in \mathcal{P}^*} s(P_1)}_{=J_{\text{н}}} \leqslant J_{\text{в}}$

■

2. $0 \leqslant J_{\text{в}} - J_{\text{н}} \leqslant \Omega(P), \forall P \in \mathcal{P}^*$

Доказательство.

$J_{\text{в}} - J_{\text{н}} \leqslant S(P) - s(P) = \sum\limits_{k=1}^{N} (M_k - m_k)|I_k| = \sum\limits_{k=1}^{N} \omega_k |I_k| = \Omega(P)$ ■

Определение 1.12. *Пусть $f \in B(I)$.*

Тогда $\lim\limits_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 \leqslant \Omega(P) < \varepsilon \ \ \forall P \in \mathcal{P}^*$ *с* $d(P) < \delta$

Рассмотрим базу $\mathscr{B}^* := \{B^*_\delta, \ 0 < \delta \leqslant \delta_0 = \max\limits_{i=\overline{1,n}} (b_i - a_i)\}$, где $B^*_\delta = \{$разбиение $P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta\}$

Тогда (Определение 1.12) $\lim\limits_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\mathscr{B}^*} \Omega(P) = 0$

Теорема 1.2. *(Предельный критерий интегрируемости на брусе)*

Пусть $f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \lim\limits_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0$

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f \in R(I)$.

Используем критерий Коши по базе:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ |\sigma(P,\xi')-\sigma(P,\xi'')|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall(P,\xi')(P,\xi'')\in\mathcal{P}\text{ с } d(P)<\delta\Rightarrow\sup_{\xi',\xi''}|\sigma(P,\xi')-\sigma(P,\xi'')|=$$

$$=\sup_{\xi}\sigma(P,\xi)-\inf_{\xi}\sigma(P,\xi)\underset{\text{Лемма 1}}{=}S(P)-s(P)=\Omega(P)<\varepsilon\ \ \forall P\in\mathcal{P}^*\text{ с } d(P)<\delta\Rightarrow\lim_{d(P)\to0}\Omega(P)=0$$

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $f\in B(I)$, $\lim\limits_{d(P)\to0}\Omega(P)=0$

а) Имеем: $0\leqslant J_{\text{в}}-J_{\text{н}}\leqslant\Omega(P)\to0\Rightarrow J_{\text{в}}=J_{\text{н}}:=J$

б) Докажем, что $\exists\int\limits_I fdx=J$.

А именно, надо доказать, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ |\sigma(P,\xi)-J|<\varepsilon\ \forall(P,\xi)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow J-\varepsilon\leqslant\sigma(P,\xi)\leqslant J+\varepsilon$$

1. Пусть $\varepsilon>0$ - произвольно $\Rightarrow\exists\delta>0:\ 0\leqslant\Omega(P)<\varepsilon\ \forall P\in\mathcal{P}^*$ с $d(P)<\delta\Leftrightarrow0\leqslant S(P)-s(P)<\varepsilon$
2. Имеем:

$$J-\varepsilon=J_{\text{в}}-\varepsilon=\inf_{P\in\mathcal{P}^*}S(P)-\varepsilon\leqslant S(P)-\varepsilon\underset{\text{Пункт 1}}{\leqslant}s(P)\leqslant\sigma(P,\xi)\leqslant S(P)<$$

$$<s(P)+\varepsilon\leqslant J_{\text{н}}+\varepsilon=J+\varepsilon\ \ \forall(P,\xi)\text{ с } d(P)<\delta\Rightarrow J-\varepsilon\leqslant\sigma(P,\xi)\leqslant J+\varepsilon$$

■

Следствия.

1. $f\in B(I)$, $\lim\limits_{d(P)\to0}\Omega(P)=0\Rightarrow\exists\int\limits_I fdx=J_{\text{в}}-J_{\text{н}}$
2. $f\in R(I)\Rightarrow\exists\lim\limits_{d(P)\to0}S(P)=\lim\limits_{d(P)\to0}s(P)=\int\limits_I fdx$

Пункт 1.4 Критерий Дарбу интегрируемости на брусе

Лемма 1.

Пусть $f\in B(I)$, то есть $\exists M>0:\ |f(x)|\leqslant M\ \ \forall x\in I$. И пусть $\tilde{P}=(\tilde{P}_1,...,\tilde{P}_n)\prec P=(P_1,..,P_n)$

Тогда

$$S(\tilde{P})\geqslant S(P)-A\cdot d(P)\ \ (*)$$

$$s(\tilde{P}) \leqslant s(P) + A \cdot d(P) \quad (**)$$

так что $\Omega(P) \geqslant \Omega(P) - 2A \cdot d(P)$, где $A := 2M|I| \sum\limits_{k=1}^{n} t_k b_k - a_k$, $t_k := |\tilde{P}_k| - |P_k|$

Доказательство.

Пусть $\tilde{P} \prec P$. Для простоты предполагаем, что одна дополнительная точка (то есть $t_k = 1$). $\tilde{x}_k^{(N_k)} \in (x_k^{(N_k-1)}, x_k^{(N_k)})$ - последний частичный интервал

Докажем $(*)$, то есть $S(P) - S(\tilde{P}) \leqslant A \cdot d(P)$

Введем "промежуточные"разбиения:

$P^{(0)} := P$

$P^{(k)} = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, ..., P_{k+1}, .., P_n)$ $n \geqslant k \geqslant 1$

Так что $P^{(n)} = \tilde{P}$

Имеем:

$$S(P) - S(\tilde{P}) = S(P^{(0)}) - S(P^{(n)}) = [S(P^{(0)}) - S(P^{(1)})] + [S(P^{(1)}) - S(P^{(2)})] + ... + [S(P^{(n-1)}) - S(P^{(n)})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [S(P^{(k-1)}) - S(P^{(k)})] \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2M|x_k^{(N_k-1)} - x_k^{(N_k)}| D_k$$

где $D_k = \sum\limits_{j_1=1}^{N_1} ... \sum\limits_{j_{k-1}=1}^{N_{k-1}} \sum\limits_{j_{k+1}=1}^{N_{k+1}} ... \sum\limits_{j_n=1}^{N_n} |I_{j_1,...,j_{k-1},j_{k+1},...,j_n}|$ - объем $(n-1)$мерного бруса

Заметим, что $|I| = (b_k - a_k) D_k \Rightarrow D_k = \dfrac{|I|}{b_k = a_k}$

Поэтому:

$$S(P) - S(\tilde{P}) \leqslant 2M d(P) \sum_{k=1}^{n} D_k = 2M d(P) |I| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k - a_k} = A \cdot d(P) \Rightarrow (*)$$

$(**)$ доказывается аналогично. ■

Лемма 2. Пусть $f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f \in R(I) \overset{\text{предельный}}{\underset{\text{критерий}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \Rightarrow \inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$

2. $\boxed{\Leftarrow}$

а) Пусть $\inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists P' \in \mathcal{P}^* : 0 \leqslant \Omega(P') < \dfrac{\varepsilon}{2} \underbrace{(+0)}_{= \inf \Omega(P)} \qquad (3)$

Обозначим $s_i := |P_i'|$, $s_i = s_i(\varepsilon)$

Положим (см. Лемму 1) $\delta := \dfrac{\varepsilon}{4A(s_1, ..., s_n)}$

б) Пусть $P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta$, $P'' := P' \cup P$

Заметим, что $|P_i''| \leqslant |P_i'| + |P_i| \quad (4)$

Имеем: $0 \leqslant \Omega(P'') \leqslant \Omega(P') \overset{(3)}{<} \dfrac{\varepsilon}{2} \quad (5)$

Из пункта 2 $\Rightarrow \Omega(P'') \geqslant \Omega(P) - 2 \underbrace{A}_{=A(t_1,..,t_n)} d(P)$

Заметим, что $t_i = |P_i''| - |P_i| \overset{(4)}{\leqslant} s_i \underset{\text{см. Лемму 1}}{\Rightarrow} A(t_1, .., t_n) \leqslant A(s_1, ..., s_n)$

$$\Rightarrow \Omega(P) - 2Ad(P) \geqslant \Omega(P) - 2A(s_1, .., s_n)\delta = \Omega(P) - 2A\frac{\varepsilon}{4A} = \Omega(P) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Таким образом $\Omega(P'') \geqslant \Omega(P) - \dfrac{\varepsilon}{2} \quad (6)$

Имеем: $0 \leqslant \Omega(P) \overset{(6)}{\leqslant} \Omega(P'') + \dfrac{\varepsilon}{2} \overset{(5)}{<} \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

В итоге: $\forall \varepsilon > 0 \;\; 0 \leqslant \Omega(P) < \varepsilon \;\; \forall P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta$ ■

Теорема 1.3. *(Критерий Дарбу интегрируемости на брусе)*

Пусть $f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow J_в = J_н$

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ $\exists f \in R(I) \Rightarrow \exists J := \int\limits_I f(x)dx \overset{\text{предельный}}{\underset{\text{критерий}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \Rightarrow J = J_в = J_н$

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $f \in B(I)$, $J_в = J_н := J \overset{?}{\Rightarrow} f \in R(I)$

По Лемме 2 достаточно доказать, что $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$

$\Omega(P) \geqslant 0 \;\; \forall P \in \mathcal{P}^*$

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольно. Тогда

$$\exists P^{(1)} \in \mathcal{P}^* : \quad S(P^{(1)}) < J_в + \frac{\varepsilon}{2} = J + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists P^{(2)} \in \mathcal{P}^* : \quad s(P^{(2)}) > J_н - \frac{\varepsilon}{2} = J - \frac{\varepsilon}{2}$$

Положим $P := P^{(1)} \cup P^{(2)} \Rightarrow P \prec P^{(1)}, P \prec P^{(2)}$

Поэтому $\Omega(P) = S(P) - s(P) \leqslant S(P^{(1)}) - s(P^{(2)}) < J + \dfrac{\varepsilon}{2} - (J - \dfrac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$

В итоге: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists P \in \mathcal{P}^* : \; 0 \leqslant \Omega(P) \leqslant \varepsilon \Rightarrow \inf\limits_{\mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$ ■

Замечания.

1. $f \in R(I) \overset{\text{см. д-во Т.}}{\Rightarrow} J_{\text{в}} = J_{\text{н}} = \int\limits_I f dx$

2. $J_{\text{в}} = J_{\text{н}} \Rightarrow f \in R(I) \overset{\text{зам. п.1}}{\Rightarrow} J_{\text{в}} = J_{\text{н}} = J = \int\limits_I f dx$

Следствия.

1. $f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \exists$ и равны $\lim\limits_{d(P)\to 0} s(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P)$

   Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Смотри следствие 2 после Теоремы в пункте 3.

2. $\boxed{\Leftarrow}$

Пусть $\lim\limits_{d(P)\to 0} s(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P) \Rightarrow \exists \lim\limits_{d(P)\to 0} (S(P) - s(P)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \overset{\text{пред. Кр.}}{\Rightarrow} f \in R(I)$ ■

2. Пусть $f \in B(I)$. $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(P) \overset{\text{сл-ие 1}}{\Rightarrow} f \in R(I) \overset{\text{Кр. Дарбу}}{\Rightarrow}$
$J_{\text{в}} = J_{\text{н}} = \int\limits_I f dx = J \Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P) = J_{\text{в}} = J = J_{\text{н}} = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(P)$

§2 Множества меры нуль

Пункт 2.1 Определения и основные свойства множеств меры нуль

Определение 1.13. *Брус $I = I^n$ называется кубическим (n-мерным кубом), если $b_i - a_i = l > 0,\ \forall i = \overline{1, n}$*

Определение 1.14. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. E имеет (лебегову) меру нуль (обозначается $\mu(E) = 0$) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ не более, чем счетная система $\{I_k |\ I_k\ -$ кубический брус$\}$ с условиями:*

1. $E \subset \bigcup\limits_k I_k$

2. $\sum\limits_k |I_k| < \varepsilon$

Замечания.

1. В определении 1.14 можно брать открытые брусы $\overset{\circ}{I_k}= (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$.

Доказательство.

1. Если верно для $\{\overset{\circ}{I_k}\}$, то верно и для $\{I_k\}$, так как если E принадлежит объединению открытых брусов, то принадлежит и объединению замкнутых.

2. Пусть верно для $\{I_k\}$: пусть $\mu(E) = 0$ по определению 1.14 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists$ не более чем счетная система $\{I_k |\ I_k\ -$ кубический брус$\}$:

a) $E \subset \bigcup\limits_k I_k$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\forall k$ выберем открытый кубический брус J_k : $\left.\begin{array}{c} \overset{\circ}{J_k}\supset I_k \\ |\ \overset{\circ}{J_k}\ | < 2|I_k| \end{array}\right] \Rightarrow E \subset \bigcup\limits_k I_k \subset \overset{\circ}{J_k}$,

$$\sum_k |J_k| \leqslant 2 \sum_k |I_k| = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ ■

2. Пусть $B_r(x^\circ)$ - открытый шар с центром в x° и радиусом $r > 0$. Объем $B_r(x^\circ) = |B_r(x^\circ)| := c_n r^n$, где $c_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$, $n \in \mathbb{N}$.
Тогда в определении 1.14 вместо брусов можно рассматривать шары.

3. Можно брать произвольные брусы (не обязательно кубические).

Лемма 1.

1) Точка - множество меры 0.

2) $\mu(E_m) = 0$, $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m) = 0$

3) $A \subset B$, $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

4) I - брус в $\mathbb{R}^n$ $((b_i - a_i) > 0,\ i = \overline{1, n}) \Rightarrow \mu(I) \neq 0$ (т.е. неверно, что $\mu(I) = 0$)

Замечание

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим евклидову норму $\|x\|_n := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $\|x\|_\infty := \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Тогда имеет место неравенство $\|x\|_n \leqslant n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_n n^{\frac{1}{2}}$

Доказательство.

В самом деле: $\|x\|_n := \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \leqslant \sqrt{n(\max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|)^2} = n^{\frac{1}{2}} \|x\|_\infty$

$\exists i_c \in \{1, ..., n\}:\ \|x\|_\infty = |x_{i_c}| \leqslant \sqrt{|x_i|^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \|x\|_n$ ■

Лемма 2.

Пусть $f:\ B_\delta(x^\circ) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_i \in \mathcal{D}(\overset{\text{откр.}}{B_\delta(x^\circ)})\ i = \overline{1, n}$. Причем $\exists K > 0:\ \left|\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right| \leqslant K,\ \forall x \in B_\delta(x^\circ)$.

Тогда $\forall x, y \in B_\delta(x^\circ),\ \|f(y) - f(x)\|_n \leqslant C\|x - y\|_n$, где $C > 0$ - некая постоянная.

Доказательство.

Имеем: $\|f(y) - f(x)\|_n \leqslant \sqrt{n}\|f(y) - f(x)\|_\infty = \sqrt{n} \max\limits_{i=1}^{n} \left|\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_\delta(x)}{\partial x_j}(x + O_\delta(y - x))(y_j - x_j)\right| \leqslant$ $\sqrt{n} n K \|y - x\|_\infty \leqslant \underbrace{n^{\frac{3}{2}} K}_{=:C} \|y - x\|_n$ ■

Обозначения.

1. Шар (открытый) $B_r(x^\circ) = B(x^\circ, r)$

Шар (замкнутый) $B[x^\circ, r]$

2. $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$, тогда расстояние $\rho(M_1, M_2) := \inf\limits_{x \in M_1,\ y \in M_2} \|x - y\|$

3. $f \in C^1(\mathbb{G}),\ f = (f_1, ..., f_n) \overset{def}{\Leftrightarrow} f_i \in C^1(\mathbb{G}),\ i = \overline{1, n}$

Теорема 1.4. *(Теорема об инвариантности меры 0 при C^1 отображении)*

Пусть $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}$ - открытое, и пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$ - вектор-функция, $f \in C^1(\mathbb{G})$ (т.е. $f_i \in C^1(\mathbb{G}),\ i = \overline{1, n}$).

Тогда: $E \subset \mathbb{G}$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(f(E)) = 0$.

Замечание.

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

a) Если f инъективно, то $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

b) Если f не инъективно, то вообще говоря $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Пункт 2.2 База окрестностей в $\mathbb{R}^n$

Определение 1.15. *Система открытых множеств* $\{U_\alpha \subset \mathbb{R}^n\}$ *- база окрестностей в* $\mathbb{R}^n \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}$ *- открытое,* $\exists$ *подсистема* $\{U_{\alpha_k}\}: \ \mathbb{G} = \bigcup\limits_{\alpha_k} U_{\alpha_k}$

Лемма 1.

1. Система открытых брусов $\{\overset{\circ}{I}\ (p,q) = (p_1, q_1) \times ... \times (p_n, q_n)\}$, где $p_i, q_j \in \mathbb{Q}$, $(p,q) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n$, есть счетная база окрестностей в $\mathbb{R}^n$.

2. Система открытых шаров в $\mathbb{R}^n$ $\{B(q,r),\ \overset{\text{центр}}{q} \in \mathbb{Q}^n,\ \overset{\text{радиус}}{r} \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+\}$ - счетная база окрестностей в $\mathbb{R}^n$

Доказательство.

1. Система открытых брусов - счетная. Проверим, что эта система - база окрестностей в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}$ - открытое, произвольное.

Имеем: $\forall x \in \mathbb{G} \ \ \exists \overset{\circ}{I}(x) \ni x,\ \overset{\circ}{I}(x) \subset \mathbb{G}$

Так как $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, то $\overset{\circ}{I}(x)$ можно выбрать из системы $\{\overset{\circ}{I}(p,q)\} = \{\overset{\circ}{I}_k,\ k \in N\}$.

Следовательно $\forall x \in \mathbb{G} \ \ \exists \overset{\circ}{I}_k\ (x) |\ \underbrace{x \in \overset{\circ}{I}_k}_{(*)},\ \underbrace{\overset{\circ}{I}_k(x) \subset \mathbb{G}}_{(**)}$.

$$\left.\begin{array}{l} (*) \Rightarrow \mathbb{G} \subset \bigcup\limits_{x \in \mathbb{G}} \overset{\circ}{I}_k(x) \\ (**) \Rightarrow \bigcup\limits_{k \in \mathbb{G}} \overset{\circ}{I}_k(x) \subset \mathbb{G} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{G} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{G}} \overset{\circ}{I}_k(x)$$ ■

Теорема 1.5. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha$, *где* V_α *- открытое. Тогда* $\exists$ *не более чем счетное подпокрытие* $\{V_{\alpha_k}\}: \ A \subset \bigcup\limits_{\alpha_k} V_{\alpha_k}$

Доказательство.

По условию $A \subset \bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha$. Пусть $x \in A$ - произвольно $\Rightarrow \exists V_{\alpha(x)} /\ x \in V_{\alpha(x)}$. $V_{\alpha(x)}$ - открытое, следовательно по Лемме 1, $\exists$ не более чем счетная система брусов $\{I_{k_l}\} / V_{\alpha(x)} = \bigcup\limits_{l} \overset{\circ}{I}_{k_l} \Rightarrow x \in V_{\alpha(x)} \overset{(*)}{=}$

$\bigcup\limits_{l}\overset{\circ}{I}_k \Rightarrow \exists l/\ x \in \overset{\circ}{I}_{k_l} =: U(x)$, $U(x)$ не более чем счетное. Тогда $A \subset \bigcup\limits_{x\in A} U(x)$,

$\bigcup\limits_{k}(U(x_k)) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\overset{\circ}{I}_k \overset{\text{см.}*}{\subset} \bigcup\limits_{k} V_{\alpha_k}$, где $V_{\alpha_k} := V_{\alpha(x_k)}$ ■

Теорема 1.6. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$, $\forall x \in A\ \exists$ *брус* $I(x)|\ x \in \overset{\circ}{I}(x)$, $\mu(I(x) \cap A) = 0$. *Тогда* $\mu(A) = 0$

Доказательство.

Из условия $A \subset \bigcup\limits_{x\in A}\overset{\circ}{I}(x) \overset{T.1.5}{\Rightarrow} \exists$ подсистема $\{I(x_k)\}|\ A \subset \bigcup\limits_{x\in A}\overset{\circ}{I}(x_k)$. Тогда $A = A \cap (\bigcup\limits_{k}\overset{\circ}{I}(x_k)) =$ $\bigcup\limits_{x}\underbrace{(A \cap \overset{\circ}{I}(x_k))}_{A_k} = \bigcup\limits_{k} A_k$, причем $\mu(A \cap I(x_k)) \overset{\text{усл.}}{=} 0 \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{k} A_k) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ ■

Пункт 2.3 Мера графика непрерывной функции. Теоремы Сарда

Теорема 1.7. *(Мера графика непрерывной функции)*

Пусть $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}$ *- открытое.* $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{G})$.

$\Gamma = \{(x, y)|\ x \in \mathbb{G},\ y = f(x)\}$ *- график функции* $f(x)$. *Тогда* $\mu(\Gamma) = 0$ *(в пространстве* $\mathbb{R}^{n+1}$*)*

Доказательство.

