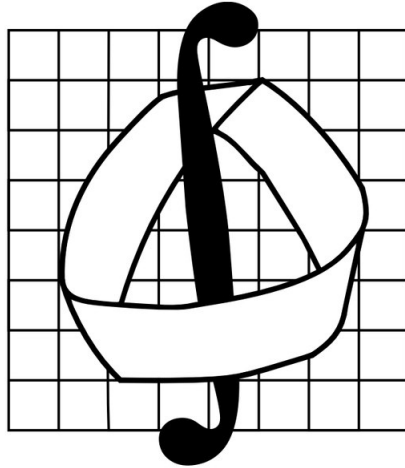




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
факультет механико-математический



Ряды и несобственные интегралы, зависящие от параметра

Лектор — профессор Бадерко Е. А.

2 курс, 3 семестр

Последняя компиляция: 18 февраля 2019г.

Оглавление

Глава 1. Числовые ряды	2
§1. Числовые ряды и их основные свойства	2
Пункт 1.1. Понятие числового ряда	2
Пункт 1.2. Комплексные числовые ряды	2
Пункт 1.3. Необходимое условие сходимости ряда	3
Пункт 1.4. Свойства сходящихся рядов	3
Пункт 1.5. Критерий Коши	5
§2. Знакоположительные ряды	5
Пункт 2.1. Введение	5
Пункт 2.2. Признаки сравнения	5
Пункт 2.3. Признак Даламбера	6
Пункт 2.4. Радикальный признак Коши	7
Пункт 2.5. Интегральный признак Коши	8
§3. Знакопеременные ряды	9
Пункт 3.1. Абсолютная и условная сходимость	9
Пункт 3.2. Умножение рядов	12
Пункт 3.3. Знакопеременные ряды	14
Пункт 3.4. Признаки сходимости Дирихле и Абеля	15
Глава 2. Функциональные ряды	17
§1. Функциональные последовательности	17
Пункт 1.1. Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимости	17
Пункт 1.2. Два признака равномерной сходимости. Признак Дини	17
Пункт 1.3. Предельный переход функциональной последовательности	18
Пункт 1.4. Интегрируемость функциональных последовательностей	19
Пункт 1.5. Дифференцируемость функциональных последовательностей	20
§2. Функциональные ряды	21
Пункт 2.1. Равномерная сходимость функционального ряда	21
Пункт 2.2. Свойства равномерно сходящихся рядов	21
Пункт 2.3. Признаки равномерной сходимости рядов	22
§3. Степенные ряды	24
Пункт 3.1. Радиус и интервал сходимости	24
Пункт 3.2. Равномерная сходимость степенного ряда. Вторая теорема Абеля	26
Пункт 3.3. Сумма и произведение степенных рядов. Комплексные степенные ряды	27
Пункт 3.4. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов	27
§4. Ряд Тейлора	28
Пункт 4.1. Ряд Тейлора. Единственность разложения	28
Пункт 4.2. Основные разложения	29
Глава 3. Интегралы, зависящие от параметра	32
§1. Собственные интегралы	32
Пункт 1.1. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра	32
Пункт 1.2. Предельный переход под знаком интеграла	33
Пункт 1.3. Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра	33
Пункт 1.4. Интегрируемость интеграла, зависящего от параметра	34
§2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	34
Пункт 2.1. Несобственные интегралы на бесконечном промежутке интегрирования	34
Пункт 2.2. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами	36
Пункт 2.3. Предельный переход в несобственном интеграле	37
Пункт 2.4. Дифференцирование несобственных интегралов	38
Пункт 2.5. Интегрируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра	39

Пункт 2.6. Несобственные интегралы от неограниченных функций, зависящие от параметра	41
§3. Интегралы Эйлера	42
Пункт 3.1. Гамма-функция Эйлера (интеграл Эйлера второго рода)	42
Пункт 3.2. Бета-функция Эйлера (интеграл Эйлера первого рода)	43
§4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции полиномами	43
Глава 4. Ряды Фурье	45
§1. Ряды Фурье по ортогональным системам функций	45
Пункт 1.1. Ортогональные системы функций	45
Пункт 1.2. Ортогональность и линейная независимость функций	46
Пункт 1.3. Ряд Фурье по ортогональной системе функций	46
§2. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье	47
Пункт 2.1. Тригонометрические ряды Фурье	47
Пункт 2.2. Достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке	47
Пункт 2.3. Теорема Фейера	49
Приложение	51
Вопросы коллоквиума	51
Экзаменационные вопросы	51
Литература	53

Числовые ряды

§1. Числовые ряды и их основные свойства

Пункт 1.1. Понятие числового ряда.

$$a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ (или } \mathbb{N}^* = \{0\} \cup \mathbb{N}\text{)}$$

Определение 1. Формальная сумма

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

называется *числовым рядом*, а a_n *общим членом* ряда (1).

Определение 2. $S_k = \sum_{n=1}^k a_n$ называется *частичной суммой* ряда (1).

Определение 3. Говорят, что ряд (1) *сходится*, если $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \in \mathbb{R}$, при этом $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$ называется *суммой* ряда (1).

Определение 4. Говорят, что ряд (1) *расходится*, если ряд не сходится (то есть не существует конечный предел $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k$).

Замечание. В (1) нумерация n начинается с $n = 1$. На самом деле, иногда удобно писать $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Более общо, $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ называется рядом.

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in \mathbb{R}$$

$$1. |q| \neq 1. S_k = \sum_{n=0}^k q^n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \text{ (сходится)} \\ \infty & |q| > 1 \text{ (расходится)} \end{cases}$$

$$2. q = 1. S_k = k + 1 \longrightarrow +\infty \text{ (расходится)}$$

$$3. q = -1. \text{ Так как } S_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ 0, & k = 2n + 1 \end{cases}, \text{ то } \nexists \lim \text{ (расходится)}$$

Замечание. Очевидна связь между сходимостью ряда и некоторой последовательности. А именно:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится} \iff \text{сходится последовательность } S_n$$

2. Рассмотрим последовательность $(a_n, n \in \mathbb{N})$ и определим ряд $a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + \dots$. Тогда последовательность $(a_n, n \in \mathbb{N})$ сходится \iff сходится ряд $a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$.

Основные вопросы. 1. Сходится или нет (1).

2. Если сходится, то чему равна S .

Пункт 1.2. Комплексные числовые ряды.

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Определение 5. Формальная сумма

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

называется *числовым рядом*.

Определение 6. Частичная сумма $C_k = \sum_{n=1}^k c_n$.

Определение 7. Говорят, что ряд (5) сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_k = a$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} B_k = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, где $A_k = \sum_{n=1}^k a_n$, $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$.

Следствие. Ряд (5) сходится тогда и только тогда, когда сходятся $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Следовательно, достаточно рассматривать вещественные ряды.

Пункт 1.3. Необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 8 (Необходимое условие сходимости ряда). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство. По определению сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S \in \mathbb{R}$. Тогда $a_n \stackrel{n \geq 2}{=} S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S - S = 0$. □

Замечание. Условие теоремы 8 не является достаточным.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

расходится.

Доказательство. $S_k = 1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}}}_{k \text{ слагаемых}} \geq k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} \rightarrow +\infty$.

(Аналогично доказывается расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ для $0 < p < 1$). □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$$

расходится, так как $a_n \rightarrow \frac{2}{3} \neq 0$, то есть нарушен необходимый признак сходимости ряда.

Пример (Модельный ряд).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}$$

- a) $p \leq 0$, $a_n \not\rightarrow 0$ — расходится
- b) $0 < p < 1$, доказывалось раньше — расходится
- c) $p = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармонический ряд — расходится
- d) $p > 1$ — сходится (докажем позже).

Пункт 1.4. Свойства сходящихся рядов. Рассмотрим ряд:

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Определение 9. Ряд $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ называется *остатком* ряда (1.4).