Фиксируем произвольную точку на графике $\Gamma \ni (x_0, f(x_0))$. В силу Теоремы 1.6, достаточно доказать, что $\exists$ брус $I^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, такой что $\left[\begin{array}{l} (x^\circ, f(x^\circ)) \subset \overset{\circ}{I}{}^{\,n+1} \quad (*) \\ \mu(I^{n+1} \cap \Gamma) = 0 \quad (**) \end{array}\right.$

1. Доказываем $(*)$. $\mathbb{G}$ - открытое множество $\Rightarrow \exists$ брус I^n такой, что $x^\circ \in \overset{\circ}{I}{}^{\,n} \subset I^n \subset \mathbb{G}$. I^n - компакт. $f \in C(I^n) \Rightarrow \exists \min\limits_{I^n} f =: m$ и $\exists \max\limits_{I^n} f =: M$ (т.е. $m \leqslant f(x) \leqslant M$). Тогда $m - 1 < f(x) < M + 1$. Положим $I^{n+1} := I^n \times [m - 1, m + 1] \Rightarrow (x^\circ, f(x^\circ)) \in \overset{\circ}{I}{}^{\,n+1} \Rightarrow (*)$ доказано.

2. Доказываем $(**)$. $f \in C(I^n) \overset{\text{по т. Кантора}}{\Rightarrow} f$ - равномерно непрерывна на I^n. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, т. что $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{|I^n|} := \varepsilon_1$, $\forall x, y$, т. что $\|x - y\| < \delta$. Фиксируем произвольное разбиение бруса I^n на частичные брусы I_j^n $(j = \overline{1, N},\ N = N_1 \cdot ... \cdot N_n)$, с условием $d(P) < \delta$.

Тогда $\forall j$, $\forall x, y \in I_j^n\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$ по условию. Следовательно если $0 \leqslant M_j - m_j =: \omega_j(f) < \varepsilon_1$, где $_j = \min\limits_{I_j^n} f,\ M_j = \max\limits_{I^n} f$. Построим для каждого I_j^n брус $I_j^{n+1} := I_j^n \times [m_j - \frac{\varepsilon_1}{2}, M_j + \frac{\varepsilon_1}{2}]$. Тогда объем $|I_j^{n+1}| = |I_j^n| \cdot (\omega_j + \varepsilon_1) < 2\varepsilon_1 |I_j^n|\ \forall j = \overline{1, N}$.

Суммарный объем $\sum\limits_{j} |I_j^{n+1}| < 2\varepsilon \sum\limits_{j} |I_j^n| = 2\varepsilon_1 |I_j^n| = 2\varepsilon$. Следовательно $\mu(I^{n+1} \cap \Gamma) = 0$ - по определению. $(**)$ - доказано. ■

Следствие 1.

Пусть $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и пусть E - к-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, где $E_k := \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n | \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = h_i, \ i = \overline{1, n-k}\}$, причем $rang(a_{ij}) = n-k$. Тогда $\mu(E_k) = 0$ (в $\mathbb{R}^n$)

Доказательство.

1. Пусть $k = n-1$, $E_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \ \sum a_j x_j = h\}$, причем $\exists j_0$, т. что $a_{j0} \neq 0$.

Тогда $x_n = \dfrac{1}{a_n}\{-\sum\limits_{j\neq n} a_j x_j + h\} \Rightarrow \underbrace{f(x_1, ..., x_{n-1}) \in C(\mathbb{R}^{n-1})}_{\text{непр. функция}} \Rightarrow \mu_n(E_{n-1}) = 0$

2. Пусть $k = 1, 2, ..., n-2 \Rightarrow E_k \subset E_{n-1} \Rightarrow \mu_n(E_k) = 0$ ■

Следствие 2.

A - аффинное преобразование $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Если $rang|A| = n-k$, то

$|A| \neq 0 \Rightarrow A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

$|A| = 0 \Rightarrow A(\mathbb{R}^n) = E_k \Rightarrow \mu(A(\mathbb{R}^n)) = 0.$

Теорема 1.8. *(Теорема Сарда, $m < n$)*

Пусть $1 \leqslant m < n$, $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}$ *- открытое,* $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{G})$. *Тогда* $\mu(f(\mathbb{G})) = 0$

Доказательство.

1. Введем вспомогательную функцию $g : \mathbb{G} \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которая определяется по формуле $g_i(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{n-m}) := f_i(x_1, ..., x_m)$, $\forall y \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Имеем: $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = \overline{1, m}$, и $\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j} = 0 \Rightarrow g \in C^1(\mathbb{G} \times \mathbb{R}^{n-m})$.

2. Проверим, что $\mathbb{G} \times \mathbb{R}^{n-m}$ - открытое в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, пусть $(x^\circ, y^\circ) \in \mathbb{G} \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Имеем: т.к. $\mathbb{G}$ - открытое, то $\exists$ брус, т. что $x^\circ \in \overset{\circ}{I}{}^{m} \subset \mathbb{G}$. $\exists$ брус I^{n-m}, т. что $y^\circ \in \overset{\circ}{I}{}^{n-m} \subset \mathbb{R}^{n-m}$.

Следовательно $(x^\circ, y^\circ) \in \overset{\circ}{I}{}^{m} \times \overset{\circ}{I}{}^{n-m} \subset \mathbb{G} \times \mathbb{R}^{n-m}$

3. Пусть $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n | \ x \in \mathbb{G}, \ y = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $H \subset E_m := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n | \ y_i = 0, \ i = \overline{1, n-m}\}$ - m-мернная плоскость. Но $\mu(E_m) = 0 \Rightarrow \mu(H) = 0 \overset{\text{Теорема 1.4}}{\Rightarrow} \mu(g(H)) = 0$

4. Имеем: $g(H) = \{z \in \mathbb{R}^n | \ z = \underbrace{g(x, y)}_{f(x)}, \ x \in \mathbb{G}, \ y = 0\} = \{z \in \mathbb{R}^n | \ z = f(x), \ x \in \mathbb{G}\} = f(\mathbb{G}) \Rightarrow \mu(f(\mathbb{G})) = 0$. Теорема доказана. ■

Обозначения.

Пусть $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}$ - открытое, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$. Тогда:

1) $$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} = \begin{pmatrix} grad\ f_1 \\ \vdots \\ grad\ f_n \end{pmatrix}$$ - **матрица Якоби**

2) Если $m = n$, то $det\|Df\|$ - **Якобиан** отображения f

Обобщение.

$f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$, $f_i \in C^1(\mathbb{G}),\ i = \overline{1,n}$, $I^n \subset \mathbb{G}$.

Тогда $f_i(x) - f_i(y) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y + \theta(x - y')d\theta) \right)(x_j - y_j)$, $\forall x, y \in I^n$, или

$f(x) - f(y) = \int\limits_0^1 Df(y + \theta(x - y'))d\theta(x - y))$, $\forall x, y \in I^n$

Теорема 1.9. *(Теорема Сарда, $m = n$)*

Пусть $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}$ - открытое, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{G})$, $S := \{x \in \mathbb{G}|\ det\ Df(x) = 0\}$. Тогда $\mu(f(S)) = 0$

Теорема 1.10. *(Теорема Сарда, $m > n$)*

Пусть $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbb{G}$ - открытое, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\mathbb{G})$, $S := \{x \in \mathbb{G}|\ rang\ Df(x) < n\}$. Тогда $\mu(f(S)) = 0$

§3 Критерий Лебега интегрируемости на брусе

Пункт 3.1 Множество объема нуль

Определение 1.16. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $v(A) = 0$ (A имеет объем нуль) $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists$ конечная система брусов $\{I_k,\ k = \overline{1, n}\}$, т. что*

1) $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$

2) $\sum\limits_{k=1}^{m} |I_k| < \varepsilon$

Замечание.

В определении можно брать открытые брусы, шары, параллелепипеды (открытые и замкнутые).

Лемма 1.

1. $v(A) = 0 \Rightarrow A$ - ограничено.

2. $v(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$. В обратную сторону, вообще говоря, неверно (множество рациональных чисел)

3. $B \subset A$, $v(A) = 0 \Rightarrow v(B) = 0$

4. Брус I не имеет объем нуль.

5. K - компакт, $\mu(K) = 0 \Rightarrow v(K) = 0$

6. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \varnothing$

Докажем 6-ой пункт. Предположим, что $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$. Тогда $\exists x \in \overset{\circ}{A}$, $\exists$ куб I с условием $x \in I \subset A \Rightarrow \mu(I) = 0$ - невозможно.

7. $v(A) = 0 \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \varnothing$

8. $v(A) = 0 \Rightarrow v(\overline{A}) = 0$

Докажем 8-ой пункт. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{I_k,\ k = \overline{1, m}\}$, т. что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$, $\sum\limits_{k=1}^{m} |I_k| < \varepsilon \Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k \Rightarrow v(\overline{A}) = 0$

9. $v(A) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0$ (объем границы)

Докажем 9-ый пункт. $v(A) = 0 \Rightarrow v(\overline{A}) = 0$, но $\partial A \subset \overline{A} \Rightarrow v(\partial A) = 0$

Пункт 3.2 Колебания функции в точке

Напоминание.

1. $B_\delta(x^\circ) = B(x^\circ, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x - x^\circ\| < \delta\}$

2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in B(\Omega)$. Тогда $\omega(f, \Omega) := \sup\limits_{x,y\in\Omega} |f(x) - f(y)| = \sup\limits_{\Omega} f - \inf\limits_{\Omega} f$ - колебание f на Ω

Определение 1.17. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x^\circ \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in B(A)$.*

Тогда $\omega(f, x^\circ) = \omega(x^\circ) := \lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f, B(x^\circ, \delta) \cap A)$ - колебание f в точке x°.

По теореме Вейерштрасса - $\exists$ и $= \inf\limits_{\delta>0} \omega(f, B(x^\circ, \delta) \cap A)$

Замечание.

Обозначим $\sup\limits_{\Omega} f =: M(f, \Omega)$, $\inf\limits_{\Omega} f =: m(f, \Omega)$.

Тогда $\omega(x^\circ) = \underbrace{\lim\limits_{\delta\to 0} M(f, B(x^\circ, \delta) \cap A)}_{=\inf\limits_{\delta>0} M(\;)} - \underbrace{\lim\limits_{\delta\to 0} m(f, B(x^\circ, \delta) \cap A)}_{=\sup\limits_{\delta>0} m(\;)}$

Теорема 1.11. *(Критерий Бэра непрерывности функции в точке)*

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $x^\circ \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in B(A)$. Тогда $f \in C(x^\circ) \Leftrightarrow \omega(f, x^\circ) = 0$

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f \in C(x^\circ)$, $x^\circ \in A$

1) x° - изолированная точка $A \Rightarrow m(x^\circ) = M(x^\circ) = f(x^\circ) \Rightarrow \omega(x^\circ) = 0$, где $m(x^\circ) := \sup\limits_{\delta>0} m(f, B(x^\circ, \delta) \cap A)$, $M(x^\circ) := \inf\limits_{\delta>0} M(f, B(x^\circ, \delta) \cap A)$

2) $x^\circ \in A \cap A' \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta_0 > 0 : \; |f(x) - f(x^\circ)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $\forall x \in B(x^\circ, \delta) \cap A$, $\forall\delta \in (0, \delta_0)$

Следовательно $\forall x, y \in B(x^\circ, \delta) \cap A$ имеем: $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x^\circ)| + |f(y) - f(x^\circ)| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\omega(B(x^\circ, \delta) \cap A) = \lim\limits_{\delta\to 0+} \sup |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, $\forall\delta \in (0, \delta_0)$

В итоге: $\forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta_0 > 0 : \; 0 \leqslant \omega(B(x^\circ, \delta) \cap A) < \varepsilon$, $\forall\delta \in (0, \delta_0) \Rightarrow \omega(x^\circ) = 0$ по определению предела.

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\omega(x^\circ) = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists\delta_0 > 0 : \; 0 \leqslant \underbrace{\omega(B(x^\circ, \delta) \cap A)}_{\sup\limits_{x,y\in B\cap A} |f(x)-f(y)|} < \varepsilon$, $\forall 0 < \delta < \delta_0$ и т.к.

$x^\circ \in B \cap A \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall y \in B(x^\circ, \delta_0) \cap A \Rightarrow f \in C(x^\circ)$ (определение непрерывности в точке) ■

Вывод: y - точка разрыва для ограниченной функции $f \Rightarrow \omega(f, y) \neq 0 (> 0)$

Замечание.

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченное, диаметр $(B) := \sup\limits_{x,y \in B} \|x - y\|$, где $B \leqslant \sqrt{n} d(B)$ (в смысле диаметра разбиения бруса), $\|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \leqslant \sqrt{m} \underbrace{\max |x_i - y_i|}_{d(B)}$

Теорема 1.12. *(Теорема Кантора для ограниченных функций)*

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$, K - компакт, $f : K \to \mathbb{R}$, $f \in B(K)$ и $\exists \omega_0 > 0 :\ \omega(f, x) \leqslant \omega_0$, $\forall x \in K$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \omega(f, I \cap K) < \omega_0 + \varepsilon$, $\forall$ бруса I с $(I) < \delta$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Рассмотрим произвольную точку $\tilde{x} \in K$.

1. $\omega(\tilde{x}) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(B_\delta(\tilde{x}) \cap K) \leqslant \omega_0 \Rightarrow \exists \delta(\tilde{x}) :\quad 0 \leqslant \omega(f, B_{2\delta(\tilde{x})}(\tilde{x}) \cap K) < \omega(\tilde{x}) + \varepsilon \leqslant \omega_0 + \varepsilon$. Но, шары $\{B_{\delta(\tilde{x})}(\tilde{x})\}$ покрывают K.

2. $\exists$ конечное подпокрытие $\{B_{\delta_l}(x^l),\ l = \overline{1, m}\}$: $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m} B_{\delta_l}(x^l)$. Пусть $\delta := \min\limits_{l=\overline{1,n}} \delta_l$.

3. Пусть I - брус, т. что $I \cap K \neq \varnothing$ и $diam(I) < \delta \Rightarrow \exists x^\circ \in I \cap K$, K - покрыто $\{B_{\delta_l}\} \Rightarrow \exists$ подсистема $l = \{1, ..., K\}$, т. что $x^\circ \in B_{\delta_l}(x^l),\ l = \overline{1, K}$.

Тогда $\forall x \in I$: $\|x - x^l\| \leqslant \|x - x^\circ\| + \|x^\circ - x^l\| < \delta + \delta_l \leqslant 2\delta_l$ в силу выбора $\delta \Rightarrow$ эта запись означает, что $I \subset B_{2\delta_l}(x^l)$, $\forall l = \overline{1, K} \Rightarrow$ по пункту 1: $\omega(f, I \cap K) \leqslant \omega(f, B_{2\delta_l}(x^l) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon$.

Теорема доказана. ■

Следствие.

Пусть выполнены условия Теоремы 1.12 для $K = I^n$ - бруса в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение P бруса I, т. что $\Omega(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{N} \Omega(f, I_k)|I_k| < (\omega_0 + \varepsilon)|I^n|$, где $N = N_1 \cdot ... \cdot N_n$ - количество частичных брусов в разбиении P, I_k - частичные брусы.

Доказательство.

1. Вспомним замечание:

$\forall$ бруса $\mathcal{F} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$: $\|\overline{x} - \overline{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \leqslant \sqrt{n} \max\limits_{i=\overline{1,n}} (b_i - a_i)$. $diam \mathcal{F} \leqslant \sqrt{n} \max\limits_{i=\overline{1,n}} (b_i - a_i)$. Тогда разбиение бруса нужно брать с нашим диаметром разбиения меньше $\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$.

2. По Теореме 1.12 $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, т. что $\omega(f, \mathcal{F}) < \omega_0 + \varepsilon$, $\forall \mathcal{F}$ с диаметром $diam(\mathcal{F}) < \delta$.

Пусть P - разбиение бруса с $d(P)$ (максимальный линейный размер по координатам наших частичных брусов) $< \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$.

Тогда $I^n = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k^n$, $diam I_k^n \leqslant \sqrt{n} d(P) < \delta \Rightarrow \Omega(f, P) < (\omega_0 + \varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{N} |I_k^n| = (\omega_0 + \varepsilon) I^n$ ■

Лемма.

Пусть $A = \overline{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in B(A)$. Введем множества $E(\varepsilon) := \{x \in A |\ \omega(f, x) \geqslant \varepsilon > 0\}$, $E := \{x \in A |\ f \notin C(x)\} \overset{\text{по крит. Бэра}}{\equiv} \{x \in A |\ \omega(f, x) > 0\}$

Тогда

1) $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \Rightarrow E(\varepsilon_1) \subset E(\varepsilon_2)$

2) $\forall \varepsilon > 0\ E(\varepsilon) = \overline{E(\varepsilon)}$ (замкнутое множество)

3) $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E(\frac{1}{m})$, $m \in \mathbb{N}$

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ и $\exists x \in E(\varepsilon_1) \Rightarrow \omega(f, x) \geqslant \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow x \in E(\varepsilon_2)$, т.е. $E(\varepsilon_1) \subset E(\varepsilon_2)$

2. Рассмотрим последовательность $(x^l \in E(\varepsilon), l \in \mathbb{N})$: $x^l \to \tilde{x},\ l \to \infty$. Так как $A = \overline{A} \Rightarrow \tilde{x} \in A \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists x^l \in B_\delta(\tilde{x})$ (в окрестности предела). Для некоторого $\delta_1 \in (0, \delta)$ $B_{\delta_1}(x^l) \subset B_\delta(\tilde{x})$. Так как $x^l \in E(\varepsilon)$, то $\omega(f, B_{\delta_1}(x^l) \cap A) \geqslant \omega(x^l) \geqslant \varepsilon$. Следовательно $\omega(f, B_\delta(\tilde{x}) \cap A) \geqslant \omega(f, B_{\delta_1}(x^l)) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \omega(\tilde{x}) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \tilde{x} \in E(\varepsilon) \Rightarrow E(\varepsilon) = \overline{E(\varepsilon)}$

3. Необходимо проверить включения в одну и другую сторону.

a) Докажем, что $E \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E(\frac{1}{m})$

Пусть $x \in E \overset{\text{по кр. Бэра}}{\Rightarrow} \omega(x) > 0 \Rightarrow \exists m$, т. что $\omega(x) \geqslant \frac{1}{m} \to x \in E(\frac{1}{m}) \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E(\frac{1}{m})$

b) Докажем, что $E \supset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E(\frac{1}{m})$

Пусть $x \in \bigcup\limits_{m} E_m \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$, т. что $x \in E_m \Rightarrow \omega(x) \geqslant \frac{1}{m} > 0 \overset{\text{по кр. Бэра}}{\Rightarrow} f \notin C(x) \Rightarrow x \in E$ ■

Пункт 3.3 Критерий Лебега для бруса

Теорема 1.13. *(Критерий Лебега)*

Пусть $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in B(I)$, $E := \{x \in I|\ f \notin C(x)\}$. *Тогда* $f \in R(I) \Leftrightarrow \mu(E) = 0$

Вспомогательные утверждения:

1. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\Leftrightarrow$ K - замкнуто и ограничено. Следовательно, так как $E(\varepsilon) \subset I^n$, $E(\varepsilon)$ - замкнуто $\Rightarrow E(\varepsilon)$ - компактно $\forall \varepsilon > 0$

2. Лемма 2 из пункта 1.4 (Пусть $f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} \Omega(P) = 0$)

3. Если множество n-меры ноль компактно, то оно имеет и n-объем ноль.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f \in R(I)$, пусть $E_m := E(\frac{1}{m})$, $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$. Достаточно проверить для фиксированного произвольного m, что $\mu(E_m) = 0$.

a) По предельному критерию интегрируемости $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(f, P) = 0 \Rightarrow$ возьмем и зафиксируем

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ разбиение P бруса I, т. что $0 \leqslant \Omega(f, P) < \dfrac{\varepsilon}{m}$

b) $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ - разбиение I на частичные брусы.

1) $E'_m := E_m \cap (\bigcup\limits_{k=1}^{N} \partial I_k)$

2) $E''_m := E_m \cap (\bigcup\limits_{k=1}^{N} \overset{\circ}{I}_k)$

c) Рассмотрим E'_m. $\mu(\partial I_k) = 0\ \forall k = \overline{1, N}$, т.к. ∂I_k - объединение кусков плоскостей $\Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{N} \partial I_k) = 0 \Rightarrow \mu(E'_m) = 0$

d) Рассмотрим E''_m. Если оно пусто, то все доказано.

Пусть $E''_m \neq \varnothing \Rightarrow \exists x^\circ \in E''_m \Rightarrow \exists k^\circ$, т. что $x^\circ \in E_m \cap \overset{\circ}{I}_{k^\circ} \Rightarrow \exists B_\delta(x^\circ)$, т. что $B_\delta(x^\circ) \subset \overset{\circ}{I}_{k^\circ}$, $B_\delta(x^\circ) \cap E''_m \neq \varnothing$. Тогда $\omega(\overset{\circ}{I}_{k^\circ}) \geqslant \omega(B_\delta(x^\circ)) \geqslant \omega(x^\circ) \geqslant \frac{1}{m}$

Рассмотрим все такие брусы из наших I_k. Обозначим их $\{I_{k_l}|\ \omega(f, I_{k_l}) \geqslant \frac{1}{m}\}$, так что $E''_m \subset (\bigcup\limits_{l}) \overset{\circ}{I}_{k^\circ}$. Тогда

$$\frac{1}{m}\sum_l |I_{k_l}| \leqslant \sum_l \omega(f, I_{k_l})|I_{k_l}| \leqslant \sum \omega(f, I_k)|I_k| < \frac{\varepsilon}{2m} \Rightarrow \sum_l |I_{k_l}| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow v(E''_m) = 0 \Rightarrow \mu(E''_m) = 0$$

а так как $E_m = E'_m \cup E''_m \Rightarrow \mu(E_m) = 0$ (m было любое)

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\mu(E) = 0$. Проверим, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение P_0 бруса I, т. что $0 \leqslant \Omega(f, P_0) < C\varepsilon$ (C - постоянная).

a) Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно (фиксировано). $E(\varepsilon) := \{x \in I|\ \omega(f,x) \geqslant \varepsilon\}$. $E(\varepsilon) \subset E \Rightarrow \mu(E(\varepsilon)) = 0$. $E(\varepsilon)$ - замкнуто, $E(\varepsilon) \subset I \Rightarrow E(\varepsilon)$ - компакт $\Rightarrow v(E(\varepsilon)) = 0 \Rightarrow \exists$ конечная система брусов $\mathcal{J} := \{\mathcal{J}_l,\ l = \overline{1,L}\}$, т. что

1) $E(\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{l=1}^{L} \mathring{\mathcal{J}}_l$

2) $\sum\limits_{l=1}^{L} |\mathcal{J}_l| < \varepsilon$

Пусть $\mathcal{J}_l = [\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(l)}] \times [\alpha_2^{(1)}, \beta_2^{(l)}] \times ... \times [\alpha_n^{(1)}, \beta_n^{(l)}]$.

b) Рассмотрим разбиение $P = (P_1 \dots P_n)$ бруса I. $P_i \supset \{\alpha_i^{(l)}\}, \{\beta_i^{(l)}\}, \overset{\text{две точки}}{\{a_i, b_i\}}$. Соответственно, имеем разбиение на частичные брусы I_k, соответствующие P $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$.

Систему $\{I_k\}$ разбиваем на две подсистемы:

1) $I' := \{I_{k_s},\ s = \overline{1,S}|\ I_{k_s} \subset \mathcal{J}_l \in \mathcal{J}\}$ (для некоторого l из множества номеров l)

2) $I'' := \{I_{k_t},\ t = \overline{1,T}|\ I_{k_t} \cap \mathring{\mathcal{J}}_l = \varnothing,\ \forall l = \overline{1,L}\}$ (остальных l)

c) Рассмотим I'. Пусть $M := \sup\limits_{I} |f|$, тогда $\omega(f, I_{k_s}) \leqslant 2M$.

Имеем: $\sum\limits_{I_{k_s} \in I'} \omega(f, I_{k_s})|I_{k_s}| \leqslant 2M \sum\limits_{l=1}^{L} |\mathcal{J}_l| < 2M\varepsilon$ (1)

d) Рассмотрим произвольный частичный брус $I_{k_t} \subset I''$. По построению $I_{k_t} \cap E(\varepsilon) = \varnothing$, (т.к. $E(\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{l=1}^{L} \mathring{\mathcal{J}}_l) \Rightarrow \omega(f,x) < \varepsilon\ \forall x \in I_{k_t}$. По Теореме 1.12 (Т. Кантора для ограниченных функций) с $\omega_0 = \varepsilon\ \exists$ разбиение P_{k_t} бруса I_{k_t} (с $d(P_{k_t}) < \delta$), т. что $I_{k_t} = \bigcup\limits_{m=1}^{M_t} I_{k_t,\ m}$ и $\sum\limits_{m=1}^{M_t} \overbrace{\omega(f, I_{k_t,\ m})}^{\leqslant 2\varepsilon} |I_{k_t,\ m}| < 2\varepsilon |I_{k_t}|\ \forall t = \overline{1,T}$ (2)

e) Рассмотрим теперь разбиение $P_0 := P \cup (\bigcup\limits_{t=1}^{T} P_{k_t})$. Имееем:

$$0 \leqslant \Omega(P_0) = \sum_{I_{k_s} \in I'} \omega(f, I_{k_s})|I_{k_s}| + \sum_{I_{k_t} \in I''} \left(\sum_{m=1}^{M_t} \omega(I_{k_t,\ m})|I_{k_t,\ m}| \right) \leqslant 2M\varepsilon + 2\varepsilon \sum_{I''} |I_{k_t}| \leqslant 2(M + |I|)\varepsilon = c\varepsilon$$

Теорема доказана. ∎

2. Глава 2. Интеграл Римана на ограниченном множестве

§1 Измеримость по Жордану

Пункт 1.1 Определение измеримого по Жордану множества

Определение 2.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Функция* $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \ x \in A \\ 0, \ x \notin A \end{cases}$ *называется характеристической функцией множества A.*

Определение 2.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, A - ограничено. Тогда A - измеримо по Жордану* $\overset{def}{\Leftrightarrow} \mu(\partial A) = 0$

Замечания.

1. I^n - брус в $\mathbb{R}^n$. A - ограниченное множество в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists$ брус $I^n \supset A$, $I^n \subset \mathbb{R}^n$ (иногда пишем I)

2. Напоминание: ∂A - замкнутое множество. Если A - ограничено $\Rightarrow$ ∂A - ограничено $\Rightarrow$ ∂A - компакт. Если $\mu(\partial A) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0$

Теорема 2.1. *(Критерий измеримости по Жордану)*

Пусть $A \subset I$. Тогда A - измеримо по Жордану $\Leftrightarrow \chi_A \in R(I)$

Доказательство.

1. Покажем, что $E := \{x \in I | \ \chi_A(x) \notin C(x)\} = \partial A$

Действительно, $\mathbb{R}^n = A_i \cup A_e \cup \partial A$ ($A_i = \overset{\circ}{A}$ - внутренность, $A_e = \mathbb{R}^n \overline{A}$)

$x^\circ \in A_i \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \ \forall x \in \underset{}{\overset{\text{некая окр.}}{O(x^\circ)}} \subset A_i \Rightarrow \chi_A \in C(A_i)$

Аналогично $x^\circ \in A_e \Rightarrow \chi_A(x) = 0 \ \forall x \in O(x^\circ) \subset A_e \Rightarrow \chi_A \in C(A_e)$

Пусть $x^\circ \in \partial A \Rightarrow \exists x_n^{(1)} \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(1)} \to x^\circ$, $\chi_A(x_n^{(1)}) = 1$

И $\exists x_n^{(2)} \in CA$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(2)} \to x^\circ$, $\chi_A(x_n^{(2)}) = 0 \Rightarrow \chi_A \notin C(x^\circ) \Rightarrow E = \partial A$

2. Имеем: A - ограничено.

Тогда A - измеримо по Жордану $\Leftrightarrow \mu(\partial A) = 0 \Leftrightarrow \mu(E) = 0 \overset{\text{кр. Лебега}}{\Leftrightarrow} \chi_A \in R(I)$ ■

Определение 2.3. *Пусть $A \subset I$, A - измеримо по Жордану. Тогда $|A|_n = |A|$ (мера Жордана)* $:= \int\limits_I \chi_A(x) dx$

Замечание 1.

Пусть $A = I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \Rightarrow \int\limits_I \chi_A(x)dx = \underbrace{\int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 ... \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n}_{\text{пока не доказали}} = \prod\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$

Замечание 2.

Определение 2.3 корректно (не зависит от бруса I_1). $A \subset I_1$, $A \subset I_2 \Rightarrow \int\limits_{I_1} \chi_A dx = \int\limits_{I_2} \chi_A dx$

Доказательство.

Предположим, что $A \subset I_1$, $A \subset I_2$. Тогда $A \subset I := I_1 \cap I_2$.

По условию, A - измеримо по Жордану $\overset{T.2.1}{\Rightarrow} \chi_A \in R(I_1)$, $\chi_A \in R(I_2)$, $\chi_A \in R(I)$.

Таким образом, $\underbrace{\exists \int\limits_{I_1} \chi_A dx, \ \exists \int\limits_{I_2} \chi_A dx}_{=?}$, $\exists \int\limits_I \chi_A dx$. Пусть $P(I)$ - произвольное разбиение бруса I с $d(P) = d(P(I))$.

1. Рассмотрим разбиение $P(I_1) = P(I) \cup P(I_1 \setminus \overset{\circ}{I})$ с $d(P(I_1)) \leqslant d(P(I))$ и выбираем метку $\xi^{(1)}$ так, что ее точки $\in I_1 \backslash I$, так что $\chi(\xi^{(1)}) = 0$.

2. Рассмотрим разбиение $P(I_2) = P(I) \cup P(I_2 \setminus \overset{\circ}{I})$ с $d(P(I_2)) \leqslant d(P(I))$ и выбираем метку $\xi^{(2)}$ так, что ее точки $\in I_2 \backslash I$, так что $\chi(\xi^{(1)}) = 0$.

Имеем: $\sigma(\chi_A, P(I_1), \xi^{(1)}) \overset{\text{в силу выбора метки } \xi^{(1)}}{=} \sigma(\chi_A, P(I), \xi) \overset{\text{в силу выбора метки } \xi^{(2)}}{=} \sigma(\chi_A, P(I_2), \xi^{(2)}) \Rightarrow$ перейдем к $\lim\limits_{d(P) \to 0}: \int\limits_{I_1} \chi_A dx = \int\limits_{I_2} \chi_A dx$ ■

Теорема 2.2. *Пусть $A \subset I$. Тогда (A измеримо по Жордану) $\wedge$ $|A| = 0 \Leftrightarrow v(A) = 0$*

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Предположим, что A измеримо по Жордану и $|A| = 0$.

1. Докажем, что $\overset{\circ}{A} = \varnothing$.

От противного: пусть $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in \overset{\circ}{I}(x) \subset I(x) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$ для некоторого бруса $I(x) \Rightarrow$ по условию ($|A| = 0$) $\int\limits_I \chi_A dx = J_{\text{н}}(\chi_A, I)$ (нижний интеграл) $= \sup\limits_P s(\chi_A, I) \overset{\text{т.к. } \chi|_{I(x)}=1}{\geqslant} |I(x)| > 0 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \overset{\circ}{A} = \varnothing$

2. Докажем, что $v(A) = 0$.

По условию, A - измеримо по Жордану $\Rightarrow \mu(\partial A) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0$ т.к ∂A - компакт. Но $\overset{\circ}{A} = \varnothing \Rightarrow A \subset \overset{\circ}{A} \cup \partial A = \partial A$, т.е. $A \subset \partial A \Rightarrow v(A) = 0$

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Предположим, что $v(A) = 0$.

1. Имеем: $v(\partial A) = 0$ (свойство) $\Rightarrow$ $\mu(\partial A) = 0 \Rightarrow A$ - измеримо по Жордану $\overset{T.2.1}{\Rightarrow}$ $\exists |A| = \int\limits_I \chi_A(x)dx = J_{\text{н}}(\chi_A, I) = \sup\limits_P s(\chi_A, I)$

2. Докажем, что $|A| = 0$.

Пусть P - произвольное разбиение бруса I, так что $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$. Тогда $\forall k$, $I_k \not\subset A$ (иначе $v(I_k) = 0$, т.к $v(A) = 0$) $\Rightarrow I_k \cap CA \neq \varnothing \Rightarrow \overset{\inf}{m_k}(\chi_A) = 0$, $\forall k \Rightarrow J_{\text{н}}(\chi_A) = 0 \Rightarrow \underbrace{\int\limits_I \chi_A dx}_{|A|} = 0 \Rightarrow |A| = 0$ ■

Замечание.

$|A|$ также называют объемом A.

Пункт 1.2 Свойства измеримых множеств

Лемма 1.

$A \subset I$, A - измеримо по Жордану $\Rightarrow \overline{A}$ и ∂A измеримы по Жордану.

Доказательство.

1. Имеем: $\partial\overline{A} = \partial A$. По условию, $\mu(A) = 0 = \mu(\partial\overline{A})$.

2. По условию, A - измеримо по Жордану $\Rightarrow \mu(\partial A) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0 \overset{T.1.2\text{ п.1}}{\Rightarrow} \partial A$ - измеримо по Жордану. ■

Теорема 2.3. *Пусть A_1, A_2 - ограничены и измеримы по Жордану $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2$ - измеримы по Жордану.*

Доказательство.

1. Докажем, что $A_1 \cup A_2$ - измеримо по Жордану.

Имеем, по условию, $v(\partial A_1) = v(\partial A_2) = 0$.

Но: $\partial(A_1 \cup A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$ $(*)$. Имеем: $\forall O(x)$, где $x \in \partial(A_1 \cup A_2)$,

$$\begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap (A_1 \cup A_2) \\ \exists x_2 \in O(x) \cap (CA_1 \cap CA_2) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \exists x_1 \in O(x) \cap A_1, \exists x_2 \in O(x) \cap CA_1 \\ \text{или} \\ \exists x_2 \in O(x) \cap A_2, \exists x_2 \in O(x) \cap CA_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in \partial A_1 \\ \text{или} \\ x \in \partial A_2 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in \partial A_1 \cup \partial A_2 \Rightarrow (*)$ (т.к $x \in \partial(A_1 \cup A_2)$ произвольно).

Но, по условию, $\mu(\partial A_1) = \mu(\partial A_2) = 0 \Rightarrow \mu\partial(A_1 \cup A_2) = 0 \Rightarrow A_1 \cup A_2$ - измеримо по Жордану.

2. Докажем, что $\partial(A_1 \cap A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$

Пусть $x \in \partial(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \forall O(x) \begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap (A_1 \cap A_2) \\ \exists x_2 \in O(x) \cap (CA_1 \cup CA_2) \end{cases}$ ... доказывается аналогично. ■

Следствие.

Пусть $A_1, ..., A_N$ - ограничены и измеримы по Жордану. Тогда $\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{N} A_k$ - измеримы по по Жордану.

Определение 2.4. *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$, U, V - открыты, $f : U \to V$, f - биекция. Тогда:*

1) f - гомеморфизм $\overset{def}{\Leftrightarrow} (f \in C(U)) \wedge (f^{-1} \in C(V))$

2) f - диффеоморфизм $\overset{def}{\Leftrightarrow} (f \in C^1(U)) \wedge (f^{-1} \in C^1(V))$

Теорема 2.4. *(Теорема о локальном диффеоморфизме)*

Пусть $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbb{G}$ - открыто, $x^\circ \in \mathbb{G}$, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^m$, $y^\circ = f(x^\circ)$, причем

1) $f \in C^1(\mathbb{G})$

2) $det\ Df(x^\circ) \neq 0$

Тогда $\exists U, V \subset \mathbb{R}^m$, U, V - открытые, т. что $x^\circ \in U$, $y^\circ \in V$, причем

1) $f : U \to V$ $-$ диффеоморфизм

2) $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}, \ \forall x \in U, y = f(x)$

Теорема 2.5. *(Теорема о сохранении измеримости при C^1-отображении)*

Пусть $A \subset \overline{A} \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{G}$ - открытое, A - ограничено и измеримо по Жордану, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{G})$. Тогда $f(A)$ - ограничено и измеримо по Жордану.

Доказательство.

1. $f(A)$ - ограничено. В самом деле, $\overline{A}$ - ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A}$ - компакт $\Rightarrow f(\overline{A})$ - компакт $\Rightarrow f(\overline{A})$ - ограничено $\Rightarrow f(A)$ - ограничено.

2. Докажем, что $f(A)$ - измеримо по Жордану.

A - ограничено $\Rightarrow \exists$ брус I, т. что $\overline{A} \subset I$.

Положим $S := \{x \in \mathbb{G} | \ det\ Df(x) = 0\}$ и $S_A := S \cap \overline{A} \subset I$.

Пусть $x^\circ \in \overset{\circ}{A}$, т. что $det\ Df(x^\circ) \neq 0 \overset{\text{см. } T.2.4}{\Rightarrow} f(x^\circ) \in (f(A))_i$ (образ x° - внутренняя точка образа A

и его внутренности) $\Rightarrow \underbrace{\partial f(A) \subset f(\partial A) \cup f(S_A)}_{(*)}$

Но $\mu(\partial A) = 0$, т.к. A - измеримо по Жордану $\Rightarrow \mu(f(\partial A)) = 0$, т.к. $f \in C^1(\mathbb{G})$.

$\mu(f(S_A)) = 0$ (Т. Сарда, $m = n$) $\overset{\text{см.}(*)}{\Rightarrow} \mu(\partial f(A)) = 0 \Rightarrow f(A)$ - измеримо по Жордану. ■

§2 Интеграл Римана на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$

Пункт 2.1 Определение интеграла Римана на ограниченном множестве в $\mathbb{R}^n$

Предварительное замечание.

$f : A \to \mathbb{R}$, $f \cdot \chi_A := \begin{cases} f(x), \ x \in A \\ 0, \ x \notin A \end{cases}$

Определение 2.5. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset I$ *(т.е.* A *- ограничено),* $f; A \to \mathbb{R}$. *Тогда* $f \in R(A)$ *(*f *интегрируема по Риману)* $\overset{def}{\Leftrightarrow} f \cdot \chi_A \in R(I)$. *При этом* $\int\limits_A f(x)dx := \int\limits_I (f \cdot \chi_A)(x)dx$.

Замечания.

1. $f \in R(A) \Rightarrow f \in B(A)$. В самом деле, $f \cdot \chi_A \in R(I) \Rightarrow f \cdot \chi_A \in B(I) \Rightarrow f \cdot \chi_A = f$ на A, $f \cdot \chi_A \in B(A)$

2. Если $A = I$, то $f\chi_I = f \Rightarrow \int\limits_I f(x)dx = \int\limits_I f(x)\chi_I(x)dx$ по определению 2.5.

Теорема 2.6. *(Корректность определения 2.5)*

Пусть $A \subset I_1$, $A \subset I_2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \cdot \chi_A \in R(I_1)$. *Тогда* $f \cdot \chi_A \in R(I_2)$, *причем* $\int\limits_{I_2} f \cdot \chi_A dx = \int\limits_{I_1} f \cdot \chi_A dx$

Доказательство.

1. Докажем, что $f \cdot \chi_A \in R(I_2)$.

Пусть $I := I_1 \cap I_2$ - брус. Тогда $A \subset I$.

Заметим, что $f \in B(A)$, т.к $f \cdot \chi_A \in R(I_1) \Rightarrow f \cdot \chi_A \in B(I) \Rightarrow f \cdot \chi_A \in B(A)$

Имеем: $E(f \cdot \chi_A) \cap I_1 = E(f \cdot \chi_A) \cap I = E(f \cdot \chi_A) \cap I_2$ $(*)$, где $E(f \cdot \chi_A)$ - множество точек разрыва функции $f \cdot \chi_A$.

Но $f \cdot \chi_A \in R(I_1) \overset{\text{Кр. Л. для } I_1}{\Rightarrow} \mu(E(f \cdot \chi_A) \cap I_1) = 0 \overset{\text{см.}(*)}{\Rightarrow} \mu(E(f \cdot \chi_A) \cap I_2) = 0$, причем $f \cdot \chi_A$ - ограниченная $\overset{\text{Кр. Л. для } I_2}{\Rightarrow} f \cdot \chi_A \in R(I_2)$

2. Рассмотрим произвольное разбиение бруса I и рассмотрим разбиение брусов I_1 и I_2 вида $P(I_j) = P(I) \cup P(I_j \setminus \overset{\circ}{I})$, $j = 1, 2$, с $d(P(I_j)) \leqslant d(P)$.

Заметим, что $f \cdot \chi_A|_{I_2 \setminus I} = f \cdot \chi_A|_{I_1 \setminus I} = 0$. Поэтому, выбирая метки ξ, так что $\xi_k \in \overset{\circ}{I}_k$, получаем

$$\underbrace{\sigma(f \cdot \chi_A, P(I_2), \xi')}_{\underset{d(p)\to 0}{\to} \int\limits_{I_2} f \cdot \chi_A dx} = \sigma(f \cdot \chi_A, P(I), \xi'') = \underbrace{\sigma(f \cdot \chi_A, P(I_1), \xi''')}_{\underset{d(p)\to 0}{\to} \int\limits_{I_1} f \cdot \chi_A dx}$$

Теорема доказана. ■

Замечание.

Пусть A - ограничено, $f \in R(A) \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} A$ - измеримо.

Например, $f(x) := \begin{cases} 0, \ x \in \mathbb{Q} \\ 1, \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad A := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Тогда $f \cdot \chi_A \equiv 0$ на $[0, 1] \Rightarrow f \cdot \chi_A \in R[0, 1] \Rightarrow f \in R(A)$, причем $\int\limits_A f dx = 0$. Но A не измеримо, т.к. $\partial A = [0, 1]$

Теорема 2.7. *(Критерий Лебега)*

Пусть $A \subset I \subset \mathbb{R}^n$, A - измеримо, $f \in B(A)$.