Теорема 10. Пусть ряд (1.4) сходится. Тогда $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ сходится $\forall k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Его частичная сумма («отрезок» ряда (1.4)) $S_{k,m} = \sum_{n=k+1}^m a_n = S_m - S_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S - S_k \in \mathbb{R}$. Стало быть, $r_k = S - S_k$ и ряд $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ сходится. □

Теорема 11. Пусть $\exists k_0 : \sum_{n=k_0+1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда (1.4) сходится, причем $S = S_{k_0} + r_{k_0}$.

Доказательство. По условию $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=k_0+1}^m a_n = r_{k_0} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_m - S_{k_0})$. В силу того, что существуют пределы $\lim_{m \rightarrow \infty} (S_m - S_{k_0})$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{k_0}$, существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} ((S_m - S_{k_0}) + S_{k_0}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$. Последнее равносильно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Следствие. Если ряд (1.4) сходится, то $r_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство. $r_k = S - S_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S - S = 0$. \square

Следствие. Сходимость (расходимость) ряда (1.4) не меняется, если изменить конечное число членов ряда.

Обозначение. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна $S \in \mathbb{R} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$.

Определение 12. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ называется *произведением* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на число λ , где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 13. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и пусть его сумма равна S . Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ сходится, причем его сумма равна λS .

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \lambda a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda \sum_{n=1}^k a_n = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n = \lambda S$. \square

Замечание. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, вообще говоря, не достаточно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пример. $\lambda = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходящийся ряд.

Определение 14. Суммой рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Теорема 15. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и пусть их суммы равны A и B соответственно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится, причем его сумма равна $A + B$.

Замечание. Сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, вообще говоря, не достаточно для сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример. $a_n = n$, $b_n = -n$.

Следствие. Сумма сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ является расходящимся рядом.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + b_n) + (-a_n))$ сходится. Противоречие. \square

Замечание. Сумма двух расходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ может как сходиться, так и расходиться.

Пример. $a_n = n$, $b_n = -n$.

Пример. $a_n = n$, $b_n = n$.

Группировка членов ряда (без изменения порядка его членов) не изменяет факта сходимости ряда.

Теорема 16. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ и дана последовательность $(m_n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$ со свойством: $m_1 = 1, m_n \uparrow \uparrow$ (по n). Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, при том его сумма равна A , где $b_n = \sum_{i=m_n}^{m_{n+1}-1} a_i, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. По условию $A_k = \sum_{n=1}^k a_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$. Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$: $B_k = \sum_{n=1}^k b_n = b_1 + \dots + b_k = \sum_{i=1}^{m_2-1} a_i + \dots + \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} a_i = \sum_{i=1}^{m_{k+1}-1} a_i = A_{m_{k+1}-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$. Стало быть, $B_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$. \square

Замечание. Группировка членов ряда может изменить факт сходимости ряда.

Пример. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расходится (т.к. $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$), а $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$ сходится.

Пункт 1.5. Критерий Коши. Из критерия Коши для числовой последовательности $\left(S_k = \sum_{n=1}^k a_n, k \in \mathbb{N} \right)$ следует

Теорема 17 (Критерий Коши). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=k+1}^{k+m} a_n \right| < \varepsilon, \forall k \geq N, \forall m \in \mathbb{N}$.

Следствие. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится $\iff \exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists k \geq N \exists m \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=k+1}^{k+m} a_n \right| \geq \varepsilon$.

Пример (Гармонический ряд).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

Доказательство. Имеем, $\sum_{n=k+1}^{k+k} a_n = \underbrace{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}}_{k \text{ слагаемых}} \geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} = \varepsilon$. Окончательно, $\exists \varepsilon (= \frac{1}{2}) > 0$:

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists k (= N) \exists m (= k) : \left| \sum_{n=k+1}^{k+m} a_n \right| \geq \varepsilon. \quad \square$$

§2. Знакоположительные ряды

В этом параграфе всюду рассматриваются ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с $a_n \leq 0$ исследуются рассмотрением рядов $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Замечание. На самом деле, всюду дальше можно рассматривать ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$, $\forall n \geq N$.

Пункт 2.1. Введение. Напомним:

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Монотонно возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится.*

Теорема 2 (Критерий сходимости знакоположительных рядов). *Пусть $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм $(S_k, k \in \mathbb{N})$ ограничена сверху.*

Доказательство. Необходимость следует из выполнения всех условий теоремы 1 (Вейерштрасса). Достаточность же следует из свойств сходящихся последовательностей. \square

Обозначение. $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится \iff $\overset{\text{обозн.}}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} < \infty$.

Обозначение. $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится \iff $\overset{\text{обозн.}}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} = \infty$.

Пункт 2.2. Признаки сравнения.

Теорема 3 (Признаки сравнения). *Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда:*

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;
2. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

Доказательство. 1. Так как по теореме 2 последовательность $(B_k = \sum_{n=1}^k b_n, k \in \mathbb{N})$ ограничена, то $\exists M > 0$:

$0 \leq B_k \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$ Поэтому $0 \leq A_k = \sum_{n=1}^k a_n \leq \sum_{n=1}^k b_n = B_k \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Окончательно, по теореме 2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2. От противного. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Тогда по пункту 1 текущей теоремы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Противоречие. \square

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

расходится.

Доказательство. Так как $\ln(n) \leq n$ при $n \geq 2$, то $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$. Поэтому $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. \square

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{\alpha}(n)}{n^p}, \quad p > 1, \alpha > 0$$

сходится.

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ (интегральный признак, позже). Пусть $\varepsilon > 0$: $p - \varepsilon > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\varepsilon}} < \infty$. Имеем, $0 < \frac{\ln^\alpha(n)}{n^\varepsilon} \leq M$, для некоторого $M > 0$, $n \geq 2$. В самом деле, последовательность $(\frac{\ln^\alpha(n)}{n^\varepsilon}, n \geq 2)$ сходится, поэтому она ограничена. В итоге, $\frac{\ln^\alpha(n)}{n^p} \leq \frac{M}{n^{p-\varepsilon}}$, но $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{M}{n^{p-\varepsilon}} < \infty$. Окончательно, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^\alpha(n)}{n^p} < \infty$. \square

Теорема 4 (Предельный признак сравнения). Пусть $a_n, b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся (расходятся) одновременно.

Доказательство. Предварительно заметим, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} M a_n$, где $M \in \mathbb{R}$, $M \neq 0$, сходятся (расходятся) одновременно.

Так как $a_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$, то $a_n = h_n b_n$, $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \iff \frac{b_n > 0}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Поэтому $\exists M > 0$: $0 < \frac{a_n}{b_n} \leq M$ тогда и только тогда, когда $a_n \leq M b_n$. Далее по теореме 3 (Признаки сравнения). \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^{10} + \sqrt{n}}$$

сходится.

Доказательство. $\frac{1}{2^n + n^{10} + \sqrt{n}} \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n}{\sqrt{9n^6 + n^5 + n}}$$

расходится.

Доказательство. $\frac{n^2 + n}{\sqrt{9n^6 + n^5 + n}} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^{100} + 1}{3^n + \ln(n)}$$

сходится.

Доказательство. $\frac{e^n + n^{100} + 1}{3^n + \ln(n)} \sim \left(\frac{e}{3}\right)^n$, причем $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n < \infty$. \square

Пункт 2.3. Признак Даламбера.

Теорема 5 (Признак Даламбера). Пусть $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и

$$(4) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad 0 \leq q \leq \infty.$$

Тогда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \text{ если } q < 1;$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ если } q > 1.$$

Сперва докажем одну лемму.

Лемма 6. Пусть $a_n, b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$(5) \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Тогда:

$$1. \text{ Если } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty;$$

$$2. \text{ Если } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty.$$

Доказательство. (6) $\iff \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, $\frac{a_n}{b_n} \downarrow$ (по n). Следовательно, $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_1}{b_1} = M \neq 0$. Далее по теореме 4 (Предельный признак сравнения). \square

Доказательство теоремы 5. 1. Пусть $r \in (q; 1)$ — фиксировано. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty$. Так как (5), то $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow q < r$. Отсюда $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$, $n \geq n_0$. Но $\sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty$. Окончательно, по лемме 6 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$, то $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, $n \geq n_0$. Стало быть, последовательность $(a_n, n \geq n_0)$ монотонно возрастает, поэтому $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. □

Обозначение. $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$; $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

сходится.