Тогда $f \in R(A) \Leftrightarrow \mu(E(f)) = 0$, где $E(f) = \{x \in A |\ f \notin C(x)\}$

Доказательство.

Заметим, что $E(f) \overset{(*)}{\subset} E(f \cdot \chi_A) \overset{(**)}{\subset} E(f) \cup \partial A$

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $f \in R(A) \Rightarrow f \cdot \chi_A \in R(I) \Rightarrow \mu(E(f \cdot \chi_A) \cap I) = 0$ по Критерию Лебега для бруса I $\overset{\text{см.}(*)}{\Rightarrow} \mu(E(f)) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\mu(E(f)) = 0$. Заметим, что $\mu(\partial A) = 0$, т.к. A - измеримо $\overset{\text{см.}(**)}{\Rightarrow} \mu(E(f \cdot \chi_A)) = 0 \Rightarrow$ $f \cdot \chi_A \in R(I)$ по Критерию Лебега для бруса $I \Rightarrow f \in R(A)$ ■

Пункт 2.2 Свойства интеграла

Лемма 1.

$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$

Доказательство.

Если $A\cap B=\varnothing$, то утверждение Леммы очевидно. Поэтому считаем, что $A\cap B\neq\varnothing$

1. Пусть $x\in A\cup B$. Тогда $\chi_{A\cup B}(x)=1$

1) Если $x\in A\setminus B$, то $\underbrace{\chi_A(x)}_{=1}+\underbrace{\chi_B(x)}_{=0}-\underbrace{\chi_{A\cap B}}_{=0}(x)=1$

2) Если $x\in B\setminus A$, то аналогично

3) Если $x\in A\cap B$, то $\underbrace{\chi_A(x)}_{=1}+\underbrace{\chi_B(x)}_{=1}-\underbrace{\chi_{A\cap B}}_{=1}(x)=1$

2. Пусть $x\notin A\cup B$. Тогда $\chi_{A\cup B}(x)=0$ и, кроме того, $\underbrace{\chi_A(x)}_{=0}+\underbrace{\chi_B(x)}_{=0}-\underbrace{\chi_{A\cap B}}_{=0}(x)=0$ ■

Следствие.

Пусть $A,B\subset I$ (ограничены), A,B - измеримы, $A\cap B=\varnothing$. Тогда $A\cup B$ - измеримо, причем $|A\cup B|=|A|+|B|$

Доказательство.

1. $A\cup B$ измеримо - доказано $\Rightarrow$ по критерю измеримости χ_A, χ_B, $\chi_{A\cup B}\in R(I)$

2. $A\cap B=\varnothing \overset{\text{Л.1}}{\Rightarrow} \chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B \Rightarrow |A\cup B|=\int\limits_I \chi_{A\cup B}dx=\int\limits_I \chi_A dx+\int\limits_I \chi_B dx=|A|+|B|$ ■

Предварительное замечание.

Пусть $f,g\in R(I)$. Тогда $\alpha f+\beta g\in R(I)$, и $\int\limits_I(\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int\limits_I f(x)dx+\beta\int\limits_I g(x)dx$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Доказывается через переход к $\lim\limits_{d(P)\to 0}$ в интегральных суммах

Теорема 2.8. *(Линейность интеграла)*

Пусть $A\subset I$, $f,g\in R(A)$.

Тогда $\alpha f+\beta g\in R(A)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, причем $\int\limits_A(\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int\limits_A f(x)dx+\beta\int\limits_A g(x)dx$ $(*)$

Доказательство.

По условию, $f,g\in R(A)\Rightarrow f\cdot\chi_A,\ g\cdot\chi_A\in R(I)$ $\big(f,g=0$, если $x\notin A\big)\Rightarrow \alpha f\cdot\chi_A+\beta g\cdot\chi_A\in R(I)$

(см. предварительное замечание), причем

$$\underbrace{\int\limits_I (\alpha f \cdot \chi_A + \beta g \cdot \chi_A)(x)dx}_{=\int\limits_A (\alpha f + \beta g)dx} = \alpha \underbrace{\int\limits_I f \cdot \chi_A dx}_{=\int\limits_A \alpha f dx} + \beta \underbrace{\int\limits_I g \cdot \chi_A dx}_{=\int\limits_A \beta g dx} \Rightarrow (*)$$

■

Замечание.

Теорема 2.8 верна для конечного числа функций.

Теорема 2.9. *Пусть* $A \subset I$, $B \subset A$, $\mu(B) = 0$, $f \in R(A)$, $f \equiv 0$ *на* $A \setminus B$. *Тогда* $\int\limits_A f dx = 0$

Доказательство.

По условию, $f \in R(A) \Rightarrow f \cdot \chi_A \in R(I) \Rightarrow \exists \lim\limits_{d(P) \to 0} \sigma(f \cdot \chi_A, P(I, \xi)) = \lim\limits_{d(P) \to 0} \sum\limits_{k=1}^{N} f \cdot \chi_A(\xi_k)|I_k|$.

Но $\mu(I_k) \neq 0 \Rightarrow B \cap I_k \subset\subset I_k$ (строго содержится) $\forall k$, т.к. $\mu(B) = 0 \Rightarrow \exists \xi_k$, т. что $f(\xi_k) = 0$.

Тогда, для выбранных меток $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N)$, $\sigma(f \cdot \chi_A, P(I, \xi)) = 0 \underset{\text{к} \lim\limits_{d(P) \to 0}}{\Rightarrow} \int\limits_I f \cdot \chi_A dx = \int\limits_A f dx = 0$ ■

Следствие.

Пусть A - ограничено, $B \subset A$, $\mu(B) = 0$, $f, g \in R(A)$, $f \equiv g$ на $a \setminus B$. Тогда $\int\limits_A f dx = \int\limits_A g dx$

Замечание.

Пусть A - ограничено, $B \subset A$, $\mu(B) = 0$, $f \in R(A)$, $f \equiv g$ на $A \setminus B \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} g \in R(A)$.

Например, $A = [0, 1]$, $f \equiv 1 \Rightarrow f \in R[0, 1]$.

$g(x) := \begin{cases} 0, \ x \in \mathbb{Q} \\ 1, \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $B := \mathbb{Q} \cap [0, 1] \Rightarrow \mu(B) = 0$. При этом $f \equiv g \equiv 1$ на $A \setminus B$. Но $g \notin R[0, 1]$.

Теорема 2.10. *(Интегрируемость произведения)*

Пусть $A \subset I$, $f, g \in R(A)$. *Тогда* $f \cdot g \in R(A)$.

Доказательство.

Надо доказать, что $f \cdot g \cdot \chi_A \in R(I)$.

1. Имеем: $F := f \cdot \chi_A \in R(I)$ и $G := g \cdot \chi_A \in R(I)$ по условию. Причем $f \cdot g \cdot \chi_A = f \cdot g \cdot \chi_A^2 = (f \cdot \chi_A)(g \cdot \chi_A) = F \cdot G$. Поэтому достаточно доказать, что $F \cdot G \in R(I)$

2. $F, G \in R(I) \Rightarrow F, G \in B(I) \Rightarrow F \cdot G \in B(I)$.

3. Пусть $x \in I$, т. что $F \in C(x)$, $G \in C(x) \Rightarrow F \cdot G \in C(x) \Rightarrow E(F \cdot G) \subset E(F) \cup E(G)$ (мн-во точек разрыва). Но $\mu(E(F)) = \mu(E(G)) = 0$ (Кр. Лебега, т.к $F, G \in R(I)$ и $F, G \in B(I)$) $\Rightarrow \mu(E(F) \cup E(G)) = 0 \Rightarrow (F \cdot G) \overset{\text{Кр. Л.}}{\Rightarrow} F \cdot G \in R(I)$. ■

Теорема 2.11. *(Аддитивность интеграла)*

Пусть $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k$, $A_k \subset I$, $A_k \cap A_e = \varnothing$, $k \neq e$, $f \in R(A_k)$, $\forall k$.

Тогда $f \in R(A)$, *причем* $\int\limits_A f dx = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{A_k} f dx \ (*)$

Доказательство.

1. Имеем: $f \cdot \chi_{A_k} \in R(I)$ и $\chi_A = \sum\limits_{k=1}^{m} \chi_{A_k}$ (т.к. $A_k \cap A_e = \varnothing$, $k \neq e$) $\Rightarrow f \cdot \chi_A = \sum\limits_{k=1}^{m} f \cdot \chi_{A_k} \in R(I) \Rightarrow$ $f \in R(A)$.

2. Причем $\underbrace{\int\limits_I f\chi_A dx}_{\int\limits_A f dx} = \sum\limits_{k=1}^{m} \underbrace{\int\limits_I f\chi_{A_k} dx}_{\int\limits_{A_k} f dx} \Rightarrow (*)$ ■

Теорема 2.12. *(Интеграл по подмножеству)*

Пусть $B \subset A \subset I$, B *- измеримо,* $f \in R(A)$. *Тогда* $f \in R(B)$.

Доказательство.

Надо доказать, что $f \cdot \chi_B \in R(I)$.

Но $\chi_B = \chi_A \cdot \chi_B \Rightarrow f \cdot \chi_B = \underbrace{(f \cdot \chi_A)}_{\in R(I)} \cdot \chi_B$ и $\chi_B \in R(I)$ (т.к. B - измеримо) $\Rightarrow (f \cdot \chi_A) \cdot \chi_B \in R(I) \Rightarrow$

$f \in R(B)$ ■

Следствие.

Пусть $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k$, $A_k \subset I$, $A_k \cap A_e = \varnothing$, $k \neq e$, A_k - измеримо $\forall k = \overline{1, m}$ и $f \in R(A)$.

Тогда $f \in R(A_k)$ $\forall k$ и верно, что $\int\limits_A f dx = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{A_k} f dx$

Пункт 2.3 Оценки интеграла

Теорема 2.13. *Пусть* $A \subset I$, $f \in R(A)$, $f \geqslant 0$ *на* $A \Rightarrow \int\limits_A f dx \geqslant 0$

Доказательство.

$f \in R(A) \Rightarrow \exists \int\limits_A f dx = \int\limits_I f \cdot \chi_A dx = \lim\limits_{d(P) \to 0} \sigma(f \cdot \chi_A, P(I, \xi)) \geqslant 0$ ■

Следствия.

1. Пусть $A \subset I$, $f, g \in R(A)$, $f \leqslant g$ на A. Тогда $\int\limits_A f dx \leqslant \int\limits_A g dx$.
2. Пусть $A \subset I$, A - измеримо, $f \in R(A)$, $m := \inf\limits_A f$, $M := \sup\limits_A f$. Тогда $m \cdot |A| \leqslant \int\limits_A f(x) dx \leqslant M \cdot |A|$.
3. Пусть $A, B \subset I$, A, B - измеримы, $A \subset B$. Тогда $|A| \leqslant |B|$.

Теорема 2.14. *Пусть* $A \subset I$, A *- измеримо,* $f \in R(A)$.

Тогда $|f| \in R(A)$, *причем* $|\int\limits_A f(x)dx| \leqslant \int\limits_A |f(x)|dx$ $(*)$

Доказательство.

1. Докажем, что $|f| \in R(A)$.

Имеем: $\Big||f(x)| - |f(y)|\Big| \leqslant |f(x) - f(y)| \Rightarrow \Big[f \in C(x) \Rightarrow |f| \in C(x)\Big] \Rightarrow E(|f|) \subset E(f)$.

Но $\mu(E(f)) = 0$ (по Кр. Лебега, т.к. $f \in R(A)$, A - измеримо) $\Rightarrow \mu(E(|f|)) = 0 \Rightarrow |f| \in R(A)$ (т.к. A - измеримо, $|f| \in B(A)$).

2. Докажем $(*)$.

Имеем: $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ на $A \overset{T.2.13}{\Rightarrow} (*)$ ■

Следствия.

1. Пусть $M := \sup\limits_A |f|$ и выполнены условия Теоремы 2.14.

Тогда $|\int\limits_A f dx| \leqslant \int\limits_A |f|dx \leqslant M\int\limits_A 1dx = M\int \underbrace{{}_I\chi_A dx}_{|A|} = M|A|$ (т.к. A - измеримо).

2. Пусть $A \subset I$, $|A| = 0$, $f \in B(A)$. Тогда $f \in R(A)$, причем $\int\limits_A f(x)dx = 0$

Доказательство.

Докажем второй пункт. По условию $|A| = 0 \Rightarrow v(A) = 0 \Rightarrow v(\overline{A}) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0 \Rightarrow A$ - измеримо.

Имеем: $E(f) \subset A$ - множество точек разрыва f на $A \Rightarrow \mu(E(f)) = 0 \overset{\text{Кр.Л.}}{\Rightarrow} f \in R(A)$

$|\int\limits_A f dx| \leqslant M|A| = 0$ ($M := \sup\limits_A f$) ■

Теорема 2.15. *Пусть* $A \subset \overset{\circ}{I}$, $f \geqslant 0$ *на* A, $f \in R(A)$, *причем* $\int\limits_A f(x)dx = 0$. *Тогда* $\mu(B) = 0$, *где* $B := \{x \in A |\ f(x) > 0\}$

Доказательство.

1. Пусть $F := f \cdot \chi_A$. Тогда $B = \{x \in \overset{\circ}{I} |\ F > 0\}$.

По условию, $F \in R(I)$, F - ограничена, т.к. f - ограничена (т.к. $f \in R(A)$).

Тогда по Критерию Лебега $\mu(E(F) \cap I) = 0 \Rightarrow \mu(E(F) \cap \overset{\circ}{I}) = 0 \Rightarrow$ достаточно доказать, что $B \subset E(F) \cap \overset{\circ}{I}$ или $CB \supset C(E(F) \cap \overset{\circ}{I}) = C(E(F)) \cup C(\overset{\circ}{I})$ $(*)$

2. Пусть $x \in C(E(F)) \cup C(\overset{\circ}{I})$

   1) Если $x \in C(\overset{\circ}{I}) \Rightarrow x \notin \overset{\circ}{I} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow (*)$

   2) Если $x \notin E(F)$. Докажем, что $x \notin B$.

   От противного: предположим, что $x \in B \Rightarrow F(x) = f(x) =: c > 0$ (по условию на B),

$x \in \overset{\circ}{I} \Rightarrow \exists$ брус $I_1(x) \subset \overset{\circ}{I}$, $x \in I_1(x)$, т. что $F > \dfrac{c}{2}$ на $I_1(x)$.

Тогда, по условию,

$$0 = \int\limits_A f dx = \int\limits_I f \cdot \chi_A dx = \int\limits_I F(x) dx \overset{\text{Адд-ть}}{\underset{\text{инт-ла}}{=}} \underbrace{\int\limits_{I_1(x)} F dx}_{\geqslant \frac{c}{2}|I_1(x)|} + \underbrace{\int\limits_{I \setminus I_1(x)} F dx}_{\geqslant 0} > 0$$

$\int\limits_{I\setminus I_1(x)} F dx \geqslant 0$ т.к. $f \geqslant 0$ на A, по условию, $\Rightarrow f \cdot \chi_A \geqslant 0$ на $I \setminus I_1(x) \Rightarrow$ Теорема 2.13.
Тогда $0 > 0$ - противоречие $\Rightarrow x \notin B$.

■

Следствия.

1. Пусть $f \in R(I)$, $f > 0$ на I. Тогда $\int\limits_I f dx > 0$.

Доказательство.

В самом деле, из Теоремы 2.15 $\Rightarrow \int\limits_I f(x) \geqslant 0$. Докажем, что $\int\limits_I f(x) dx > 0$.

От противного: предположим, что $\int\limits_I f dx = 0 \overset{T.2.15}{\Rightarrow} \mu(I) = 0 \Rightarrow$ противоречие, т.к. $\mu(I) \neq 0$ ■

2. Пусть $A \subset I$, A - измеримо и открыто, $f \geqslant 0$ на A, $f \in C(A)$, $f \in R(A)$, причем $\int\limits_A f dx = 0$. Тогда $f \equiv 0$ на A.

Доказательство.

От противного: $\exists x \in A$, т. что $f(x) > 0 \overset{A\text{ - откр.}}{\Rightarrow} \exists I_1(x)$, т. что $x \in \overset{\circ}{I}_1(x) \in A$.
Тогда $f \in R(I_1)$ и $f \in R(A \setminus I_1) \overset{\text{Адд-ть}}{\underset{\text{инт-ла}}{\Rightarrow}} \int\limits_A f dx = \underbrace{\int\limits_{I_1(x)} f dx}_{>0} + \underbrace{\int\limits_{A \setminus I_1(x)} f dx}_{\geqslant 0,\text{ т.к. } f \geqslant 0 \text{ на } A} > 0 \Rightarrow$ противоречие. ■

3. Пусть A - измеримо и открыто, $f \in C(A)$, $\int\limits_I f dx = 0\ \forall I \subset A$. Тогда $f \equiv 0$ на A.

Доказательство.

От противного: $\exists x \in A$, т. что $f(x) \neq 0$, не ограничивая общности, считаем, что $f(x) =: c > 0$. Но $f \in C(x)$ по условию $\Rightarrow \exists I_1(x) \subset A$, т. что $f \geqslant \dfrac{c}{2}$ на $I_1 \Rightarrow \int\limits_{I_1} f(x) dx \geqslant \dfrac{c}{2}|I_1| > 0 \Rightarrow$ противоречие условиям. ■

§3 Теорема Фубини для бруса

Теорема 2.16. *(Теорема Фубини для брусов)*

Пусть $I^m \subset \mathbb{R}^m$, $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $I = \underset{x \in I^m}{I^m} \times \underset{y \in I^n}{I^n}$ *- брусы, и пусть* $f \in R(I)$*. Введем обозначения* ($x \in I^m$)

1) $J_н(x) := J_н(f(x, \cdot))$

2) $J_в(x) := J_в(f(x, \cdot))$

Тогда $J_н, J_в \in R(I^m)$*, причем*

1) $J := \int\limits_I f(x,y)dxdy = \int\limits_{I^m} J_н(f(x,\cdot))dx = \int\limits_{I^m} J_н(x)dx \quad (1)$

2) $J = \int\limits_{I^m} J_в(f(x,\cdot))dx = \int\limits_{I^m} J_в(x)dx \quad (2)$

Доказательство.

Докажем 1 (равенство 2 доказывается аналогично).

1. Пусть $P = P^m \times P^n$ - произвольное разбиение бруса I, где P^m и P^n - разбиения брусов I^m и I^n соответственно, т. что $I^m = \bigcup\limits_{i=1}^{N_m} I_i^m$, $I^n = \bigcup\limits_{j=1}^{N_n} I_j^n$. Тогда $I = \bigcup\limits_{i=1}^{N_m}\bigcup\limits_{j=1}^{N_n} I_i^m \times I_j^n$.

Обозначения:

1) $m_{ij} := \inf\limits_{I_i^m \times I_j^n} f$

2) $m_j(x) := \inf\limits_{I_j^n} f(x,\cdot) \left(= \inf\limits_{y \in I^m} f(x,y) \right)$

3) $M_{ij} := \sup\limits_{I_i^m \times I_j^n} f$

4) $M_j(x) := \sup\limits_{I_j^n} f(x,\cdot) \left(= \sup\limits_{y \in I^m} f(x,y) \right)$

Заметим:

1. $m_{ij} \leqslant m_j(x)\ \forall x \in I_i^m \Rightarrow m_{ij} \leqslant \inf\limits_{x \in I_i^m} m_j(x) \quad (3)$

Аналогично $M_{ij} \leqslant M_j(x)\ \forall x \in I_i^m \Rightarrow M_{ij} \geqslant \sup\limits_{x \in I_i^m} M_j(x) \quad (4)$

2. По условию $f \in R(I) \Rightarrow \exists \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P,f) = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(f,P) = J$ (S и s - верхние и нижние суммы).

Имеем:

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{N_m}\sum_{j=1}^{N_n}m_{ij}|I_i^m\times I_j^n|\overset{\text{см.}(3)}{\leqslant}\sum_{i=1}^{N_m}\inf_{x\in I_i^m}\left(\sum_{j=1}^{N_n}m_j(x)|I_j^n|\right)\cdot|I_i^m|\leqslant\sum_{i=1}^{N_m}\left(\inf_{x\in I_i^m}J_{\text{н}}(x)\right)\cdot|I_i^m|=s(J_{\text{н}})\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N_m}\left(\sup_{x\in I_i^m}J_{\text{н}}(x)\right)\cdot|I_i^m|=S(J_{\text{н}})\leqslant\sum_{i=1}^{N_m}\left(\sup_{x\in I_i^m}J_{\text{в}}(x)\right)\cdot|I_i^m|\leqslant\sum_{i=1}^{N_m}\sup_{x\in I_i^m}\left(\sum_{j=1}^{N_n}M_j(x)|I_j^n|\right)|I_j^m|\overset{\text{см.}(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N_m}\sum_{j=1}^{N_n}M_{ij}|I_i^m\times I_j^n|=S(f,P)$$

В итоге:

$$s(f,P)\leqslant s(J_{\text{н}}(x))\leqslant S(J_{\text{н}}(x))\leqslant S(f,P)\quad(6)$$

2. Из (6) получим:

$$\Omega(J_{\text{н}})=S(J_{\text{н}})-s(J_{\text{н}})\overset{\text{см.}(6)}{\leqslant}S(f,P)-s(f,P)=\Omega(f,P)\underset{d(P)\to0}{\to}0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Omega(J_{\text{н}},P_i)\underset{d(P)\to0}{\to}0\Rightarrow J_{\text{н}}\in R(I^m)$$

3. Кроме того, переход в (6) к $\lim\limits_{d(P)\to0}$ дает:

$$J\leftarrow s(f,P)\leqslant s(J_{\text{н}})\leqslant S(J_{\text{н}})\leqslant S(f,P)\to J\Rightarrow\int\limits_{I^m}J_{\text{н}}(x)=\lim_{d(P)\to0}S(J_{\text{н}})=\lim_{d(P)\to0}s(J_{\text{н}})=J\Rightarrow(1)$$

Равенство (2) доказывается аналогично. ■

Следствие.