Доказательство. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} < 1$ □

Замечание. Условие теоремы 5 для $q = 1$ не дает ответа.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots \rightarrow 1$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$. Но $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$,

поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. □

Напомним:

Определение 7. Говорят, что $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} O(\beta_n)$, если $\alpha_n = h_n \beta_n$, где h_n — ограниченная последовательность.

Если при этом $\beta_n \neq 0$, то $\alpha_n = O(\beta_n) \iff \exists M > 0 : \left| \frac{\alpha_n}{\beta_n} \right| \leq M, \forall n$.

Теорема 8 (Признак Гаусса). Пусть $a_n > 0$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, если $\lambda > 1$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, если $\lambda < 1$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, если $\lambda = 1$ и $\mu > 1$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, если $\lambda = 1$ и $\mu \leq 1$.

Доказательство. Без доказательства. □

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$$

сходится при $p > 2$.

Доказательство. Обозначим $a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$. Тогда $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{(2n-1)!!(2n+2)!!}{(2n+1)!!(2n)!!} \right]^p = \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p$ формула Тейлора
 $= 1 + \frac{p}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Так как $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то по теореме 8 (Признак Гаусса) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \frac{p}{2} > 1 \iff p > 2$. □

Пункт 2.4. Радикальный признак Коши.

Теорема 9 (Радикальный признак Коши). Пусть $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ и

$$(6) \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \quad 0 \leq q \leq \infty.$$

Тогда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} < \infty$, если $q < 1$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} = \infty$, если $q > 1$.

Доказательство. 1. Пусть $r \in (q, 1)$ — фиксировано. Из (9) следует, что, $\sqrt[n]{a_n} < r, n \geq n_0$, то есть $a_n < r^n, n \geq n_0$. Но $\sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty$. Окончательно, по теореме 3 (Признаки сравнения) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то $\sqrt[n]{a_n} > 1, n \geq n_0$. Иными словами, $a_n > 1, n \geq n_0$. Стало быть, последовательность $(a_n, n \geq n_0)$ возрастает, поэтому $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. □

Замечание. Условие теоремы 9 для $q = 1$ не дает ответа.

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha}(n)}$$

сходится при $\alpha > 1$ (докажем позже). При этом $\sqrt[n]{\frac{1}{n \ln^{\alpha}(n)}} = e^{-\frac{1}{n} \ln(n \ln^{\alpha}(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$$

сходится.

Доказательство. $\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^n = \left(1 + \frac{(-1)}{n+3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$. □

Теорема 10 (Формула Стирлинга). $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Доказательство. Без доказательства. □

Замечание. Пусть $\alpha_n, \beta_n \geq 0$, причем $\alpha_n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \beta_n$. Тогда $\sqrt{\alpha_n} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\beta_n}$. Более общо, $\sqrt[k]{\alpha_n} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt[k]{\beta_n}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$$

расходится.

Доказательство. $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\frac{n}{e} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n}{e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. □

Пункт 2.5. Интегральный признак Коши. Напомним:

Теорема 11. Пусть $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \uparrow$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R} \iff f$ ограничена.

Теорема 12 (Интегральный признак Коши). Пусть $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна и монотонно убывает на $[1, +\infty)$ и пусть $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ тогда и только тогда, когда $\int_1^{+\infty} f(x) dx < \infty$.

Доказательство. Для всякого $b > 1$ функция f монотонна на $[1, b]$, поэтому по достаточному условию интегрируемости функции по Риману $f \in R[1, b]$.

Имеет место следующее двойное неравенство:

$$(7) \quad a_2 \dots + a_n \leq \int_1^n f(x) dx \leq a_1 + \dots + a_{n-1}$$

В самом деле, пусть $x \geq 1$. тогда $\exists p \in \mathbb{N} : p \leq x \leq p+1$. В силу монотонности функции f $a_{p+1} \leq f(x) \leq a_p$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} a_{i+1} dx \leq \int_1^n f(x) dx = \left(\int_1^2 + \dots + \int_{n-1}^n \right) f(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} a_i dx.$$

\Rightarrow Последовательность $(S_n, n \in \mathbb{N})$ частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена, а именно $S_n \leq S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. Тогда функция F на $[1; +\infty)$ удовлетворяет условию теоремы.

Докажем, что F ограничена (сверху). Имеем: $\forall x \geq 1, \forall n \geq x : 0 \leq F(x) \leq F(n)$. Но так как (2.5), то $F(x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i = S_{n-1} \leq S$. Отсюда, F — ограничена сверху. Поэтому $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt \in \mathbb{R}$, что равносильно сходимости

интеграла $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

\Leftarrow $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t) dt \in \mathbb{R}$. Поэтому функция $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ — ограничена сверху. Поэтому последовательность $(F(n), n \in \mathbb{N})$ тоже ограничена сверху. Но так как (2.5), то $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = a_1 + \dots + a_n = a_1 + (a_2 + \dots + a_n) \leq a_1 + F(n) \leq a_1 + \sup_{m \in \mathbb{N}} F(m)$. Отсюда, последовательность $(S_n, n \in \mathbb{N})$ — ограничена, что по теореме 2 (Критерий

сходимости знакоположительных рядов) равносильно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Замечание. Достаточно рассматривать $f : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Следствие (Модельный ряд).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R}$$

сходится при $p > 1$.

Доказательство. Если $p \leq 0$, то $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то есть ряд расходится. Пусть $p > 0$. Рассмотрим функцию $f = \frac{1}{x^p}$. Легко убедиться, что она удовлетворяет условиям теоремы 12 на $[1, +\infty)$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Он сходится при $p > 1$, поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1$. \square

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha}(n)}$$

сходится при $\alpha > 1$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha}(x)} \cdot \int_2^A \frac{dx}{x \ln^{\alpha}(x)} = \int_2^A \frac{d(\ln(x))}{(\ln(x))^{\alpha}} = \int_{\ln(2)}^{\ln(A)} \frac{dy}{y^{\alpha}} = F(A)$. Поэтому $\exists \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) \iff \alpha > 1$. \square

§3. Знакопеременные ряды

В этом параграфе рассматриваем *знакопеременные* (не путать со знакочередающимися) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, знак a_n зависит от n и ряды комплексные $a_n \in \mathbb{C}$.

Замечание. Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ общего вида (знакопеременные или $a_n \in \mathbb{C}$) справедливы теоремы 1.8 (Необходимое условие сходимости ряда) и 1.17 (Критерий Коши).

Пункт 3.1. Абсолютная и условная сходимость.

Определение 1. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *абсолютно*, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Определение 2. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *условно*, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

сходится условно (докажем позже, признак Лейбница).

Теорема 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ($\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$), сходится абсолютно тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < \infty$.

Доказательство. \implies Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. $|a_n| \leq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = |a_n|$. По теореме 2.3 (Признаки сравнения) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$.

Аналогично доказывается, что $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < \infty$.

\impliedby Так как $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty$. Но $|a_n|^2 = |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 \leq (|\alpha_n| + |\beta_n|)^2$,

поэтому $|a_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$. По теореме 2.3 (Признаки сравнения) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. \square

Теорема 4. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.17 (Критерий Коши). Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \sum_{n=k+1}^{k+m} |a_n| < \varepsilon, \forall k > N, \forall m \in \mathbb{N}$. Поэтому $\left| \sum_{n=k+1}^{k+m} a_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{k+m} |a_n| < \varepsilon, \forall k > N, \forall m \in \mathbb{N}$. \square

Замечание. Сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, вообще говоря, не достаточно для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3i-1)^n}{b^n}$$

сходится при $b > \sqrt{10}$.