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16. Тогда $\exists J(x):=\int\limits_{I^n}f(x,y)dy$ почти всюду в I^m

Доказательство.

1. Пусть $B=\{x\in I^m|\ J_{\text{в}}(x)>J_{\text{н}}\}$.

Имеем из Т.2.16: $J_{\text{н}},J_{\text{в}}\in R(I^m)$ (заметим, что $J_{\text{в}}-J_{\text{н}}\geqslant0$ на I^m) и, кроме того

$$\int\limits_{I^m}\underbrace{(J_{\text{в}}(x)-J_{\text{н}}(x))}_{\geqslant0}dx=0\overset{T.2.15}{\Rightarrow}\mu(B)=0$$

2. Пусть $x \in I^m \setminus B$. Тогда $J_в(x) = J_н(x) \overset{\text{Кр. Дарбу}}{\Rightarrow} \exists J(x) = \int\limits_{I^n} f(x,y)dy$ ■

Замечания.

1. Пусть $f \in R(I)$ и $\exists \int\limits_{I^n} f(x,y)dy \ \forall x \in I^m \setminus B$, где $|B| = 0$.

Тогда $\int\limits_I f(x,y)dxdy = \int\limits_{I^m} dx \int\limits_{I^n} f(x,y)dy$ (7) (Камынин, стр. 318).

2. Пусть $f \in R(I) \overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow}$ (7) (Камынин, стр. 319)

Теорема 2.17. *(Теорема Фубини для цилиндроидов)*

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω *- ограничена и измерима,* $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n=1} |\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x),\ x \in \mathring{\Omega}\}$, $\varphi_i \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$, *и пусть* $f \in C(\overline{A})$.

Тогда $f \in R(\overline{A})$, *причем* $\int\limits_A f(x,y)dxdy = \int\limits_{\overline{\Omega}} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ (8)

Доказательство.

1. Докажем, что A - измеримо в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $f \in R(A)$.

Имеем: $\exists [c,d]$, т. что $c \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant d$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

Следовательно $\partial A \subset \Gamma(\varphi_1, \overline{\Omega}) \cup \Gamma(\varphi_2, \overline{\Omega}) \cup (\partial\Omega \times [c,d])\}$. По Теореме 1.7 мера графика непрерывной функции равна нулю $\Rightarrow \mu(\Gamma(\varphi_1, \overline{\Omega})) = \mu(\Gamma(\varphi_2, \overline{\Omega})) = 0$. Проверим, что $\mu(\partial\Omega \times [c,d]) = 0$.

По условию, $\mu(\partial\Omega) = 0 \Rightarrow |\partial\Omega| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \{I_k^n,\ k = \overline{1,k}\}$, т. что $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{k=1}^{l} I_k^n$,

$\sum\limits_{k=1}^{l} |I_k^n| < \dfrac{\varepsilon}{d-c} \Rightarrow \partial\Omega \times [c,d] \subset \sum\limits_{k=1}^{l} \underbrace{\left(I_k^n \times [c,d]\right)}_{=:I_k^{n+1}}$, причем $\sum\limits_{k=1}^{l} |I_k^{n+1}| < \dfrac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow v(\partial\Omega \times [c,d] = 0) \Rightarrow \mu(\partial\Omega \times [c,d] = 0) = 0 \Rightarrow \mu(\partial A) = 0 \Rightarrow A$ - измеримо $\overset{\text{Кр.Л.}}{\Rightarrow} f \in R(A)$.

2. Положим $A(x) := \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} |\ \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)\},\ x \in \overline{\Omega} \\ \varnothing,\ x \notin \overline{\Omega} \end{cases}$

Тогда $\chi_A(x,y) = \chi_{\overline{\Omega}}(x) \cdot \chi_{A(x)}(y)$. (9)

Пусть $\Omega \subset I^n$. По Теореме 2.16

$$\int\limits_A f(x,y)dxdy = \int\limits_{I^n \times [c,d]} \chi_A \cdot f(x,y)dxdy \overset{\text{см.(7) и (9)}}{=} \int\limits_{I^n} \chi_{\overline{\Omega}}(x)dx \int\limits_c^d \chi_{A(x)}(y) f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\overline{\Omega}} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \Rightarrow (8)$$

■

§4 Замена переменных в кратном интеграле

Напоминание.

Пусть $\Omega_t \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega_t \to \Omega_x$, $\psi : \Omega_x \to \mathbb{R}^k$, причем $\varphi \in D(t^\circ)$, $t^\circ \in \Omega_t$; $\psi \in D(x^\circ)$, $x^\circ = \varphi(t^\circ) \in \Omega_t$.

Тогда $\psi \circ \varphi \in D(t^\circ)$, и справедлива формула $(\psi \circ \varphi)'(t^\circ) = \psi'(x^\circ)\varphi'(t^\circ)$, где

$$\psi' := D\psi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k\times n}, \text{ а } \varphi' := D\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Утверждение.

Пусть $\Omega_t, \Omega_x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega_t \to \Omega_x$ - диффеоморфизм. Тогда $|\varphi'(t)| := det\ \varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in \Omega_t$.

Доказательство.

По условию: $(\varphi^{-1} \circ \varphi)(t) = t \Rightarrow 1 = |(\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t)| = |(\varphi^{-1})'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|$. ■

Пункт 4.1 Замена переменных в одномерном интеграле Римана

Теорема 2.18. *(см. II сем.)*

Пусть $\varphi \in D[\alpha,\beta]$, $\varphi' \in R[\alpha,\beta]$, $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, $\varphi \upuparrows$ *(или* $\downdownarrows$*) на* $[\alpha,\beta]$, *причем* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *(или* $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$*),* $f \in R[a,b]$.

Тогда $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in R[\alpha,\beta]$, *причем* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dx$ *(1)*

Теорема 2.19. *Пусть* $I_t, I_x \subset \mathbb{R}$, $\varphi : I_t \to I_x$ *- диффеоморфизм,* $f \in R(I_x)$.

Тогда $(f \circ \varphi) \underbrace{|\varphi'|}_{\text{модуль}} \in R(I_t)$, *причем* $\int\limits_{I_x} f(x)dx = \int\limits_{I_t} (f \circ \varphi)|\varphi'|dt$ *(2)*

Доказательство.

Все условия Теоремы 2.18 выполнены, причем $\varphi' > (<)0$ на $I_t \Rightarrow \varphi \upuparrows (\downdownarrows)$ на $I_t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt = \begin{cases} \int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt, \text{ если } \varphi \upuparrows \\ -\int\limits_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt, \text{ если } \varphi \downdownarrows \end{cases}$$ ■

Теорема 2.20. *Теорема 2.19 верна для нижних (верхних) интегралов.*

Доказательство - Зорич, 2 том, стр. 168.

Пункт 4.2 Замена переменной в случае простейшего диффеоморфизма

Лемма.

Пусть Ω_t, Ω_x - открытые и ограниченные в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega_t \to \Omega_x$ - диффеоморфизм. Тогда:

1) $A \subset \Omega_t$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(\varphi(A)) = 0$
2) $A \subset \overline{A} \subset \Omega_t$, $|A| = 0 \Rightarrow |\varphi(A)| = 0$
3) $A \subset \overline{A} \subset \Omega_t$, A - измеримо $\Rightarrow \varphi(A)$ - измеримо

Доказательство.

1) Следует из Теоремы 1.4
2) Пусть $|A| = 0$, $A \subset \overline{A} \subset \Omega_t \Rightarrow |\overline{A}| = 0 \Rightarrow \mu(\overline{A}) = 0 \Rightarrow \mu(\varphi(\overline{A})) = 0$ (в силу 1.). Но $\overline{A}$ - ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A}$ - компакт $\Rightarrow \varphi(\overline{A})$ - компакт $\Rightarrow |\varphi(\overline{A})| = 0$ (т.к. $\mu(\varphi(\overline{A})) = 0$) $\Rightarrow |\varphi(A)| = 0$
3) По условию $A \subset \overline{A} \subset \Omega_t$, A - измеримо $\Rightarrow |\partial A| = 0$. Но $\varphi : \overline{A} \to \varphi(\overline{A})$, $\varphi(\partial A) = \partial(\varphi(A))$, т.к. $\varphi(\dot{A}) = (\varphi(A))_i \overset{\text{см.2)}}{\Rightarrow} |\partial((\varphi(A))| = 0 \Rightarrow \varphi(A)$ - измеримо.

■

Определение 2.6. *Пусть $\Omega_t, \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ - открытые. Отображение $\varphi : \Omega_t \to \Omega_x$ называется простейшим диффеоморфизмом $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ φ - диффеоморфизм, причем*

$\exists k \in \{1, ..., n\}$, *т. что* $\begin{cases} \varphi_1(t) = t_1 \\ \dots \\ \varphi_{k-1}(t) = t_{k-1} \\ \varphi_k : t \in \Omega_t \to \varphi_k(t) \in \Omega_x \\ \varphi_{k+1}(t) = t_{k+1} \\ \dots \\ \varphi_n(t) = t_n \end{cases}$

Замечание.

В случае этого определения, $det\ D\varphi(t) = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial t_k}$.

Теорема 2.21. *(Замена переменной в случае простейшего диффеоморфизма)*

Пусть B_t - открытый шар в $\mathbb{R}^n$, Ω_x - открытое и ограниченное в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : B_t \to \Omega_x$ - простейший диффеоморфизм, $f \in R(\Omega_x)$.

Тогда $(f \circ \varphi)|det\ D\varphi| \in R(B_t)$, причем

$$\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{B_t} (f \circ \varphi)|det\ D\varphi|(t)dt \quad (1)$$

Доказательство.

Не ограничивая общности, считаем $k = n$.

1. Имеем: $Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \Rightarrow det\ D\varphi = \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_n}$

2. Обозначим $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$, $t' = (t_1, ..., t_{n-1})$, $\overline{x}$ - фиксированный x.

Положим $\Omega_{x_n}(\overline{x}') := \{(x', x_n) \in \Omega_x |\ x' = \overline{x}'\}$, $B_{t_n}(\overline{t}') := \{(t', t_n) \in B_t |\ t' = \overline{t}'\}$ - одномерные сечения Ω_x и B_t прямыми, параллельными x_n и t_n соответственно.

Заметим, что $\Omega_{x_n}(\overline{x}') = \varphi(B_{t_n}(\overline{t}'))$.

3. Ω_x - ограничено $\Rightarrow \exists$ брус $I_x \supset \Omega_x$, $I_x = I^{n-1} \times I_{x_n}$.

И B_t - ограничено $\Rightarrow \exists$ брус $I_t \supset B_t$, $I_t = I^{n-1} \times I_{t_n}$. Тогда:

$$\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{I_x} f \cdot \chi_{\Omega_x}(x)dx \overset{T.2.16}{=} \int\limits_{I^{n-1}} dx' \underbrace{\int\limits_{I_{x_n}} f(x', x_n) \cdot \chi_{\Omega_x}(x', x_n)dx}_{:=\text{нижний интеграл Дарбу}} = \int\limits_{I^{n-1}} dx' \underbrace{\int\limits_{\overline{\Omega}_{x_n}(x')} f(x', x_n) \cdot \chi_{\Omega_x}(x', x_n)dx}_{\text{нижний интеграл}} =$$

$$= \int\limits_{I^{n-1}} dt' \int\limits_{\overline{\Omega}_{x_n}(t')} f(t', x_n) \cdot \chi_{\Omega_x}(t', x_n)dx_n \overset{T.2.20}{=} \int\limits_{I^{n-1}} dt' \int\limits_{\overline{B}_{t_n}(t')} f \circ \varphi(t', t_n) \cdot \chi_{\Omega_{B_t}}(t', t_n) \cdot \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n}(t', t_n)\right| dt_n =$$

$$= \int\limits_{I^{n-1}} dt' \int\limits_{I_{t_n}} f \circ \varphi(t', t_n) \cdot \chi_{\Omega_t}(t', t_n) \cdot \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n}(t', t_n)\right| dt_n \overset{T.2.16}{=} \int\limits_{I_t} (f \circ \varphi)|D\varphi|(t)\chi_{\Omega_t}(t)dt = \int\limits_{\Omega_t} (f \circ \varphi)|D\varphi|(t)dt$$

∎

Пункт 4.3 Замена переменной для финитной функции

Лемма 1.

Пусть $\Omega_\tau, \Omega_t, \Omega_x$ - открытые и ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$. Даны отображения $\psi : \Omega_\tau \to \Omega_t$ и $\varphi : \Omega_t \to \Omega_x$ - два диффеоморфизма. Тогда если:

1) $\forall f \in R(\Omega_x)$, $(f \circ \varphi) \cdot |det\ D\varphi| \in R(\Omega_t)$, причем $\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{\Omega_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |det\ D\varphi|(t)dt$

2) $\forall g \in R(\Omega_t)$, $(g \circ \psi) \cdot |det\ D\psi| \in R(\Omega_\tau)$, причем $\int\limits_{\Omega_t} g(t)dt = \int\limits_{\Omega_\tau} (g \circ \psi)(t) \cdot |det\ D\varphi|(\tau)d\tau$

то $(f \circ (\varphi \circ \psi)) \cdot |det\ d(\varphi \circ \psi)| \in R(\Omega_\tau)$, причем $\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{\Omega_\tau} (f \circ (\varphi \circ \psi))(t) \cdot |det\ D(\varphi \circ \psi)(\tau)|d\tau$

Доказательство - Зорич, 2 том, стр. 171.

Определение 2.7. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω - открытое в $\mathbb{R}^n$, $A := \{x \in \Omega |\ f(x) \neq 0\}$. Тогда:*

1) f - финитна в $\Omega \overset{def}{\Leftrightarrow} \overline{A} \subset \Omega$

2) Множество $\overline{A}$ называется носителем функции f и обозначается $\overline{A} =: supp\ f$

Напоминание.

φ - диффеоморфизм. Тогда $\begin{cases} 1.\ \mu(\Omega) = 0 \Rightarrow \mu(\varphi(\Omega)) = 0 \\ 2.\ |v(\Omega)| = 0 \Rightarrow |\varphi(\Omega)| = 0 \\ 3.\ A \subset \overline{A} \subset \Omega, A - \text{ измеримо } \Rightarrow \varphi(A) - \text{ измеримо} \end{cases}$

Лемма 2.

Пусть Ω_t, Ω_x - открытые и ограниченные множества в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega_t \to \Omega_x$ - диффеоморфизм, $f \in R(\Omega_x)$, f - финитна. Тогда $g := (f \circ \varphi)|det\ D\varphi| \in R(\Omega_t)$.

Доказательство.

Пусть $I_t \supset \Omega_t$. Достаточно доказать, что $\mu(E(g \cdot \chi_{\Omega_t}, I_t)) = 0$ (1)

1. Положим $K_x := supp\ f \subset \Omega_x$ (компактное, т.к замкнутое и ограниченное) и $K_t := supp\ g$

Докажем, что $K_t = \varphi^{-1}(K_x)$ (2)

В самом деле, пусть $A_x := \{x \in \Omega_x |\ f(x) \neq 0\}$, $A_t := \{t \in \Omega_t |\ g(t) \neq 0\}$.

Тогда: $t \in A_t \Leftrightarrow g(t) \neq 0 \Leftrightarrow (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(t) \in A_x \Leftrightarrow t \in \varphi^{-1}(A_x) \Rightarrow (2)$

2. Из равенства (2) $\Rightarrow K_t \in \Omega_t \Rightarrow K_t \subset\subset \Omega_t$.

Поэтому для $I_t \supset \Omega_t$ имеем: $E(g \cdot \chi_{\Omega_t}, I_t) = E(g, K_t) \overset{\text{см.}(2)}{=} \varphi^{-1}(E(f, K_x)) = \varphi^{-1}(E(f \cdot \chi_{\Omega_x}, \underbrace{I_x}_{\supset \Omega_x}))$

Но $\mu(E(f \cdot \chi_{\Omega_x}, I_x)) = 0$, т.к. $f \in R(\Omega_x)$ - Кр. Лебега для $f \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(E(g \cdot \chi_{\Omega_t}, I_t)) = \mu(\varphi^{-1}(E(f \cdot \chi_{\Omega_x}, I_x))) = \mu(E(f \cdot \chi_{\Omega_x}, I_x)) = 0 \Rightarrow (1)$ ■

Лемма 3 (Разложение диффеоморфизма в композицию простейших диффеоморфизмов)

Пусть Ω - открытое в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ - диффеоморфизм.

Тогда $\forall x \in \Omega\ \exists B(x, \delta(x)) \subset \Omega$, т. что $\varphi = \psi_1 \circ ... \circ \psi_m$ в $B(x, \delta(x))$, где ψ_k - простейшие диффеоморфизмы.

Доказательство - Зорич,1 том, стр. 589.

Теорема 2.22. *(Замена переменной для финитной функции)*

Пусть выполнены все условия Леммы 2. Тогда $\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{\Omega_t} g(t)dt$ *(3)*

Доказательство.

1. Пусть $K_t := supp\ g \Rightarrow K_t$ - компакт, $K_t \subset\subset \Omega_t$.

Имеем: из Леммы 3 следует: $\forall t \in K_t\ \exists B(t, \delta(t)) \subset \Omega_t$, т. что $\varphi = \psi_1 \circ ... \circ \psi_m$ - простейшие диффеоморфизмы в $B(t, \delta(t))$.

Тогда $K_t \subset \bigcup\limits_{t \in K_t} B(t, \frac{\delta(t)}{2}) \overset{K_t\text{ - компакт}}{\Rightarrow} \exists$ конечное подпокрытие $\{B_t := B(t_l, \frac{\delta(t_l)}{2}),\ l = \overline{1, L}\}$, т. что $K_t \subset \bigcup\limits_{l=1}^{L} B_l$.

Положим $\delta := \min\limits_{l=1,...,L} \dfrac{\delta(t_l)}{2}$. Рассмотрим произвольный брус I, т. что $I \cap K_t \neq 0$, $d(I) < \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$.

Тогда утверждается, что $I \subset B_{l_k}$ для некоторого $l_k \in \{1, ..., L\}$ (4)

В самом деле, пусть $t^\circ \in I \cap K_t$ и $t^\circ \in I \cap B_{l_k}$ для некоторого l_k. И пусть $t \in I$ - произвольно

$\Rightarrow |t - t^\circ| = \sqrt{(t_1 - t_1^\circ)^2 + \dots} \leqslant \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots} \leqslant d(I)\sqrt{n} < \dfrac{\delta}{\sqrt{n}}\sqrt{n} \leqslant \delta_{l_k} \Rightarrow |t - t_l| < \delta_{l_k} \Rightarrow$
$\Rightarrow t \in B_{l_k} \Rightarrow (4)$

2. Пусть $I_t \supset \Omega_t$, $P(I_t)$ - произвольное разбиение бруса I_t с $d(P(I_t)) < \min\{\frac{\delta}{\sqrt{n}}, d\}$, где
$d := \rho(K_t, \partial\Omega_t) = \min |t_1 - t_2|$ $(t_1 \in K_t,\ t_2 \in \partial\Omega_t)$
Имеем: $I_t = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k \Rightarrow \overset{\text{Л.2}}{\exists} \int\limits_{\Omega_t} g(t)dt = \int\limits_{I_t} g \cdot \chi_{\Omega_t} dt = \sum\limits_{s=1}^{S} \int\limits_{I_{k_s}} g \cdot \chi_{\Omega_t} dt$, где $I_{k_s} \cap K_t \neq \varnothing$.
Но $I_{k_s} \subset \Omega_t \Rightarrow \varphi(I_{k_s})$ - измеримо (т.к. I_{k_s} - измеримый) и $\varphi(I_{k_s}) \subset \Omega_x$.
Положим $A := \bigcup\limits_{s=1}^{S} \varphi(I_{k_s})$ - измеримо и компакт, причем $K_x := \underbrace{supp\ f}_{=\varphi(K_t)(\text{Л.2})} \subset A \subset\subset \Omega_x$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega_x} f dx = \int\limits_{I_x} f \cdot \chi_{\Omega_x} dx = \int\limits_{A} f \cdot \chi_{\Omega_x} dx + \underbrace{\int\limits_{I_x \setminus A} \dots dx}_{=0} = \sum_{s=1}^{S} \int\limits_{\varphi(I_{k_s})} f \cdot \chi_{\Omega_x} dx \overset{\text{Л.3}}{=} \sum_{s=1}^{S} \int\limits_{I_{k_s}} g dt = \int\limits_{\Omega_t} g(t)dt \Rightarrow (3)$$

■

Пункт 4.4 Замена переменной в общем случае

Теорема 2.23. *Пусть* D_t, D_x *- открытые, ограниченные, измеримые множества в* $\mathbb{R}^n$, $\varphi : D_t \to D_x$ *- диффеоморфизм,* $\Omega_t \subset \overline{\Omega}_t$, $\Omega_x \subset \overline{\Omega}_x \subset D_x$, Ω_t *и* Ω_x *- измеримые,* $f \in R(\Omega_x)$.
Тогда $(f \circ \varphi)|det\ D\varphi| \in R(\Omega_t)$, *причем* $\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{\Omega_t} (f \circ \varphi)|det\ D\varphi|(t)dt.$

Доказательство.

Имеем:

$$\int\limits_{\Omega_x} f dx = \int\limits_{\Omega_x} f \cdot \chi_{\Omega_x} dx = \int\limits_{D_x} \underbrace{f \cdot \chi_{\Omega_x}}_{\text{финитна в } D_x} dx - \underbrace{\int\limits_{D_x \setminus \Omega_x} \dots dx}_{=0} \overset{T.2.22}{=} \int\limits_{D_t} (f \circ \varphi)|det\ D\varphi| \cdot \chi_{\Omega_t} dt =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{\Omega_t} + \underbrace{\int\limits_{D_t \setminus \Omega_t}}_{=0}\Bigg) \dots dt = \int\limits_{\Omega_t} (f \circ \varphi)|det\ D\varphi| dt$$

■

-

§5 Несобственные кратные интегралы

Определение 2.8. *Пусть $\mathbb{G}$ - открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Система $\{K_l, l \in \mathbb{N}\}$ называется исчерпывающей системой компактных множеств для $\mathbb{G}$ ("исчерпанием" $\mathbb{G}$), если*

1) K_l - компакт, $\forall l$

2) $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1} \subset K_{l+1}$, $\forall l \in \mathbb{N}$

3) $\mathbb{G} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_l$

Замечание.

$\forall \mathbb{G} \in \mathbb{R}^n$, т. что $\mathbb{G}$ - открытое, $\exists$ исчерпание (компактами) $\mathbb{G} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_l$,

где $K_l := \{x \in \mathbb{G} |\ \rho(x, \partial\mathbb{G}) \geqslant \frac{1}{l},\ |x| \leqslant l\}$

Лемма.

Пусть $\{K_l\}$ - исчерпание компактами для $\mathbb{G}$ и пусть $K \subset \mathbb{G}$, K - компакт.

Тогда $\exists l_0$, т. что $K \subset \overset{\circ}{K}_{l_0} \subset K_{l_0}$

Доказательство.

По условию, $K \subset \mathbb{G} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_l \Rightarrow \{K_l\}$ - открытое покрытие компакта $K \Rightarrow \exists$ подпокрытие: $K \subset \bigcup\limits_{m=1}^{M} \overset{\circ}{K}_{l_m}$, причем $\overset{\circ}{K}_{l_1} \subset \overset{\circ}{K}_{l_2} \subset ... \subset \overset{\circ}{K}_{l_M} \Rightarrow K \subset \overset{\circ}{K}_{l_M}$, так что $l_0 = l_M$ ■

Напоминание.

f локально ограничена на $\mathbb{G}$ ($f \in B_{loc}(\mathbb{G})$) $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x \in \mathbb{G} \exists A = A(x) \subset \mathbb{G}$, $f \in B(A)$.

Определение 2.9. *Пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{G}$ - открытое, $f \in B_{loc}(\mathbb{G})$, $\mu(E(f, \mathbb{G})) = 0$.*

Тогда f интегрируема (в несобственном смысле) на $\mathbb{G} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall$ исчерпывающей системы измеримых компактов $\{K_l\}$ для $\mathbb{G}$

$$\exists \lim_{l \to +\infty} \int\limits_{K_l} f(x)dx =: \int\limits_{\mathbb{G}} f(x)dx$$

где lim не зависит от выбора системы $\{K_l\}$.

Замечания.

1. Определение корректно, т.к. $f \in R(K_l)$, $\forall l$ (f непрерывно почти всюду на K_l, K_l - измеримо), и $f \in B(K_l)$, т.к. $\forall x \in K_l$ $\exists$ открытое множество $A(x)$, т. что $f \in B(A(x))$.
Тогда $K_l \subset \bigcup\limits_{x \in K_l} A(x) \Rightarrow \exists$ подпокрытие $K_l \subset \bigcup\limits_{k=1}^{K} A(x_k) \overset{..}{\Rightarrow} f \in R(K_l)$

2. Пусть $f \geqslant 0$ на $\mathbb{G}$. Тогда $\int\limits_{\mathbb{G}} f dx = \sup\limits_{l} \int\limits_{K_l} f dx$.
В самом деле, пусть $\alpha_l := \int\limits_{K_l} f dx$, $l \in \mathbb{N}$. Имеем: $\alpha_l \uparrow$, $\exists \lim\limits_{l \to \infty} \alpha_l \overset{\text{Т.Вейерштр.}}{=} \sup\limits_{l \in \mathbb{N}} \alpha_l$.
3. Пусть $\mathbb{G}$ - открытое, ограниченное, измеримое, $f \in B(\mathbb{G})$, $\mu(E(f)) = 0$ (f непрерывно почти всюду на $\mathbb{G}$). Тогда по Кр. Лебега $f \in R(\mathbb{G}) \Rightarrow \exists \lim\limits_{l \to \infty} \int\limits_{K_l} f dx = \int\limits_{\mathbb{G}} f dx$, $\forall$ исчерпания измеримыми компактами $\{K_l\}$ множества $\mathbb{G}$.
Доказательство - Зорич, 2 том, стр. 181.

Теорема 2.24. *(Достаточное условие интегрируемости в несобственном смысле)*
Пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{G}$ - открыто, $f \in B_{loc}(\mathbb{G})$, $\mu(E(f, \mathbb{G})) = 0$, $\exists\{\hat{K}_l, l \in \mathbb{N}\}$ - исчерпание измеримыми компактами, т. что $\exists \lim\limits_{l \to \infty} \int\limits_{\hat{K}_l} |f| dx =: J \in \mathbb{R}$. Тогда:

1) *$|f|$ интегрируема на $\mathbb{G}$ в несобственном смысле, причем $\int\limits_{\mathbb{G}} |f| dx = J$*
2) *$\exists \lim\limits_{l \to \infty} \int\limits_{K_l} f dx = \int\limits_{\mathbb{G}} f dx$, где lim не зависит от выбора исчерпания измеримыми компактами $\{K_l\}$, т.е. f интегрируема в несобственном смысле на $\mathbb{G}$*

Доказательство.

1. Пусть $\{K_s\}$ - произвольное исчерпание измеримыми компактами для $\mathbb{G}$. Из Леммы (§5) следует, что $\forall s \in \mathbb{N}$ $\exists l(s)$ т. что $K_s \subset \hat{K}_{l(s)} \Rightarrow \beta_s := \int\limits_{K_s} |f| dx \leqslant \int\limits_{\hat{K}_{l(s)}} \leqslant \sup\limits_{l} \int\limits_{\hat{K}_l} |f dx| = J$, $\forall s \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup \beta_s = \sup\limits_{s} \int\limits_{K_s} |f dx| \leqslant J}_{\Rightarrow \beta_s \text{ - огр.}}, \ \beta_s \uparrow \overset{\text{Т.Вейерштр.}}{\Rightarrow} J \geqslant \sup\limits_{s} \int\limits_{K_s} |f| dx.$$

Аналогично $J \overset{\text{Т.Вейерштр.}}{=} \sup\limits_{l} \int\limits_{\hat{K}_l} |f| dx \leqslant \sup\limits_{s} \int\limits_{K_s} |f| dx$.

В итоге:

$$J \leqslant \underbrace{\sup\limits_{s} \int\limits_{K_s} |f| dx}_{= \lim\limits_{s \to \infty} \int\limits_{K_s} |f| dx} \leqslant J$$

Но $\{K_s\}$ - произвольное исчерпание измеримыми компактами $\Rightarrow \exists \int\limits_{\mathbb{G}} |f|dx = J$.

2. Положим $f_1 := |f|$, $f_2 := |f| - f$. Тогда $f = f_1 - f_2$ и $f_1, f_2 \geqslant 0$.

Имеем: из условий Теоремы следует, что $\exists \lim\limits_{l\to\infty} \int\limits_{\hat{K}_l} f_1 dx = J$.

$0 \leqslant f_2 \leqslant 2|f| \to 0 \leqslant \int\limits_{\hat{K}_l} f_2 dx \leqslant 2J \Rightarrow \exists \lim\limits_{l\to\infty} \int\limits_{\hat{K}_l} f_2 = J^*$

Пусть $\{K_s\}$ - произвольное исчерпание измеримыми компактами $\mathbb{G}$.

Тогда $\int\limits_{K_s} f dx = \underbrace{\int\limits_{K_s} f_1}_{\to J} - \underbrace{\int\limits_{K_s} f_2}_{\to J^*} \Rightarrow \exists \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_{K_s} f dx = J - J^*$, $\forall$ исчерпания измеримыми компактами

$\Rightarrow \exists \int\limits_{\mathbb{G}} f dx$ ■

Следствие.

Пусть $n = 1$, $f \geqslant 0$ на $[a, +\infty)$ и $\exists \int\limits_a^{+\infty} f dx$ (в смысле II сем.) $\Rightarrow \exists \int\limits_a^{+\infty} f dx$ (в смысле Определения 2.9)

Теорема 2.25. *Пусть* $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{G}$ *- открытое,* $f \in B_{loc}(\mathbb{G})$, $\mu(E(f, \mathbb{G})) = 0$, *причем* $\forall \{K_s\}$ *- исчерпания измеримыми компактами для* $\mathbb{G}$ $\exists \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_{K_s} f dx =: \int\limits_{\mathbb{G}}$.

Тогда $\exists \int\limits_{\mathbb{G}} |f| dx$.

Замечание.

Пусть $n = 1$, $\exists \int\limits_a^{+\infty} f dx$ (в смысле II) $\overset{\text{в.г.}}{\not\Rightarrow} \exists \int\limits_a^{\infty} f dx$ (в смысле Определения 2.9).

3. Глава 3. Криволинейные интегралы

§1 Криволинейный интеграл I-го рода

Пункт 1.1 Определения

Напоминание.

1) Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ - непрерывная, простая кривая на плоскости: $\Gamma := \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t_0 \leqslant T\}$, где $\varphi, \psi \in C[t_0, T]$ и, кроме того, если $(t_1 \neq t_2) \Rightarrow (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$, кроме случая, когда $t_1 = t_0$ и $t_2 = T$.

2) Длина кривой $(s_\Gamma) := \sup\limits_L P_L$, где P_L - периметр вписанной в кривую Γ ломаной L.

3) Γ - спрямляемая: $s_\Gamma < \infty$

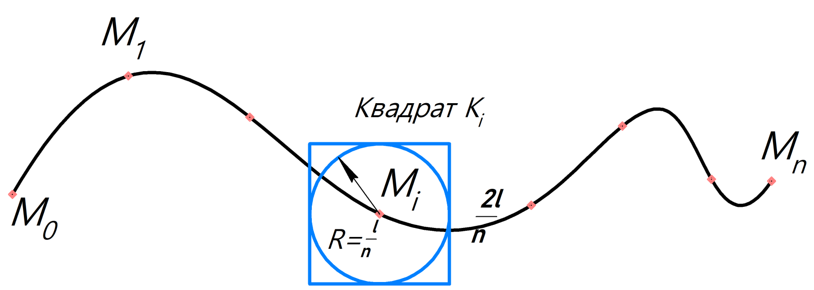
Достаточное условие спрямляемости: если $\varphi, \psi \in C^1[t_o, T]$, то Γ - спрямляемая, причем

$$s_\Gamma = \int\limits_{t_0}^{T} \underbrace{\sqrt{|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2} dt}_{=ds}$$

Лемма.

Кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ - спрямляемая. Тогда S_Γ (мера Жордана Γ) $= 0$.

Доказательство.



Разобъем Γ точками $A = M_0, M_1, ..., M_n = B$, т. что $s(M_{i-1}, M_i) = \frac{l}{n}$, где $l = s_\Gamma$.

Тогда $\forall M \in \overset{\smile}{M_{i-1}, M_i}$ $(i = \overline{1, n})$, $\rho(M, M_i) \leqslant \frac{l}{n} \Rightarrow M \in K_i \Rightarrow \Gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$, причем

$\sum\limits_{i=1}^{n}|K_i| = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{4l^2}{n^2} = \dfrac{4l^2}{n} \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому $S_\Gamma = 0$ ■

Следствие.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω - ограничена, $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых кривых. Тогда Ω - измеримо по Жордану ($n = 2$ - квадрируема).

На плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной системой координат xOy рассмотрим спрямляемую кривую $\Gamma = \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T\}$, где $\varphi, \psi \in C[t_0, T]$.

Пусть $A := (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $B := (\varphi(T), \psi(T))$, и пусть задана функция $f : \breve{AB} \to \mathbb{R}$.

1. Выберем на $\Gamma = \breve{AB}$ точки $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$. Пусть $P = \{A_k, k = \overline{0, n}\}$ - соответствующее **разбиение** дуги $\breve{AB}$. Обозначим $l_{\breve{A_{k_1}A_k}} =: \Delta s_k$ - длина дуги $\breve{A_{k_1}A_k}$ и пусть $d = d(P) := \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta s_k$.

2. $\forall k = \overline{1, n}$, фиксируем произвольно точку $M_k = M_k(x_k, y_x) \in \breve{A_{k_1}A_k}$, и полагаем $M := \{M_k, k = \overline{1, n}\}$.

Тогда (P, M) - **размеченное разбиение** дуги $\breve{AB}$.

3. **Интегральная сумма** вдоль кривой $\breve{AB}$, соответствующая размеченному разбиению (P, M): $\sigma(P, M) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta s_k$

Определение 3.1. *Пусть* $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P, M) =: I \in \mathbb{R}$, *т.е.* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *т. что* $|\sigma(P, M) - I| < \varepsilon$, $\forall (P, M)$ *с* $d(P) < \delta$.

Тогда I называется криволинейным интегралом I-го рода вдоль кривой (дуги) $\breve{AB}$.

Обозначение: $I = \int\limits_{\breve{AB}} f(x, y)ds$ *(Если $A = B$, то пишут $I = \oint\limits_{AB} fds$).*

Замечание.

Интеграл I-го рода не зависит от направления обхода кривой: $\int\limits_{\breve{AB}} fds = \int\limits_{\breve{BA}} fds$

Пример.

Пусть $\rho : M \in \breve{AB} \to \rho(M) \in \mathbb{R}$ задает плотность распределения массы вдоль кривой $\breve{AB}$.

$\forall$ разбиения $P = (A_0, ..., A_n)$ дуги $\breve{AB}$ полагаем $m(\breve{A_{k_1}A_k}) =: m_k \approx \rho(M_k)\Delta s_k$, где $M_k \in \breve{A_{k_1}A_k}$.

Тогда $m(\breve{AB}) =: m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} m_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(M_k)\Delta s_k$.

Погрешность такого равенства тем меньше, чем меньше $d(P)$. Поэтому естественно определить массу дуги $\breve{AB}$ как $m := \lim\limits_{d(P)} \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(M_k)\Delta s_k = \int\limits_{\breve{AB}} \rho(M)ds = \int\limits_{\breve{AB}} \rho(x, y)ds$.

Аналогично вводится определение криволинейного интеграла вдоль пространственной кривой (в $\mathbb{R}^3$).

$\Gamma = \{x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t),\ t_0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Пусть дана функция $f : \breve{AB} \to \mathbb{R}$. Введем разбиение $P = \{A_0, ..., A_n\}$ кривой $\breve{AB}$, выберем $M = \{M_1, ..., M_n\}$, где $M_k \in \breve{A_{k_1} A_k}$.

Составим интегральную сумму $\sigma(P, M) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k$, где $\Delta s_k = s_{\breve{A_{k_1} A_k}}$.

Пусть $d := max\Delta s_k$. Тогда $\int\limits_{\breve{AB}} f(x, y, z)ds := \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(f, P, M)$ (если этот предел существует).

Пример.

Масса простой, непрерывной, спрямляемой кривой $\breve{AB}$ определяется, как

$$m := \int\limits_{\breve{AB}} \rho(M)ds = \int\limits_{\breve{AB}} \rho(x, y, z)ds$$

Пункт 1.2 Вычисление криволинейного интеграла I-го рода

Пусть $\breve{AB} \subset \mathbb{R}^2$ - простая, непрерывная, спрямляемая кривая, $A \neq B$, $\varphi, \psi \in C^1[t_0, T]$, причем $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$ (точка неособая).

Введем на кривой натуральный параметр s равный длине дуги $\breve{AM}$, $M \in \breve{AB}$, $0 \leqslant s \leqslant s_{\breve{AB}}$.

Замечание.

Заметим, что $s \upuparrows$. Тогда

$$\sigma(f, P, M) = \sum_{k=1}^{n} f \underbrace{(x_k, y_k)}_{M_k} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} f(x(\tilde{s}_k), y(\tilde{s}_k))\Delta s_k \underset{d(P)\to 0}{\to} \underbrace{\int\limits_{0}^{s_{\breve{AB}}} f(x(s), y(s))ds}_{:=I_1} = \underbrace{\int\limits_{\breve{AB}} fds}_{:=I_2}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\breve{AB}$ - простая, непрерывная, спрямляемая, без особых точек, и $f \in C(\breve{AB})$. Тогда $\exists \int\limits_{\breve{AB}} fds$*

Вывод.

Криволинейный интеграл I-го рода сводится к определенному интегралу формулой

$$\int\limits_0^{s_{\smile{AB}}} f(x(s), y(s))ds = \int\limits_{\smile{AB}} f ds \quad (1)$$

Но эта формула не очень удобна, т.к. для параметризации кривой необходимо выбирать натуральный параметр.

Пусть $\overset{\smile}{AB}$ задана параметрически: $\overset{\smile}{AB} = \begin{cases} x = x(t) = x(t(s)) \\ y = y(t) = y(t(s)) \end{cases}, t_0 \leqslant t \leqslant T,\ x, y \in C^1 \in [0, T]$ и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$.

Тогда $\overset{\smile}{AB}$ - спрямляема и для нее определен натуральный параметр $s: \begin{cases} x = x(s) = x(s(t)) \\ y = y(s) = y(s(t)) \end{cases}$

Заметим, что $s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Тогда $\exists s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

Замечание.

Сделаем в формуле (1) замену переменных $t = t(s)$. Тогда

$$\int\limits_0^{s_{\smile{AB}}} f(x(s(t)), y(s(t)))ds = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Конечные точки A, B могут быть особыми или $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = +\infty$.

§2 Криволинейный интеграл II-го рода

Пункт 2.1 Определения

На плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной системой координат xOy рассмотрим спрямляемую, непрерывную, простую кривую.

Пусть $\hat{P} = \{A_k, k = \overline{0,n},\ A = A_0, B = A_n\}$ - произвольное разбиение дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $d(\hat{P}) := \max \Delta s_k$, где Δs_k - длина дуги $\overset{\smile}{A_{k-1}A_k}$.

И пусть $M = M_k(\underbrace{x_k, y_k}_{A_k})$, $k = \overline{1,n}$ - разметка дуги $\overset{\smile}{AB}$.

Составляем интегральную сумму $\sigma_1(P, \hat{P}, M) := \sum\limits_{k=1}^{n} P(M_k)\Delta x_k$, где $P : \overset{\smile}{AB} \to \mathbb{R}$ - некоторая функция, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Определение 3.2. *Пусть* $\exists \lim\limits_{d(\hat{P})\to 0} \sigma_1(P, \hat{P}, M) =: I_1$.

Тогда I_1 *называется криволинейным интегралом II-го рода от функции* P *по переменной* x.

Обозначение: $I_1 := \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x,y)dx$, *причем необходимо задавать направление.*

Замечание.

1. I_1 зависит от направления обхода дуги $\overset{\smile}{AB}$: $\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} Pdx = -\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx$.

2. Если $\overset{\smile}{AB} \| Oy$, то $I_1 = 0$.

Пусть теперь $Q : \overset{\smile}{AB} \to \mathbb{R}$. Составляем интегральную сумму $\sigma_2(Q, \hat{P}, M) := \sum\limits_{k=1}^{n} Q(M_k)\Delta y_k$, где $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

Определение 3.3. *1. Пусть* $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma_2(Q, \hat{P}, M) := I_2$

Тогда I_2 *называется криволинейным интегралом II-го рода от функции* Q *по переменной* y.

Обозначение: $I_2 = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Qdy$.

2. Сумма $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Qdy$ *называется криволинейным интегралом. II-го рода.*

Замечание.