Доказательство. Обозначим $a_n = \frac{n(3i-1)^n}{b^n}$. Тогда $|a_n| = \frac{n(\sqrt{10})^n}{b^n}$ и $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)\sqrt{10}}{nb} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{10}}{b}$. Но по теореме 2.5 (Признак Даламбера) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \iff b > \sqrt{10}$.

Если $b \leq \sqrt{10}$, то $|a_n| = n \left(\frac{\sqrt{10}}{b}\right)^n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому $a_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \square

Теорема 5 (О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Тогда сумма ряда $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ($a_n \in \mathbb{R}$) не зависит от перестановки его членов.

Доказательство. Пусть дана биекция $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Обозначим $p(n) = p_n$. Введем обозначения:

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n, \quad T_k = \sum_{n=1}^k a_{p_n}, \quad \widehat{S}_k = \sum_{n=1}^k |a_n|, \quad \widehat{T}_k = \sum_{n=1}^k |a_{p_n}|.$$

Имеем, $\widehat{T}_k = |a_{p_1}| + |a_{p_2}| + \dots + |a_{p_k}|$. Пусть $q_k = \max\{p_1, \dots, p_k\}$. Тогда $\widehat{T}_k \leq \sum_{n=1}^{q_k} |a_n| = \widehat{S}_{q_k} \leq C$ для некоторого фиксированного $C > 0$ и $\forall k \in \mathbb{N}$. ($\widehat{T}_k, k \in \mathbb{N}$) — неубывающая и ограниченная последовательность. Поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p_n}| < \infty$.

Обозначим $T = \sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$. Заметим, что $\forall N \in \mathbb{N} \exists L_N \in \mathbb{N}, L_N \geq N: \{a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_{L_N}}\} \supset \{a_1, \dots, a_N\}$. Тогда $T_{L_N} = S_N + \sum_{n>N} a_n$. Обозначим $\rho_N = \sum_{n>N} a_n$. Так как $L_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$, то $|\rho_N| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \widehat{r}_N$ — остаток ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, который сходится, а значит $\widehat{r}_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Переходя к пределу, получаем $0 \xleftarrow{N \rightarrow \infty} |\rho_N| = |T_{L_N} - S_N| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} |T - S|$. \square

Определение 6. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится безусловно, если любой ряд, полученный из $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ перестановкой его членов, сходится.

Теорема 7. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда он сходится безусловно.

Доказательство. $\boxed{\implies}$ Теорема 5.

$\boxed{\impliedby}$ Из [4, стр. 46]. Достаточно показать, что условно сходящийся ряд

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

не может сходиться безусловно.

Пусть ряд (3.1) сходится условно. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Пусть α_k есть k -й по порядку положительный член ряда (3.1), а β_l есть l -й по порядку отрицательный член ряда (3.1). Тогда, как было показано ранее¹, имеем $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$, $\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l = -\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{l \rightarrow \infty} \beta_l = 0$.

Выберем из ряда (3.1) подряд все положительные члены так, что $S_{k_1} = \sum_{s=1}^{k_1} \alpha_s > 1$, и затем добавим первый отрицательный член $\beta_1 < 0$. После этого из оставшихся положительных членов ряда (3.1) выберем подряд столько, чтобы $S_{k_2+1} = S_{k_1} + \beta_1 + \sum_{s=k_1+1}^{k_2} \alpha_s > 2$ (это возможно, поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$). Затем добавим второй отрицательный член $\beta_2 < 0$ и вновь наберем столько положительных членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, чтобы $S_{k_3+2} = S_{k_2+1} + \beta_2 + \sum_{s=k_2+1}^{k_3} \alpha_s > 3$.

¹Если обозначить $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$, $s_n^+ = \sum_{k=1}^n \max\{0, a_k\}$, $s_n^- = \sum_{k=1}^n \min\{0, a_k\}$, то $2s_n^+ = s_n + \sigma_n$, $2s_n^- = s_n - \sigma_n$.

На n -м шаге получим $S_{k_n+n-1} = \sum_{s=1}^{k_1} \alpha_s + \beta_1 + \sum_{s=k_1+1}^{k_2} \alpha_s + \beta_2 + \dots + \sum_{s=k_{n-1}+1}^{k_n} \alpha_s > n$, $S_{k_n+n} = S_{k_n+n-1} + \beta_n$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_n+n-1} = +\infty$ и поэтому ряд

$$(9) \quad \sum_{s=1}^{k_1} \alpha_s + \beta_1 + \dots + \sum_{s=k_{n-1}+1}^{k_n} \alpha_s + \beta_n + \dots,$$

полученный из ряда (3.1) перестановкой его членов, расходится.

В самом деле, если бы ряд (3.1) сходился, то $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$, где S_m — m -я частичная сумма ряда (3.1). Поскольку (S_{k_n+n}) и (S_{k_n+n-1}) — подпоследовательности последовательности (S_m) , то имели бы $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_n+n-1} = S$, что противоречит доказанному равенству $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_n+n} = +\infty$. Из оценок $k_{n-1} + n - 1 \leq m < k_n + n$ и $S_{k_{n-1}+n-1} \leq S_m \leq S_{k_n+n-1}$ имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \infty$. Итак, если ряд (3.1) сходится условно, то этот ряд не может сходиться безусловно. \square

Теорема 8 (Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). *Каково бы ни было вещественное число A , найдется сходящаяся перестановка $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ условно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A$.*

Доказательство. Из [5, стр. 355]. Для простоты будем считать, что $a_n \neq 0$ для всех n . Сначала в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ выделяем все положительные слагаемые α_k и отрицательные слагаемые β_l , нумеруя их индексами k и l в порядке следования в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Затем составляем перестановку $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: в качестве b_1 берем α_1 , если $A \geq 0$, и β_1 , если $A < 0$.

Далее мы добавляем в общую сумму $\sum_{m=1}^n b_m$ очередные слагаемые по следующему правилу: если сумма не превышает A , то добавляем очередное положительное слагаемое $b_{n+1} = \alpha_{k_1}$, а если она превосходит A , то добавляем очередное отрицательное слагаемое $b_{n+1} = \beta_{l_1}$. В результате этого сумма все время колеблется вокруг значения A , причем размах колебаний постепенно убывает до нуля, и в пределе для суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ мы получаем требуемое значение A .

Для определенности будем считать, что $A > 0$. Тогда по построению ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет такую структуру:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{\alpha_1 + \dots + \alpha_{k_1}}_{A_1} - \underbrace{\beta_1 - \dots - \beta_{l_1}}_{B_1} + \underbrace{\alpha_{k_1+1} + \dots + \alpha_{k_2}}_{A_2} - \underbrace{\beta_{l_1+1} - \dots + \beta_{l_2}}_{B_2} + \dots$$

Здесь числа $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ обозначают суммы подряд идущих слагаемых одного знака в ряде $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Количество групп слагаемых одинакового знака в этой сумме бесконечно, так как в противном случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ отличался бы от $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ или от $\sum_{l=1}^{\infty} \beta_l$

лишь конечным числом членов и тогда он расходился бы к $+\infty$ или к $-\infty$ соответственно. Но это не имеет места, так как по построению величина частичных сумм s_n ряда на каждом шаге изменяется в направлении приближения к числу A , если только $s_n \neq A$. В силу этого, в сумму $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ войдут все числа α_k и β_l , а следовательно, и все a_n , то есть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — действительно перестановка ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

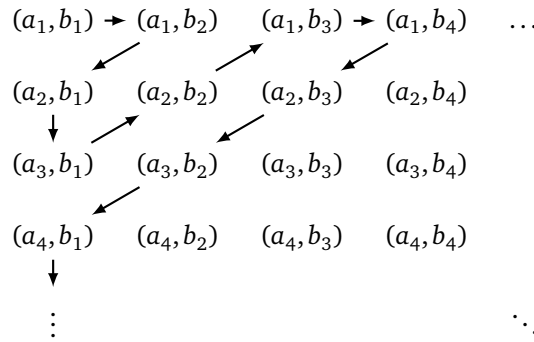
Теперь оценим разность $r_n = s_n - A$. При всяком n член ряда b_n в зависимости от своего знака попадает в одну из сумм A_m или B_m . Следовательно, мы имеем одно из равенств: $b_n = \alpha_k$ или $b_n = \beta_l$.