$\int\limits_{\smile{AB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\smile{BA}} Pdx + Qdy.$

Аналогично определяется криволинейный инеграл II-го рода по пространственной кривой $\int\limits_{\smile{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$

Пункт 2.2 Вычисление интеграла II-го рода

Пусть задана кривая $\smile{AB} = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_0, T]$ - простая, непрерывная кривая, причем $A = (x(t_0), y(t_0))$, $B = (x(T), y(T))$.

Теорема 3.2. *Пусть $x, y \in C^1[t_0, T]$, $\smile{AB}$ - без особых точек ($(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$), функции $P, Q \in C(\smile{AB})$. Тогда*

$$\exists \int\limits_{\smile{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_0}^{T} \Big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\Big)dt$$

Доказательство.

Достаточно рассмотреть $\int\limits_{\smile{AB}} P(x, y)dx$.

1. Пусть $\hat{P} = \{A_0, ..., A_n\}$ - произвольное разбиение дуги $\smile{AB}$, причем $A_k = (x(t_k), y(t_k))$, $t_n = T$. Имеем: $t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. Выберем разметку $M = \{M_k \in \smile{A_{k-1}A_k},\ k = \overline{1, n}\}$, где $M_k(x(\tau_k), y(\tau_k))$, $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$, $k = \overline{1, n}$.

Тогда:

$$\sigma_1(P, \hat{P}, M) = \sum_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \underbrace{[x(t_k) - x(t_{k-1})]}_{=\Delta x_k} \overset{x \in C^1[t_0,T]}{=} \sum_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \cdot x'(t)dt$$

2. Рассмотрим интеграл $J := \int\limits_{t_0}^{T} P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t)) \cdot x'(t)dt.$

И рассмотрим разность

$$\sigma_1(P,\hat{P},M) - J = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(P(x(\tau_k),y(\tau_k)) - P(x(t),y(t))\Big)\cdot x'(t)dt}_{:=\Delta}$$

3. Оценим Δ. Положим $F(t) := P(x(t),y(t))$. Тогда F - равномерно непрерывна на $[t_0,T]$. Поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ т. что $|F(t')-F(t'')|<\varepsilon$, $\forall t',t''\in[t_0,T]$ при $|t'-t''|<\delta$. (1)

Пусть $s(t)$ - функция длины дуги $\breve{AB}$, отсчитываемая от точки A (натуральный параметр).

$s(t) = \int\limits_0^t \sqrt{\Big(x'(\lambda)^2 + y'(\lambda)^2\Big)}d\lambda,\ t\in[t_0,T].$

Имеем: $s\in C^1[t_0,T]$, $s \upuparrows$. Тогда $\exists$ обратная функция $t=t(s)$, $s\in[0,L]$, где L - длина дуги $\breve{AB}$, причем $t\in C^1[t_0,T]$.

Тогда $|t_k - t_{k-1}| = |t'(\overline{s}_k)|\Delta s_k \leqslant K\cdot\Delta s_k \leqslant K\cdot d(\hat{P})$, где $\overline{s}_k$ - точка между s_{k-1} и s_k, K - некоторая постоянная.

4. Пусть $\varepsilon>0$ - произвольно и $\delta=\delta(\varepsilon)$ из (1). Пусть $d(\hat{P}) < \dfrac{\delta}{K} \Rightarrow |t_k - t_{k-1}| < \delta \overset{\text{см.}(1)}{\Rightarrow} |F(\tau_k) - F(t)| < \varepsilon$, для $t,\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$.

5. Запишем, что $\exists C$ т. что $|x'(t)|\leqslant C$, $\forall t\in[t_0,T]$.

В итоге: $|\Delta| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon\cdot C\cdot(t_k-t_{k-1}) = \varepsilon\cdot C\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta t_k = \varepsilon C[T-t_0] \Rightarrow \sigma_1\to J$ при $d(\hat{P})\to 0$ ■

Замечания.

1. Достаточно считать, что $(x'(t)^2+y'(t)^2)>0$ на $(0,T)$, $x',y'\in C(0,T)$ и $x',y'\in B(0,T)$.

2. В Теореме предполагалось, что параметризация кривой соответствует направлению обхода $\breve{AB}$, т.е. $A=(x(t_0),y(t_0))$, $B=(x(T),y(T))$.

3. Кривая $\breve{AB}$ называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких дуг. Теорема сохраняется для кусочно-гладких кривых.

4. Теорема переносится на пространственную кривую $(+Rdz)$.

Следствие. (Связь интеграла II-го рода с интегралом I-го рода)

Пусть выполнены условия Теоремы, $|\breve{AB}| =: L$, s - натуральный параметр, $s\in[0,L]$.

Имеем: $x'(s)=\cos\alpha$, $y'(s)=\cos\beta$, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ направляющие косинусы касательного вектора к $\breve{AB}$. Тогда:

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_0^L \Big(P(x(s),y(s))\cos\alpha(s)+Q(x(s),y(s))\cos\beta(s)\Big)ds = \int\limits_{\breve{AB}} (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$$

Пункт 2.3 Свойства криволинейного интеграла II-го рода

Свойства:

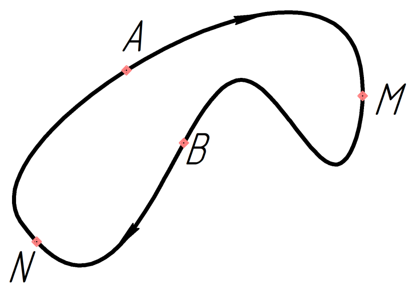
1. Изменение направления обхода кривой меняет знак у интеграла II-го рода:
$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\breve{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

2. Линейность.

3. Аддитивность: пусть $\breve{AB}$ разбита на конечное число дуг $A_{k-1}\breve{A}_k$, причем $\exists \int\limits_{A_{k-1}\breve{A}_k} Pdx + Qdy$, $k = \overline{1,N}$. Тогда $\exists \int\limits_{\breve{AB}} = \sum\limits_{k=1}^{N} \int\limits_{A_{k-1}\breve{A}_k} Pdx + Qdy$

4. Пусть $\breve{AB}$ - замкнутая. Тогда $\int\limits_{\breve{AB}}$ не зависит от точки начала обхода.

Докажем 4-ый пункт. Пусть $\Gamma = \breve{AB}$.



Тогда по свойству аддитивности $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\breve{AMB}} ... + \int\limits_{\breve{BNA}} ... = \int\limits_{\breve{BNA}} ... + \int\limits_{\breve{AMB}} ... = \int\limits_{\breve{BB}}$

5. Пусть $P \equiv 1$, $A = (x(t_0), y(t_0))$, $B = (x(T), y(T))$.
Тогда $\int\limits_{\breve{AB}} 1 \cdot dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma_1(\hat{P}, M) = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = x(T) - x(t_0).$
Аналогично $\int\limits_{\breve{AB}} 1 \cdot dy = y(T) - y(t_0).$

Определение 3.4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$, D - область (открытое и связное множество), $P, Q \in C(D)$. Говорим, что $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall A, B \in D$, $\int\limits_{\Gamma_1} = \int\limits_{\Gamma_2}$ $\forall$ двух кусочно-гладких кривых (путей) $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$, связывающих т. A и B.*

Теорема 3.3. *(Критерий независимости от пути интегрирования)*

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$, D - область, $P, Q, R \in C(D)$, Γ - кусочно-гладкая кривая в D.

Тогда $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования $\Leftrightarrow \exists U : D \to \mathbb{R}$ т. что $U \in D(D)$, причем $dU = Pdx + Qdy + Rdz$. (1)

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования.

Фиксируем произвольно $A \in D$, а $C \in D$ - произвольная точка.

Положим $U(C) = \int\limits_{\breve{A}} Pdx + Qdt + Rdz$. Определение корректно, т.к. интеграл не зависит от пути интегрирования.

Достаточно доказать, что $\exists \dfrac{\partial U}{\partial x} = P, \dfrac{\partial U}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial U}{\partial z} = R$ всюду в D. (Достаточное условие дифференцируемости функции: все ее частные производные существуют и непрерывны)

Докажем, что $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$ в D. Остальные доказываются аналогично.

Пусть $C = (x, y, z)$. D - открыто $\Rightarrow \exists$ шар $B(C, h) \subset D$.

Рассмотрим приращение

$$\Delta U := U(x+h, y, z) - U(x, y, z) = \int\limits_{\breve{CD}} Pdx + \underbrace{Qdy + Rdz}_{=0} = \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y, z) d\xi = P(x + \theta h, y, z) \cdot h$$

где $\breve{CD}$ - отрезок параллельный Ox, $0 < \theta < 1$.

Поэтому $\dfrac{\Delta U}{h} = P(x + \theta h, y, z) \to P(x, y, z)$ при $h \to 0 \Rightarrow \exists \dfrac{\partial u}{\partial x}(C) = P(C)$.

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\exists U$ т. что $Pdx + Qdy + Rdz = dU$.

Рассмотрим интеграл $I := \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$, где $\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$, $\Gamma = \breve{AB}$ - кусочно-гладкая кривая.

Тогда имеем:

$$I = \int\limits_{t_0}^{T} \Big(\underbrace{P}_{\dfrac{\partial U}{\partial x}}(t)x'(t) + \underbrace{Q}_{\dfrac{\partial U}{\partial y}}(t)y'(t) + \underbrace{R}_{\dfrac{\partial U}{\partial z}}(t)z'(t) \Big) dt$$

Положим $V(t) := U(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [t_0, T]$.

Тогда $I = \int\limits_{t_0}^{T} \dfrac{dV}{dt} dt = V(T) - V(t_0) = U(T) - U(t_0) = U(B) - U(A)$ - выражение, которое не зависит от Γ. ■

Теорема 3.4. *(Теорема об аппроксимации криволинейного интеграла)*

Пусть $\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$, *и* $x, y \in C^1[t_0, T]$.

$P = \{t_i, i = \overline{0, h}\}$ *- разбиение* $[t_0, T]$, *а* Λ_P *- соответствующая ломанная, вписанная в кривую* Γ, *причем* $\Gamma, \Lambda_P \subset K$, *где* K *- компакт, и пусть* $P, Q \in C(K)$. *Тогда:*

$$\lim_{d(P) \to 0} \int\limits_{\Lambda_P} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

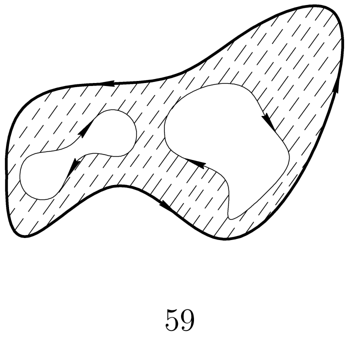
Пункт 2.4 Формула Грина

Рассмотрим прямоугольную систему координат xOy. Пусть D - область в $\mathbb{R}^2$.

Γ - гладкий контур $\Leftrightarrow \Gamma = \{x = x(t), y = y(t), t_0 \leqslant t \leqslant T\}$, $x, y \in C^1[t_0, T]$.

Γ - кусочно-гладкий контур $\Leftrightarrow$ $\exists$ разбиение $\{t_1, ..., t_m\}$ отрезка $[t_0, T]$ т. что $x, y \in C^1[t_{k-1}, t_k]$, $x, y \in C[t_0, T]$, причем $x'_+(t_k) \neq x'_-(t_k)$.

Тогда Γ - **положительно ориентирована** относительно $D \overset{def}{\Leftrightarrow}$ если при соответствующем обходе Γ, прилежащая к Γ часть D остается слева.

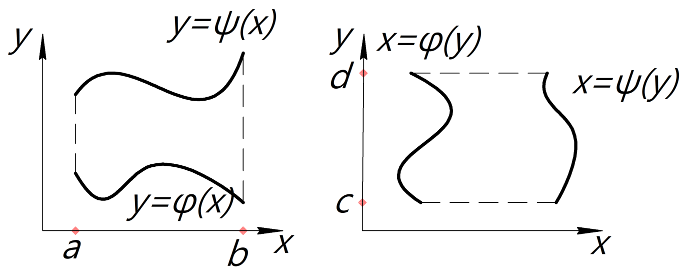


Определение 3.5. *Пусть D - область в $\mathbb{R}^2$.*

1) *D - простая относительно $Oy \overset{def}{\Leftrightarrow} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}|\ a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$, где $\varphi, \psi \in C[a,b]$, φ', ψ' - кусочно-непрерывны на $[a,b]$.*

2) *D - простая относительно $Ox \overset{def}{\Leftrightarrow} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}|\ c < y < d, \varphi(y) < x < \psi(y)\}$, где $\varphi, \psi \in C[c,d]$, φ', ψ' - кусочно-непрерывны на $[c,d]$.*

3) *D - простая $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ D - простая относительно Oy или D - простая относительно Ox.*



Определение 3.6. *Пусть D - область в $\mathbb{R}^2$. D разрезана на конечное число простых областей $\{D_m\}_{m=1}^M \overset{def}{\Leftrightarrow}$*

1) $\bigcup\limits_{m=1}^{M} D_m \subset D$

2) $D_m \bigcap D_k = \varnothing$, *если* $m \neq k$

3) $\bigcup\limits_{m=1}^{M} \overline{D}_m = \overline{D}$

4) *Множество* $(\partial D_m \bigcap\limits_{m \neq k} \partial D_k) \bigcap D = \varnothing$ *или {точка} или промежуток.*

Лемма.

Пусть D - ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\partial D = \bigcup\limits_{i=1}^{K} \Gamma_i$, где Γ_i - простой, кусочно-гладкий контур, $\Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тогда D может быть разрезана на конечное число простых областей.

Обозначение: ∂D^+ - положительно ориентированная граница D.

Теорема 3.5. *(Формула Грина)*

Пусть D - ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\partial D = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i$, где Γ_i - простой, кусочно-гладкий контур *(замкнутая кривая)*, $\Gamma_i \bigcap \Gamma_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$.

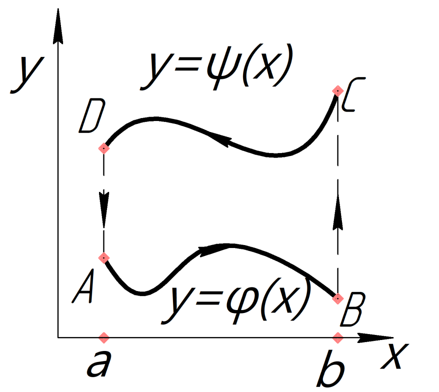
Пусть $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(\overline{D})$. *Тогда:*

$$\int\limits_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (1)$$

Доказательство.

Достаточно доказать, что $-\int\limits_{\partial D^+} Pdx = \iint\limits_D \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy$ (2).

1. Пусть D - простая область относительно Oy, т.е. $D = \{(x,y) |\ a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$.



Имеем:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \overset{T.2.17}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\Big)dx =$$

$$= -\int\limits_{\breve{CD}} Pdx - \int\limits_{\breve{AB}} Pdx = -\int\limits_{\partial D^+} Pdx \Rightarrow (2)$$

2. Пусть D - простая относительно Ox, причем кривые

$\Gamma_1 := \{x = \varphi(y), c \leqslant y \leqslant d\}$, $\Gamma_2 := \{x = \psi(y), c \leqslant y \leqslant d\}$ - ломаные.

Тогда $\exists$ разбиение $\{c_i, i = \overline{0,k}\}$ отрезка $[c,d]$, которое индуцирует представление $\overline{D} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{D}_i$, где $D_i = \{c_{i-1} \leqslant y \leqslant c_i, \psi(y) \leqslant x \leqslant \varphi(y)\}$ - трапеция. Тогда D_i - простая относительно $Oy \overset{\text{п.1}}{\Rightarrow}$ $\iint\limits_{D_i} \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial D_i^+} Pdx$, $i = \overline{1,k}$.

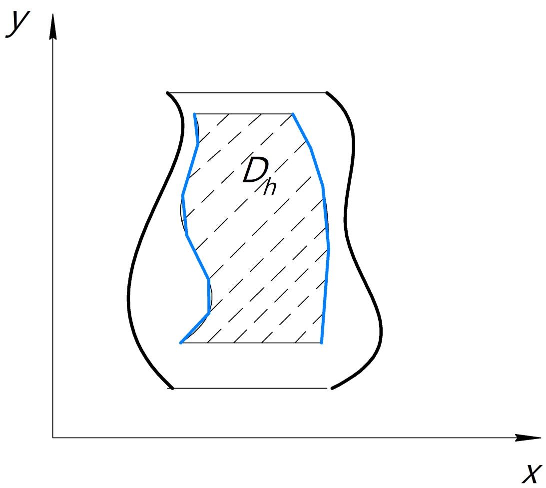
Складываем полученные равенства из пунктов 1 и 2:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial D^{+}} Pdx$$

3. Пусть D - простая относительно Ox, причем $\exists h_0$ т. что $\psi - \varphi \geqslant 3h_0$ на $[c,d]$.

Рассмотрим $D_h := \{(x,y) \in D |\ c < y < d, \varphi(y) + h < x < \psi(y) - h\} \subset D$,

$\Gamma_{1,h} := \{x = \varphi(y) + h, c \leqslant y \leqslant d\}$, $\Gamma_{2,h} := \{x = \varphi(y) - h, c \leqslant y \leqslant d\}$, $h \in (0, h_0)$.



Выберем разбиение $\hat{P}$ отрезка $[c,d]$ с достаточно малым диаметром разбиения $d(\hat{P})$. Тогда $\Lambda_{1,h}(\hat{P})$, $\Lambda_{2,h}(\hat{P})$ - ломаные, вписанные в $\Gamma_{1,h}, \Gamma_{2,h}$, соответственно. $\Lambda_{1,h}, \Lambda_{2,h} \subset D$.

Тогда из пункта 2 следует:

$$\iint\limits_{D'_h(\hat{P})} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial D'_h(\hat{P})} Pdx \overset{\text{к } \lim_{d(\hat{P}) \to 0}}{\underset{T.3.4}{\Rightarrow}} \iint\limits_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial D_h^{+}} Pdx$$

В итоге:

$$\iint\limits_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial D_h^{+}} Pdx \overset{?}{\to} -\int\limits_{\partial D^{+}} Pdx \qquad (3)$$

Имеем: $\iint\limits_{D_h} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \underset{h \to +0}{\to} \iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ - предел по исчерпанию.

Докажем (3). Имеем:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{1,h}} P(x,y)dx - \int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_c^d P(\varphi(y)+h,y)\cdot\varphi'(y)dy - \int\limits_c^d P(\varphi(y),y)\varphi'(y)dy\right| =: A$$

Пусть $\omega(h,P)$ - модуль непрерывности функции $P:\overline{D}\to\mathbb{R}$. Тогда:

$$0 \leqslant A \leqslant \int\limits_c^d \underbrace{\omega(h,P)}_{=const}\cdot\underbrace{|\varphi'(y)|}_{\leqslant M}dy \leqslant \underbrace{\omega(h,P)}_{\to 0}M(d-c) \overset{h\to+0}{\to} 0 \Rightarrow (3)$$

$\Rightarrow$ переходя к $_{h\to+0}$ в (3) получаем (2).

4. Пусть D - простая относительно Ox.

Положим $D_\varepsilon := \{c+\varepsilon<y<d-\varepsilon, \varphi(y)<x<\psi(y)\}$.

Тогда из пункта 3 следует: $\iint\limits_{D_\varepsilon}\dfrac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{\partial D_\varepsilon^+} Pdx \overset{\lim\limits_{\varepsilon\to+0}}{\Rightarrow} (2)$.

5. Общий случай. Пусть D удовлетворяет условиям Теоремы. Тогда D удовлетворяет условиям Леммы $\Rightarrow$ D может быть разрезана на конечное число простых областей $\overline{D} = \bigcup\limits_{m=1}^{M}\overline{D}_m$ и

$\partial D_m \bigcap \partial D_k \bigcap D \in \{\varnothing$, точка, отрезок$\} \overset{\text{п.1 и п.4}}{\Rightarrow} \iint\limits_{D_m}\dfrac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{\partial D_m^+} Pdx$. (4)

Пусть $\partial' D_m := \partial D \bigcap D$ - внутренняя граница, $\partial'' D_m := \partial D_m \bigcap \partial D$ - внешняя граница. И пусть $E_{m_k} = \partial' D_m \bigcap\limits_{m\neq k} \partial' D_k = \varnothing$ или точка или отрезок ■

Следствие 1.

1. Пусть D удовлетворяет условиям Теоремы. Вычислим $S_D :=$ площадь D (определена, т.к. D - измерима по Жордану, по условию).

$$S_D = \iint\limits_D 1dxdy - \int\limits_{\partial D^+} xdy = -\int\limits_{\partial D^+} ydx = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D^+} xdy - ydx$$

Определение 3.7. *Пусть $D\subset\mathbb{R}^2$, D - область. Тогда D - односвязная область $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall G$ - ограниченной области в $\mathbb{R}^2$ имеет место импликация: $(\partial G\subset D)\Rightarrow(G\subset D)$.*

Следствие 2. (Критерий полного дифференциала)

Пусть D односвязная область в $\mathbb{R}^2$ и $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$.

Тогда дифференциальная форма (выражение) $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U : D \to \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Доказательство.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\exists U : D \to \mathbb{R}$ т. что $Pdx + Qdy = dU$.

От противного: $\exists M_0 \in D$ т. что $\left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{M_0} \neq 0$.

Для определенности, считаем, что > 0. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y} \in C(D)$, поэтому их разность тоже непрерывна.

Тогда $\exists$ шар $B(M_0, \varepsilon)$ т. что $\left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{B(M_0,\varepsilon)} > 0 \overset{\text{св-ва двойного}}{\underset{\text{интеграла}}{\Rightarrow}} \iint\limits_{B(M_0,\varepsilon)} \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I := \int\limits_{\underset{\text{сфера}}{S^+}(M_0,\varepsilon)} \underbrace{Pdx + Qdy}_{dU} > 0 \overset{T.3.3(\text{п.}2)}{\Rightarrow} I = U(A) - U(A) = 0$, т.к. интеграл по замкнутой кривой $\Rightarrow$ противоречие.

2. $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\left.\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\right|_{D} = 0 \overset{\text{ф-ла Грина}}{\Rightarrow} \forall$ кусочно-гладкой кривой Γ_1, ограничивающей область $D_1 \subset D$, $\int\limits_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = 0 \overset{T.3.3}{\Rightarrow} \exists U$ т. что $Pdx + Qdy = dU$

■

4. Глава 4. Поверхностные интегралы

§1 Поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$

Пункт 1.1 Задание поверхности в пространстве

Варианты задания кривых:

1. Поверхность Γ в пространстве может быть задана как график некоторой непрерывной функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, или $x = g(y, z)$, или $y = h(x, z)$.

В этих случаях говорят, что поверхость задана явно. Например, $z = x^2 + y^2$, $D = \mathbb{R}^2$ (параболоид).

2. Поверхность задана уравнением, которое не разрешается относительно никакой из переменных $F(x, y, z) = 0$.

В этом случае говорят, что поверхность задана неявно. Например, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (сфера).

3. Γ : $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$ $(u, v) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^3$, где $x, y, z \in C(\overline{D})$. (1)

В этом случае говорят, что поверхность задана параметрически. Например, $\begin{cases} x = R\cos u \cos v \\ y = R\sin u \cos v \\ z = R\sin v \end{cases}$

Замечание.

Дальше рассматриваем параметрическое задание кривой. Т.к. каждой точке $M(x, y, z)$ соответствует ее радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то уравнения (1) могут быть переписаны в виде
$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$.

Далее предполагаем всюду, что поверхность $\Phi (= \Gamma)$ задана в виде (1), и выполнены условия:

1) D - ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, причем ∂D - простой, кусочно-гладкий контур

2) $x, y, z \in C^1(\overline{D})$

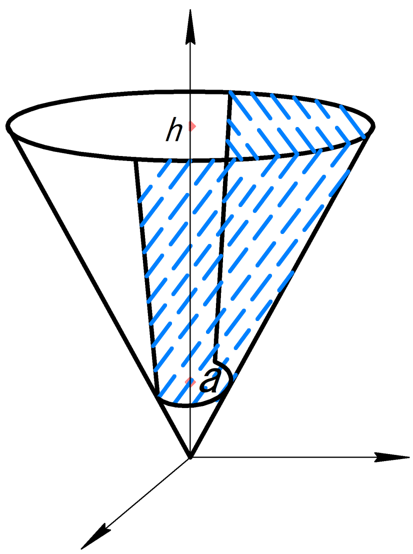
3) Отображение $F : (u, v) \in D \to (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \Phi$ инъективно.

Замечание.

Если условие 3 верно в $\overline{D}$, то поверхность Φ называется простой поверхностью. В этом случае говорят, что множество $\{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \Phi |\ (u, v) \in \partial D\}$ образует край поверхности. Поверхность, не имеющая края, называется поверхностью без края, например, сфера.

Пример.

Поверхность с краем $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u$. И пусть край $D = \{0 < a < u \leqslant h,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi\}$.



Определение 4.1. *M - внутренняя точка поверхности $\Phi \overset{def}{\Leftrightarrow} M \notin$ краю Φ.*

Пункт 1.2 Гладкая поверхность

Определение 4.2. *Поверхность Φ называется гладкой, если $\forall$ внутренней точки $M \in \Phi$ $\exists$ окрестность $O(M) \subset \mathbb{R}^3$, т. что $\Phi \bigcap O(M)$ может быть задана явно (одним из уравнений 1 варианта из п. 1), причем $f \in C^1(\mathbb{G})$, где $\mathbb{G}$ - прообраз $\Phi \bigcap O(M)$.*

Во всех внутренних точках $M_0 = M(x_0, y_0, z_0)$, $z = f(x, y)$, $\exists$ касательная плоскость, а именно, плоскость $z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$, а также единичный вектор нормали:

$$\vec{n} := \frac{\left(\pm f'_x(x_0, y_0), \pm f'_y(x_0, y_0), \pm 1\right)}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$$

Определение 4.3. *Пусть поверхность Φ задана параметрически:* $\Phi = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \overline{D}$, *с условиями 1-3 из пункта 1.1.*

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ называется регулярной (неособой), если векторы

$$\begin{matrix} \overline{r}'_u := x'_u(u_0, v_0)\vec{i} + y'_u(u_0, v_0)\vec{j} + z'_u(u_0, v_0)\vec{k} \\ \overline{r}'_v := x'_v(u_0, v_0)\vec{i} + y'_v(u_0, v_0)\vec{j} + z'_v(u_0, v_0)\vec{k} \end{matrix} \quad \text{не являются коллинеарными.}$$

Матрица Якоби для параметрически заданого графика имеет вид $\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$.

M_0 - регулярная $\Leftrightarrow$ ранг матрицы Якоби равен 2. В этом случае говорят, что Φ невырожденная в точке M_0. Иначе, $M_0 \in \Phi$ называется ***особой****.*

Замечания.

1. Параметрически заданная поверхность с условиями из пункта 1.1, не имеющая особых точек, является гладкой.

Доказательство - Зорич, 2 том, стр. 196.

2. Если $M \in \Phi$ - регулярная точка, то $[\overline{r}'_u, \overline{r}'_v] \neq \vec{0}$ (неколинеарные векторы).

Определение 4.4. *Пусть $M \in \Phi$ - внутренняя, регулярная точка. Плоскость, проходящая через точку M параллельно векторам $\overline{r}'_u(M), \overline{r}'_v(M)$, называется касательной плоскостью к поверхности Φ в точке M.*

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(M_0) & y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0) & z'_v(M_0) \end{vmatrix} = 0$$

Пример.

Явное задание поверхности $z = f(x, y)$: $\Phi = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = (x - x_0)(-f'_x) - (y - y_0)f'_y + z - z_0 = 0$$

Тогда $z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0)$.

Определение 4.5. *Пусть $M \in \Phi$, M - внутренняя, регулярная точка.* ***Нормаль*** *к поверхности Φ в точке M - это прямая, проходящая через точку M перпендикулярно касательной плоскости.*

Единичный вектор нормали $\vec{n}(M) := \pm\dfrac{[\overline{r}'_u(M), \overline{r}'_v(M)]}{|[\overline{r}'_u(M), \overline{r}'_v(M)]|}$

Положим $A := \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $B := \dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$, $C := \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. Нормаль, в этом случае, имеет вид:

$$\vec{n}(M) = \pm\Bigg(\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}_{\text{направляющие косинусы}}\Bigg)$$

Примеры.

1. Явное задание поверхности $\Phi = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$

Транспонированная матрица Якоби равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{pmatrix}$

Тогда $A = -f'_x$, $B = -f'_y$, $C = 1$, и вектор нормали $\vec{n} = \dfrac{\left(\pm f'_x, \pm f'_y, \mp 1\right)}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}$

2. Конус $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \qquad u \geqslant 0,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi. \\ z = u \end{cases}$

Транспонированная матрица Якоби равна $\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix}$ Тогда $\begin{cases} A = -u\cos v = -x \\ B = -u\sin v = -y \\ C = u = z \end{cases}$

Вектор нормали $\vec{n} = \pm\left(-\dfrac{x}{z\sqrt{2}}, -\dfrac{y}{z\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Пункт 1.3 Ориентация гладкой поверхности

Замечание.

Пусть Φ - гладкая поверхность, заданная параметрически, с условиями из пункта 1.1, без особых точек. $(*)$

Тогда $\vec{n} = \dfrac{[\overline{r}'_u(M), \overline{r}'_v(M)]}{|[\overline{r}'_u(M), \overline{r}'_v(M)]|} \in C(\overline{D})$.

Определение 4.6. *Всякое непрерывное поле единичных нормалей поверхности Φ называется ориентацией (стороной) поверхности Φ.*

Таким образом, выбор стороны поверхности означает выбор направления вектора нормали.

Замечания.

1. Если условия $(*)$ выполнены, то можно выбрать сторону поверхности. Тогда Φ - двусторонняя поверхность.

Если сторону выбрать нельзя, то Φ - односторонняя поверхность. Например, лист Мёбиуса.

Пункт 1.4 Площадь поверхности

Определение 4.7. *Пусть* Φ *- гладкая поверхность,* $\Phi := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad u, v \in D$ *и выполнены условия из пункта 1.1.*

Тогда площадь поверхности Φ, $S = S_\Phi := \iint\limits_D |\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v| dudv$

Замечания.

1. Определение 4.7 верно для кусочно-гладких Φ.

2. Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$ и пусть $E := |\overline{r}'_u|^2 = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$, $G := {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2$, $F := x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v$. Тогда:

$$|\overline{r}'_u + r'_v|^2 = EG - F^2 \Rightarrow S = \iint\limits_D \underbrace{\sqrt{EG - F^2} dudv}_{\text{элемент площади поверхности}}$$

§2 Поверхностные интегралы I-го и II-го рода

Пункт 2.1 Преобразование параметров гладкой поверхности

Пусть задана поверхность $\Phi := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $u, v \in \overline{D}$, с условиями из пункта 1.1, без особых точек.

Рассмотрим отображение $F : (u_1, v_1) \in \overline{D}_1 \subset \mathbb{R}^2 \to F(u_1, v_1) \in \overline{D}$, где $\overline{D}_1$ - измерима по Жордану.

Тогда получим поверхность $\tilde{\Phi} := \begin{cases} \xi = \xi(u_1,v_1) = x(u(u_1,v_1), v(u_1,v_1)) \\ \eta = \eta(u_1,v_1) = y(u(u_1,v_1), v(u_1,v_1)) \\ \zeta = \zeta(u_1,v_1) = z(u(u_1,v_1), v(u_1,v_1)) \end{cases}$

т.е. $\vec{\rho}(u_1, v_1) = \vec{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$

Определение 4.8. *Замена параметров при данном отображении называется допустимой, если:*

1) $F : \overline{D}_1 \to \overline{D}$ - диффеоморфзим, причем внутренние точки D_1 отображаются во внутренние точки D ($\Rightarrow \partial D_1 \leftrightarrow \partial D$)

2) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \neq 0$ в $\overline{D}_1$ $\left(\Rightarrow \dfrac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} \neq 0 \text{ в } \overline{D}\right)$

Найдем, чему равно $\overline{\rho}'_{u_1} \times \overline{\rho}'_{v_1}$.

$$\begin{cases} \overline{\rho}'_{u_1} = \overline{r}'_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial u_1} + \overline{r}'_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial u_1} \\ \overline{\rho}'_{v_1} = \overline{r}'_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial v_1} + \overline{r}'_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial v_1} \end{cases} \Rightarrow \overline{\rho}'_{u_1} \times \overline{\rho}'_{v_1} = \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v \left[\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial v}{\partial v_1}\frac{\partial u}{\partial u_1}\right] = \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}$$

Следствия.

1. При допустимой замене параметрически заданная поверхность переходит в параметрически заданную поверхность с сохранением условий из пункта 1.1.

2. Касательная плоскость и нормаль сохраняются при допустимой замене.

Пункт 2.2 Поверхностный интеграл I-го рода

Пусть задана поверхность $\Phi := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $u, v \in \overline{D}$, с условиями из пункта 1.1, без особых точек.

Определение 4.9. *Пусть $f : \Phi \to \mathbb{R}$. Тогда интегралом I-го рода по поверхности Φ (если этот интеграл $\exists$) называется выражение:*

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)ds := \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|dudv \quad (1)$$

Замечания.

1. $\iint\limits_{\Phi}$ существует $\Leftrightarrow \tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in R(D)$
2. Интеграл (1) не меняется при допустимой замене параметра.

Докажем 2-ое замечание.

$$\iint\limits_{\tilde{\Phi}} \tilde{f}(\xi,\eta,\zeta)ds = \iint\limits_{D} \tilde{f}(\xi(u_1,v_1),(u_1,v_1),\zeta(u_1,v_1))|\overline{\rho}'_{u_1} \times \overline{\rho}'_{v_1}|du_1dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f\Big(x(u(u_1,v_1),v(u_1,v_1)), y(u(u_1,v_1),v(u_1,v_1)), z(u(u_1,v_1),v(u_1,v_1))\Big)|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}du_1dv_1 =$$

$$\underset{\text{параметра}}{\overset{\text{замена}}{=}} \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|dudv = \iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)ds$$

3. Если Φ - кусочно-гладкая ($\Phi = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Phi_k$), Φ_k - гладкие, $\Phi_k \bigcap \Phi_j =$ граница.

Тогда $\iint\limits_{\phi} f = \sum\limits_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Phi_k} f$

4. Интеграл I-го рода не зависит от стороны поверхности.

Пункт 2.3 Поверхностный интеграл II-го рода

Пусть задана поверхность $\Phi := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $u, v \in \overline{D}$, с условиями из пункта 1.1, без особых точек.

Определение 4.10. *Пусть $P, Q, R \in C(\Phi) : \Phi \to \mathbb{R}$. Тогда интегралом II-го рода по (ориентированной) поверхности Φ от вектора $\vec{a} = (P, Q, R)$ называется выражение:*

$$\iint\limits_{\Phi^{\vec{n}}} \Big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\Big)ds \overset{(1)}{=} \iint\limits_{\Phi^{\vec{n}}} (\vec{a}, \vec{n})ds$$

где $\vec{n} = \pm\dfrac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\Phi^{\vec{n}}$ - поверхность с заданной ориентацией.

Замечания.

1. Интеграл II-го рода зависит от ориентации поверхности.

2. Интеграл (1) не меняется при допустимой замене параметров, если эта замена сохраняет сторону поверхности.

3. Интеграл (1) меняет знак при замене ориентации $\vec{n} \to -\vec{n}$.

4. На кусочной поверхности интеграл определяется как $\sum$ интегралов по гладким кускам.

Говорят, что поверхность Φ положительно ориентирована, если $\vec{n} = +\dfrac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}$. В этом случае пишут $\Phi^{\vec{n}} = \Phi^+$ и $\iint\limits_{\Phi^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy := \iint\limits_{\Phi^{\vec{n}}} (\vec{a}, \vec{n})ds$

Тогда имеем:

$$\iint\limits_{\Phi^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{\Phi} P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma ds =$$

$$= \iint\limits_{D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|dudv \boxed{=}$$

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$. Пусть $\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = (A, B, C)$, где $A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$,

$C = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, а $\cos\alpha = \dfrac{A}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}$. Тогда

$$\boxed{=} \iint\limits_D (PA + QB + RC) dudv = \iint\limits_D (\vec{a}, \overline{r}'_u \times \overline{r}'_v) dudv$$

Пункт 2.4 Формула Стокса

Пусть Φ - простая поверхность, т.е. $\Phi = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \overline{D}_1$, с условиями из пункта 1.1, без особых точек, с краем. Тогда $\partial\Phi := \{\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in \partial D\}$. ∂D - кусочно-гладкий $\Rightarrow$ край Γ поверхности Φ - тоже кусочно-гладкий.

Обход $\partial D =: L$ индуцирует соответствующий обход Γ - ориентация края (обход Γ).

Замечание.

Ориентация края Γ называется соответствующей (согласованной) с ориентацией $\Phi \Leftrightarrow$ (∂D индуцирован соответствено обходу Γ)$\wedge$($\vec{n} = +\dfrac{\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v}{|\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v|}$)

Теорема 4.1. *(Формула Стокса)*

Пусть задана простая поверхность $\Phi \subset G$ с условиями из пункта 1.1, G - область в $\mathbb{R}^3$, причем ∂D - гладкий и $x, y, z \in C^2(\overline{D})$, и пусть $P, Q, R \in C^1(G)$.

Тогда, если ориентация Γ согласована с ориентацией Φ, то справедлива формула Стокса:

$$\int\limits_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\Phi \Big((Q'_x - P'_y)\cos\gamma + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (R'_y - Q'_z)\cos\alpha \Big) ds \quad (2)$$

Доказательство.

Достаточно доказать формулу $\int\limits_\Gamma Pdx = \iint\limits_\Phi P'_z \cos\beta - P'_y \cos\gamma ds$ (3).

Кривая $L := \partial D : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ $t_0 \leqslant t \leqslant T$, и $\Gamma : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$ $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Имеем:

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx \overset{\text{Гл.3}}{=} \int\limits_{t_0}^{T} P\cdot x'_t dt = \int\limits_{t_0}^{T} P(x'_u u'_t + x'_v v'_t)dt \overset{\text{Гл.3}}{=} \int\limits_{L} P(x'_u du + x'_v dv) \overset{T.3.5}{=} \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial}{\partial u}(Px'_u) - \frac{\partial}{\partial v}(Px'_v)\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left((P'_x\frac{\partial x}{\partial u} + P'_y\frac{\partial y}{\partial u} + P'_z\frac{\partial z}{\partial u})x'_v - (P'_x\frac{\partial x}{\partial v} + P'_y\frac{\partial y}{\partial v} + P'_z\frac{\partial z}{\partial v})x'_u\right)dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} c\cdot P'_x + P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + P'_y(y'_u x'_v - y'_v x'_u)dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(P'_z\cdot \underset{\overline{r}'_u\times\overline{r}'_v=(A,B,C)}{\frac{B}{|\overline{r}'_u\times\overline{r}'_v|}} - P'_y\frac{C}{|\overline{r}'_u\times\overline{r}'_v|}\right)\underbrace{|\overline{r}'_u\times\overline{r}'_v|dudv}_{ds} \overset{\text{см. Опр.4.9}}{=} \iint\limits_{\Phi} (P'_z\cos\beta - P'_y\cos\gamma)ds \Rightarrow (3)$$

■

Замечания.

1. Формула Стокса верна для $x, y, z \in C^1(\overline{D})$.

2. Формула Стокса верна для кусочно-гладких поверхностей.

3. Формула (2) при обозначении $\vec{a} = (P, Q, R)$ может быть записана в виде $\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r}) = \iint\limits_{\Phi}(rot\ \vec{a}, \vec{n})ds$ - поток вихря поля $\vec{a}$, где $\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r})$ - циркуляция поля $\vec{a}$ по краю Γ, $rot\ \vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$

4. $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\Phi}(Q'_x - P'_y)dxdy + (P'_z - R'_x)dzdx + (R'_y - Q'_z)dydz$, если у Φ выбрана соответствующая сторона.

Пункт 2.5 Формула Гаусса-Остроградского

Определение 4.11. *Область G называется простой относительно $Oz \overset{def}{\Leftrightarrow}$*

$G := \{\varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y); (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2; \varphi_1, \varphi_2 \in C(\overline{D}), \in C^1(D)\}$

Определение 4.12. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$. Область G называется допустимой, если G может быть разрезана на конечное число областей G_z^k, $k = \overline{1, N_z}$, простых относительно Oz. Аналогично для Ox и Oy.*

Теорема 4.2. *(Формула Гаусса-Остроградского)*

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$, G *- допустимая область, и пусть* $P, Q, R \in C^1(\overline{G})$. *Тогда:*

$$\iint\limits_{\Phi} \Big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\Big)ds = \iiint\limits_{G} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big)dxdydz \quad (1)$$

где $\Phi = \partial G$, $\vec{n}$ *- внешняя нормаль относительно* G.

Доказательство.

Достаточно доказать формулу для R:

$$\iint\limits_{\Phi} R\cos\gamma ds = \iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz \quad (2)$$

для случая, когда G - простая относительно Oz. Имеем:

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz \overset{T.2.17}{=} \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{D} \Big(R(x,y,\Phi_2(x,y)) - R(x,y,\Phi_1(x,y))\Big)dxdy =$$

$$\overset{\text{см. Опр.}4.9}{=} \iint\limits_{\Phi_2} R\cos\gamma ds + \iint\limits_{\Phi_1} R\cos\gamma ds + \iint\limits_{\Phi_3} R \underbrace{\cos\gamma}\, ds = \iint\limits_{\Phi} R\cos\gamma ds \Rightarrow (2)$$

■

Замечания.

1. Формула Гаусса-Остроградского верна для ограниченной области G с кусочно-гладкой поверхностью ∂G.

2. Формула (1) может быть записана в виде $\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iiint\limits_{G} div\ \vec{a}\ dxdydz$.