По построению ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ величина r_n меняет знак в том случае, если $b_n = \alpha_{k_m}$ или $b_n = \beta_{l_m}$. Тогда в обоих случаях имеет место оценка $|r_n| = |s_n - A| \leq |b_n|$. Для всех прочих n при добавлении очередного слагаемого $|r_n|$ значения частичной суммы s_n от числа A убывает, поэтому тогда справедливо неравенство $|r_n| < |r_{n-1}|$. Следовательно, всегда имеем $|s_n - A| < \alpha_{k_m} + \alpha_{k_{m-1}} + |\beta_{l_m}| + |\beta_{l_{m-1}}|$. Здесь номер m можно рассматривать как монотонно стремящуюся к бесконечности функцию от n , и поэтому для последовательности d_n , где $d_n = \alpha_{k_m} + \alpha_{k_{m-1}} + |\beta_{l_m}| + |\beta_{l_{m-1}}|$, в силу того, что α_k и $\beta_l \rightarrow 0$ при k и $l \rightarrow \infty$, имеем $d_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда при $n \rightarrow \infty$ окончательно получим $r_n = s_n - A \rightarrow 0$ и $s_n \rightarrow A$. \square

Пункт 3.2. Умножение рядов. Напомним:

Утверждение. Множество пар $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно.

Доказательство.



□

Определение 9. Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и пусть дана нумерация (биекция) $k \in \mathbb{N} \rightarrow (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Тогда произведением рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$, где $h_k = a_{m_k} b_{n_k}$.

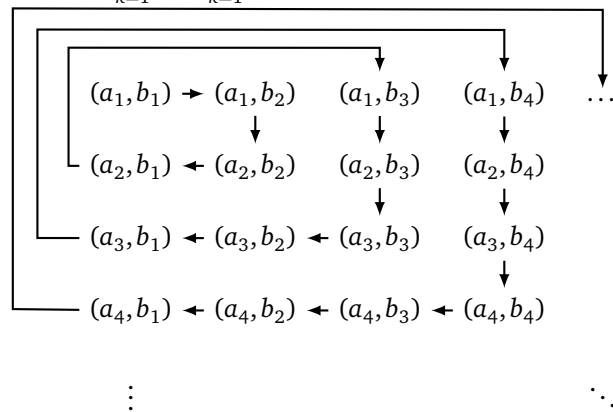
Теорема 10 (Абеля о произведении абсолютно сходящихся рядов). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. Обозначим $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Тогда любое произведение рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно и имеет сумму AB .

Доказательство. Пусть дана произвольная биекция $k \in \mathbb{N} \rightarrow (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k|$, где $h_k = a_{m_k} b_{n_k}$. Введем обозначения:

$$\widehat{H}_r = \sum_{k=1}^r |h_k|, \quad \widehat{A}_r = \sum_{k=1}^r |a_k|, \quad \widehat{B}_r = \sum_{k=1}^r |b_k|.$$

Полагая $M_r = \max_{k=1, \dots, r} m_k$, $N_r = \max_{k=1, \dots, r} n_k$, имеем $\widehat{H}_r = \sum_{k=1}^r |a_{m_k}| |b_{n_k}| \leq \sum_{k=1}^{M_r} |a_k| \sum_{k=1}^{N_r} |b_k| = \widehat{A}_{M_r} \widehat{B}_{N_r}$. Но по теореме 2.2 (Критерий сходимости знакоположительных рядов) $\exists C_A, C_B : \widehat{A}_{M_r} \leq C_A, \widehat{B}_{N_r} \leq C_B, \forall r \in \mathbb{N}$. Поэтому $\widehat{H}_r \leq C_A C_B, \forall r \in \mathbb{N}$. Отсюда, $\sum_{k=1}^{\infty} |h_k| < \infty$.

Рассмотрим произведение рядов $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} b_{n_k}$, где нумерация задана следующим образом:



Обозначим $G_n = \sum_{k=1}^n g_k$ и рассмотрим подпоследовательность $(G_{n^2}, n \in \mathbb{N})$. Имеем:

$$G_{n^2} = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k = (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n).$$

Докажем это равенство по индукции:

$n = 1$. Очевидно.

$n \geq 2$. $G_{(n+1)^2} = G_{n^2} + b_{n+1}(a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1}(b_1 + \dots + b_n) + a_{n+1}b_{n+1} = A_n B_n + b_{n+1} A_n + a_{n+1} B_n + a_{n+1} b_{n+1} = (A_n + a_{n+1})(B_n + b_{n+1}) = A_{n+1} B_{n+1}$, где $A_k = \sum_{i=1}^k a_i, B_k = \sum_{i=1}^k b_i$.

Итак, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k \xleftarrow{n \rightarrow \infty} G_{n^2} = A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = AB$.

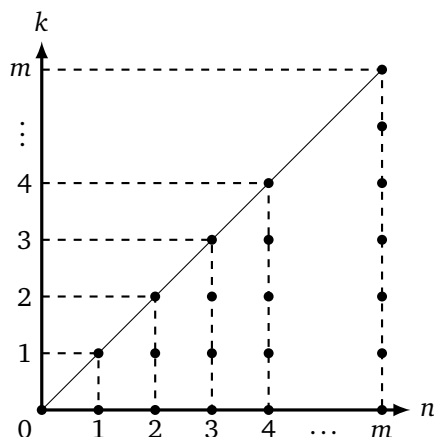
Пусть теперь $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ — произвольное произведение. Но этот ряд получен из абсолютно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ перестановкой его членов. Следовательно, по теореме 5 (О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда) $\sum_{k=1}^{\infty} h_k = AB$. \square

Определение 11. Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Их произведением по Коши называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$.

Теорема 12 (Мертенс). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Тогда произведение по Коши рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, причем его сумма равна AB .

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму произведения по Коши: $H_m = \sum_{i=1}^m c_i = \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^m a_k \sum_{n=k}^m b_{n-k+1} = \sum_{k=1}^m a_k \sum_{l=1}^{m-k+1} b_l$.

(*) Понять это легко, если взглянуть на рисунок:



Пусть $\alpha_r = \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n$, $\beta_r = \sum_{n=r+1}^{\infty} b_n$. Тогда $A = A_r + \alpha_r$ и $B = B_r + \beta_r$, где $A_r = \sum_{n=1}^r a_n$, $B_r = \sum_{n=1}^r b_n$.

Итак, $H_m = \sum_{k=1}^m a_k B_{m-k+1} = \sum_{k=1}^m a_k (B - \beta_{m-k+1}) = \sum_{k=1}^m a_k B - \sum_{k=1}^m a_k \beta_{m-k+1} = AB - \alpha_m B - \sum_{k=1}^m a_k \beta_{m-k+1}$. Покажем, что последние два слагаемых стремятся к 0 при $m \rightarrow \infty$.

$\alpha_m B$. Так как $\alpha_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, то $\alpha_m B \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

$\sum_{k=1}^m a_k \beta_{m-k+1}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists N_1 \in \mathbb{N} : |\beta_n| < \varepsilon, \forall n > N_1$. Заметим, что $\sum_{k=1}^m a_k \beta_{m-k+1} = \sum_{1 \leq k \leq \frac{m}{2}} a_k \beta_{m-k+1} + \sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} a_k \beta_{m-k+1}$.

Оценим $\sum_{1 \leq k \leq \frac{m}{2}} a_k \beta_{m-k+1}$. Выберем $m : \frac{m}{2} + 1 > N_1 \iff m > 2N_1 - 2$. Тогда $\left| \sum_{1 \leq k \leq \frac{m}{2}} a_k \beta_{m-k+1} \right| < \varepsilon \sum_{k=1}^m |a_k| \leq \varepsilon C_1$ для некоторого $C_1 > 0$ и $\forall m > 2N_1 - 2$.

Оценим $\sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} a_k \beta_{m-k+1}$. Так как $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $|\beta_n| \leq C_2$ для некоторого $C_2 > 0$ и $\forall n \in \mathbb{N}$, то

$\left| \sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} a_k \beta_{m-k+1} \right| \leq \sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} |a_k| |\beta_{m-k+1}| \leq C_2 \sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} |a_k|$. Применяя теорему 1.17 (Критерий Коши) к $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, имеем $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} |a_k| < \varepsilon, \forall m > N_2$.

Положим $N = \max\{N_2, 2N_1 - 2\}$. В итоге, $\left| \sum_{k=1}^m a_k \beta_{m-k+1} \right| = \left| \sum_{1 \leq k \leq \frac{m}{2}} a_k \beta_{m-k+1} + \sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} a_k \beta_{m-k+1} \right| \leq$
 $\leq \left| \sum_{1 \leq k \leq \frac{m}{2}} a_k \beta_{m-k+1} \right| + \left| \sum_{\frac{m}{2} < k \leq m} a_k \beta_{m-k+1} \right| \leq \varepsilon(C_1 + C_2)$. Отсюда получаем, что $H_m = AB - \alpha_m B - \sum_{k=1}^m a_k \beta_{k-n+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} AB$. \square

Пример. Произведение по Коши рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

сходится к $\ln(4)$.

Доказательство. Как известно, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. Покажем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Легко видеть, что $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^k \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_k(x)$, где $r_k = \frac{f^{(k+1)}(\theta x)}{(k+1)!} x^{k+1}$, $\theta \in (0, 1)$. При $k = 1$ имеем: $\ln(2) = \sum_{n=1}^1 \frac{(-1)^{n-1}}{n} + r_1(1) = S_1 + r_1(1)$. Поэтому $|r_1(1)| \leq \frac{1}{(k+1)(1+\theta)^{k+1}} \leq \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. То есть $S_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \ln(2)$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = 2 \ln(2) = \ln(4)$. \square

Покажем, что условие абсолютной сходимости одного из рядов существенно:

Пример. Произведение по Коши рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

расходится.

Доказательство. Каждый из рядов сходится (докажем позже). Рассмотрим их произведение по Коши: $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$. Модули членов этого ряда: $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \geq n \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$. То есть они не стремятся к нулю и по теореме 1.8 (Необходимое условие сходимости ряда) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$ расходится. \square

Пункт 3.3. Знакопередающиеся ряды.

Определение 13. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакопередающимся*, если $a_n a_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 14. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *рядом типа Лейбница*, если $a_n a_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $|a_n| \downarrow$ по n .

Теорема 15 (Признак Лейбница). Пусть $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} \in \mathbb{R}$, так как $S_{2k+1} = S_{2k} + \underbrace{a_{2k+1}}_{\rightarrow 0}$.

Имеем, $S_{2k} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{2k-1} - a_{2k})}_{\geq 0}$. Стало быть, $S_{2k} \uparrow$. Но с другой стороны, $S_{2k} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(a_{2k-2} - a_{2k-1})}_{\geq 0} - \underbrace{a_{2k}}_{\geq 0}$. Поэтому $S_{2k} \leq a_1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Итак, последовательность $(S_{2k}, k \in \mathbb{N})$ монотонно возрастает и ограничена (сверху). Стало быть, по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S \in \mathbb{R}$, поэтому $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$. \square

Теорема 16 (Оценка остатка ряда типа Лейбница). Пусть $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n \downarrow$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда остаток $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ обладает свойствами:

1. $|r_k| \leq a_{k+1}$;

2. знак r_k равен либо $(-1)^k$, либо 0.

Доказательство. Заметим, что $r_{2k} = S - S_{2k}$ и $r_{2k+1} = S - S_{2k+1}$.

Рассмотрим последовательность $(S_{2k+1}, k \in \mathbb{N})$. Имеем, $S_{2k+1} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(a_{2k} - a_{2k+1})}_{\geq 0}$.

Стало быть, последовательность $(S_{2k+1}, k \in \mathbb{N})$ монотонно убывает. Поэтому $S_{2k+1} \geq S$. Итак, имеют место неравенства: $S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (неравенство $S_{2k} \leq S$ выведено в доказательстве теоремы 15 (Признак Лейбница)).

а) $r_{2k} = S - S_{2k} \geq 0$, то есть знак r_{2k} равен $(-1)^{2k}$ или 0. Кроме того, $|r_{2k}| = r_{2k} = S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1}$.

b) $r_{2k+1} = S - S_{2k+1} \leq 0$, то есть знак r_{2k+1} равен $(-1)^{2k+1}$ или 0. Кроме того, $|r_{2k+1}| = S_{2k+1} - S \leq S_{2k+1} - S_{2k+2} = a_{2k+2}$. \square

Замечание. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_n$, вообще говоря, не достаточно неотрицательности всех членов последовательности $(a_n, n \in \mathbb{N})$ и того, что $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1} 2}{n} + \frac{1}{n} \right]$ расходится. При этом $\frac{(-1)^{n-1} 2+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: обозначив $a_n = \left[\frac{(-1)^{n-1} 2}{n} + \frac{1}{n} \right]$, имеем $a_n = \frac{(-1)^{n-1} 2+1}{n} = (-1)^{n-1} \frac{2+(-1)^{n-1}}{n}$. Стало быть, $|a_n| \leq \frac{3}{n}$.

Пример.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n)}{n}$$

сходится.

Доказательство. Достаточно показать, что $\frac{\ln^2(n)}{n}$ монотонно убывает, начиная с некоторого номера (так как неотрицательность $\frac{\ln^2(n)}{n}$ очевидна).

Пусть $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$. Необходимо найти такое $x_0 \geq 2$, что $f(x) \downarrow$ на $(x_0, +\infty)$. $f'(x) = \frac{2\ln(x) - \ln^2(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2} (2 - \ln(x))$. Заметим, что $\frac{\ln(x)}{x^2} > 0, \forall x \geq 2$. Но $2 - \ln(x) < 0, \forall x > e^2$. Следовательно, последовательность $(|a_n|, n \geq [e^2] + 1)$ монотонно убывает. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2n+1} \right)^n$$

сходится абсолютно.

Доказательство. $\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2n+1}\right)^n} = \frac{3}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$. Стало быть, по теореме 2.9 (Радикальный признак Коши) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n+1}\right)^n < \infty$. \square

Пункт 3.4. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Теорема 17 (Признак Дирихле). Пусть $a_n \in \mathbb{C}, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, b_n \downarrow 0$ по n и $\exists C > 0: \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| \leq C, \forall k \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Сперва докажем одну лемму.

Лемма 18 (Тождество Абеля). Пусть $a_n \in \mathbb{C}, b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. Обозначим $A_k = \sum_{n=1}^k a_n$ и $A_0 = 0$. Тогда $\sum_{n=k}^m a_n b_n = \sum_{n=k}^{m-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1} b_k, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m > k$.

Доказательство. $\sum_{n=k}^m a_n b_n = \sum_{n=k}^m (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=k}^m A_n b_n - \sum_{n=k}^m A_{n-1} b_n = \sum_{n=k}^m A_n b_n - \sum_{l=k-1}^{m-1} A_l b_{l+1} = \sum_{n=k}^m A_n b_n - \sum_{n=k-1}^{m-1} A_n b_{n+1} = \sum_{n=k}^{m-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1} b_k$. \square

Доказательство теоремы 17. Имеем, $\left| \sum_{n=k}^m a_n b_n \right| \leq \sum_{n=k}^m |a_n| |b_n| = \sum_{n=k}^{m-1} |A_n| (b_n - b_{n+1}) + |A_m| b_m - |A_{k-1}| b_k \leq C \left(\sum_{n=k}^{m-1} (b_n - b_{n+1}) + b_m + b_k \right) = C(b_k - b_{k+1} + b_{k+1} - b_{k+2} + \dots + b_{m-1} - b_m + b_m + b_k) = 2Cb_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Следовательно, по теореме 1.17 (Критерий Коши) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. \square

Замечание. Теорема 15 (Признак Лейбница) следует из теоремы 17 (Признак Дирихле).

Пример. Пусть $b_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) b_n$ сходится.

Доказательство. При $x = m\pi, m \in \mathbb{Z}$ — очевидно. Пусть $x \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{n=1}^k \sin(nx) = \sum_{n=1}^k \sin(nx) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k [\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x] = \frac{1}{2} \left[\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} \right) + \dots + \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x \right) \right]$. В итоге: $\left| \sum_{n=1}^k \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|\cos\frac{x}{2}| + |\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x|}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = C(x)$. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

при $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ сходится условно.

Доказательство. Сходимость ряда следует из теоремы 17 (Признак Дирихле). Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ сходится условно. $|\sin(nx)| \geq \sin^2(nx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2nx))$, то есть $\frac{|\sin(nx)|}{n} \geq \frac{1 - \cos(2nx)}{2n} \geq 0$. При этом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2nx)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n}$ расходится, так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n}$ сходится (по теореме 17). По теореме 2.3 (Признаки сравнения) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{n} = \infty$. Отсюда, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ сходится условно. \square

Теорема 19 (Признак Абеля). Пусть $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $(b_n, n \in \mathbb{N})$ монотонна и ограничена. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Доказательство. По теореме 2.1 (Вейерштрасса) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Пусть для определенности $(b_n, n \in \mathbb{N})$ монотонно убывает. Тогда $(b_n - b, n \in \mathbb{N})$ тоже монотонно убывает, причем к нулю, так как $b_n \geq b$. Заметим, что $a_n b_n = a_n b + a_n (b_n - b)$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - b)$. Первый ряд сходится, так как $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а умножение на константу не меняет факта сходимости ряда (теорема 1.13). Второй ряд сходится по теореме 17 (Признак Дирихле). \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n} \arctan(n)$$

сходится.

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n}$ сходится, последовательность $(\arctan(n), n \in \mathbb{N})$ монотонна и ограничена. \square

Функциональные ряды

§1. Функциональные последовательности

Пункт 1.1. Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимости. Будем рассматривать последовательности функций (функциональные последовательности)

$$(1) \quad (f_n : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).$$

Определение 1. Говорят, что функциональная последовательность (1.1) *сходится поточечно* на X к $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, если $\forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Пример. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $f(x) = 0$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Говорят, что функциональная последовательность (1.1) *сходится равномерно* на X к $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in X$.

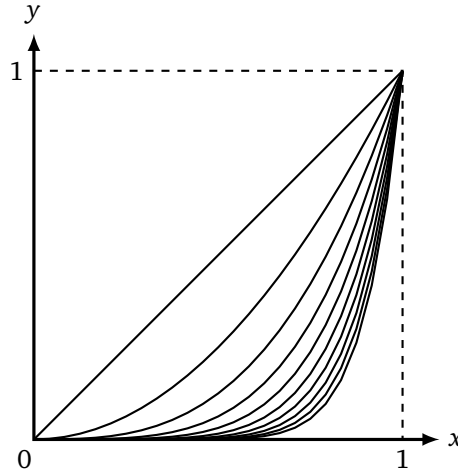
Обозначение. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$.

Следствие. (1.1) не сходится равномерно на X к $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N, \exists x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Пример. $X = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in X$, но $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0$ на X .

Доказательство. $\exists \varepsilon = 1 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \exists n = 2N, \exists x = n : |f_n - f| = \frac{x}{n} = \frac{n}{n} = 1 \geq \varepsilon$. □

Пример. $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.



$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, причем $f_n \in C[0, 1]$, а $f \notin C(1)$. Поэтому $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$ (докажем позже, признак Дини).

Пункт 1.2. Два признака равномерной сходимости. Признак Дини.

Теорема 3 (Критерий Коши равномерной сходимости). Последовательность $(f_n : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ *сходится равномерно* на $X \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall n, m > N_\varepsilon, \forall x \in X$.

Доказательство. \implies Очевидно.

\impliedby По критерию Коши для числовых последовательностей из условия теоремы следует, что $\exists f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \forall x \in X \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > N_{\varepsilon, x}, \forall x \in X$. По условию $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall m, n > N_\varepsilon, \forall x \in X$.

Переходя к пределу по m , имеем, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon, \forall n > N, \forall x \in X$, где N не зависит от x . Следовательно, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$. □

Теорема 4 (Специальный критерий сходимости). Пусть дана функциональная последовательность $(f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$. Тогда $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} f \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_X |f_n - f| = 0$.

Доказательство. \implies Так как $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : r_n = \sup_X |f_n - f| < \varepsilon, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, то $\sup_{x \in X} r_n \leq \varepsilon < 2\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\sup_{x \in X} r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

\impliedby Так как $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_X |f_n - f| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \sup_X r_n < \varepsilon, \forall n > N$, то $0 \leq r_n(x) \leq \sup_X r_n < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in X$. Поэтому $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} f$. \square

Пример. $X = [0, 1], f_n(x) = x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. $\sup_{x \in (0,1)} x^n = 1 \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Поэтому $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$.

Следствие. Если $|f_n(x)| < q_n \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, q_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, то по теореме 4 (Специальный критерий сходимости) $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} 0$.

Пример. $X = [0, 1 - \varepsilon], \varepsilon \in (0, 1), f_n(x) = x^n$. Тогда $|f_n(x)| \leq (1 - \varepsilon)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Следовательно, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Теорема 5 (Признак Дини). Пусть дана функциональная последовательность $(f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ такая, что f_n монотонно стремится к f на $[a, b], f_n \in C[a, b], \forall n \in \mathbb{N}, f \in C[a, b]$. Тогда $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $f_n(x) \uparrow f(x), \forall x \in [a, b]$. Положим $p_n(x) = f(x) - f_n(x), x \in [a, b]$. Тогда $p_n(x) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \forall x \in [a, b]$ и $p_n \in C[a, b], \forall n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Так как $\forall x \in [a, b] \exists N_x \in \mathbb{N} : 0 \leq p_n(x) < \varepsilon, \forall n > N_x$, то в силу непрерывности $p_n \exists U(x) : \forall y \in U(x) 0 \leq p_n(y) < \varepsilon, \forall n > N_x$. Получили открытое покрытие $\{U(x), x \in [a, b]\}$ отрезка $[a, b]$. Тогда существует конечное подпокрытие $\{U(x_k), k = 1, \dots, m\}$ отрезка $[a, b]$.

Итак, имеем $\forall k = 1, \dots, m \exists N_k \in \mathbb{N} : \forall y \in U(x_k) p_n(y) < \varepsilon, \forall n > N_k$. Пусть $N = \max_{k=1, \dots, m} N_k$ и пусть $y \in [a, b]$ — произвольно. Тогда $\exists U(x_k) : y \in U(x_k) \cap [a, b]$. Тогда для $n > N$ (зависит только от ε) $0 \leq p_n(y) \leq p_N(y) \leq p_{N_k}(y) < \varepsilon$. В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : p_n(y) < \varepsilon, \forall y \in [a, b], \forall n > N_\varepsilon$, то есть $p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. \square

Замечание. В теореме 5 заменить $[a, b]$ на произвольное X , вообще говоря, нельзя.

Пример. $X = (0, 1), f_n(x) = x^n, x^n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Пункт 1.3. Предельный переход функциональной последовательности.

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Теорема 6. Пусть дана последовательность $(f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N})$, a — предельная точка X и пусть $\exists \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ и $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} f$. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Доказательство. $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in X, \forall m, n > N$. Переходя к пределу $x \rightarrow a$ имеем: $|A_n - A_m| \leq \varepsilon < 2\varepsilon, \forall m, n > N$. Следовательно, $(A_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность Коши, то есть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A|$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Имеем:

Так как $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} f$, то $\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall n > N'_\varepsilon, \forall x \in X$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, то $\exists N''_\varepsilon \in \mathbb{N} : |A_n - A| < \varepsilon, \forall n > N''_\varepsilon$.

Пусть $n_0 > \max\{N'_\varepsilon, N''_\varepsilon\}$ — фиксировано. Так как $f_{n_0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A_{n_0}$, то $\exists \delta_\varepsilon > 0 : |f_{n_0}(x) - A_{n_0}| < \varepsilon, \forall x \in \dot{U}_{\delta_\varepsilon}(a) \cap X$.

В итоге $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - A| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \forall x \in \dot{U}_{\delta_\varepsilon}(a) \cap X$. \square

Следствие. Пусть $f_n \xrightarrow[X]{n \rightarrow \infty} f, x_0 \in X, f_n \in C(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f \in C(x_0)$.

Доказательство. Если x_0 — изолированная точка X , то все доказано. Если же x_0 — предельная точка X , то по теореме 6 $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. \square

Пример. $X = [0, 1], f_n(x) = x^n, f_n \in C[0, 1]$. Предположим, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$. Тогда $f \in C[0, 1]$, но $f \notin C(1)$.

Следствие. Если $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f, f_n \in C[a, b], \forall n \in \mathbb{N}$, то $f \in C[a, b]$.

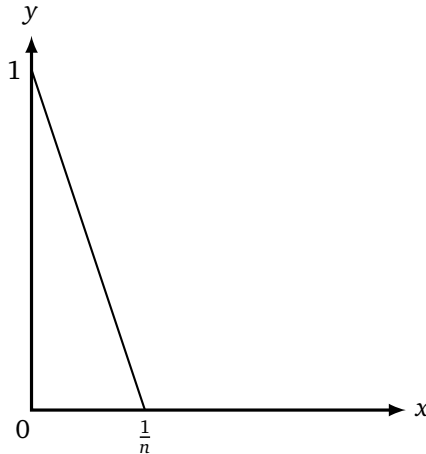
Замечание. Рассмотрим нормированное пространство $C[a, b]$ с нормой $\|f\|_\infty = \max_{[a, b]} |f|$. Тогда по теореме 4 (Специальный критерий сходимости) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ в метрике $\rho(f, g) = \|f - g\|_\infty \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f$.

Замечание. $C[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$ — полное (банахово) пространство.

Доказательство. $(f_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ — фундаментальная последовательность по $\|\cdot\|_\infty$. По теореме 3 (Критерий Коши равномерной сходимости) $(f_n, n \in \mathbb{N})$ сходится равномерно на $[a, b]$. Поэтому $\exists f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C[a, b]$. \square

Замечание. $C[a, b]$ с нормой $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$ не является полным.

Пример. $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$.



Так как $f_n \in C[0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$. $\|f_n\|_2^2 = \frac{1}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Значит $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f = 0$ на $[0, 1]$, но $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Поэтому $f \notin C(0)$.

Пункт 1.4. Интегрируемость функциональных последовательностей.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

Напомним:

Теорема 7. Пусть $f \in B[a, b]$. Тогда $f \in R[a, b] \iff \lim_{d(P) \rightarrow 0} \Omega(f, P) = 0$, где $\Omega(f, P) = \sum_{k=1}^n \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k$;

$$\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = \sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x'')|.$$

Теорема 8. Пусть $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f, f_n \in R[a, b], \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |f(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$. Поэтому $|f(x)| \leq \varepsilon + |f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon + \sup_{[a, b]} |f_{n_0}| \leq \varepsilon + C = 1 + C$ (существование C следует из того, что $R[a, b] \subset B[a, b]$). Стало быть, $f \in B[a, b]$.

Рассмотрим $\Omega(f, P) = \sum_{k=1}^n \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k$. Имеем для $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k] : |f(x') - f(x'')| \leq |f_n(x') - f_n(x'')| + |f(x') - f_n(x')| + |f(x'') - f_n(x'')|$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. В силу равномерной сходимости $(f_n, n \in \mathbb{N})$ к $f, \exists n_1 \in \mathbb{N} : |f(x) - f_{n_1}(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$.

По критерию интегрируемости, $\exists \delta_{\varepsilon, n_1} : \Omega(f_{n_1}, P) < \varepsilon, \forall P \text{ с } d(P) < \delta_{\varepsilon, n_1} \text{ на } [a, b]$.

$$\Omega(f, P) = \sum_{k=1}^n \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k < \Omega(f_{n_1}, P) + (b-a)\varepsilon + (b-a)\varepsilon < (1+2(b-a))\varepsilon, \forall P \text{ с } d(P) < \delta_{\varepsilon, n_1}.$$

В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \Omega(f, P) < \varepsilon, \forall P \text{ с } d(P) < \delta_\varepsilon$. \square

Теорема 9. Пусть $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f, f_n \in R[a, b]$ и пусть $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, F(x) = \int_a^x f(t) dt$ — первообразные к f_n и

f на $[a, b]$ соответственно, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} F$.

Доказательство. Так как $|F_n(x) - F(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall x \in [a,b]$, то $\sup_{[a,b]} |F_n - F| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. □

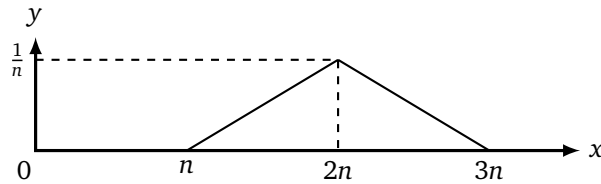
Теорема 10. Пусть $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a,b]} f, f_n \in R[a,b], \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. $\int_a^b f_n(x) dx = F_n(b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(b) = \int_a^b f(x) dx$. □

Замечание. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ на $[0, 1]$. Тогда $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Но $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0$.

Замечание. Из того, что $\exists \int_a^{+\infty} f_n(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}$ и $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, +\infty)} f$, вообще говоря, не следует, что $\int_a^{+\infty} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Пример. $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, n] \cup [3n, +\infty) \\ \frac{x}{n^2} - \frac{1}{n} & x \in [n, 2n] \\ -\frac{x}{n^2} + \frac{3}{n} & x \in [2n, 3n] \end{cases}$.



Имеем, $f_n(x) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0, +\infty)} 0$. Но $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Пункт 1.5. Дифференцируемость функциональных последовательностей.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \stackrel{?}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'$$

Теорема 11. Пусть $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, (f_n, n \in \mathbb{N})$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, пусть для всякого $n \in \mathbb{N} f_n \in D[a, b]$ и пусть $f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a,b]} \varphi$. Тогда найдется такая функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a,b]} f$. Более того, $f \in D[a, b]$, причем $f' = \varphi$ на $[a, b]$.

Доказательство. $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)]|$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно.

$\exists N_1 \in \mathbb{N} : |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon, \forall m, n > N_1$.

Обозначим $g_{mn}(x) = f_m(x) - f_n(x)$. Тогда по теореме Лагранжа $\exists \theta \in (0, 1) : |[f_m(x) - f_n(x)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)]| = |g_{mn}(x) - g_{mn}(x_0)| = |g'_{mn}(x_0 + \theta(x - x_0))| |x - x_0| \leq (b-a) |f'_m(x_0 + \theta(x - x_0)) - f'_n(x_0 + \theta(x - x_0))|$. В силу того, что $f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a,b]} \varphi \exists N_2 \in \mathbb{N} : |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon, \forall m, n > N_2, \forall x \in [a, b]$.

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon + (b-a)\varepsilon = (1+b-a)\varepsilon, \forall x \in [a, b]$. Это и означает, что $\exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a,b]} f$.

Фиксируем произвольно $x \in [a, b]$. Для всякого $t \in X = [a, b] \setminus \{x\}$ рассмотрим выражения

$$h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}.$$

Заметим, что $h_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(t), \forall t \in X$.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f'_m(y) - f'_n(y)| < \varepsilon, \forall y \in [a, b], \forall m, n > N_\varepsilon. \exists \theta \in (0, 1) : |h_m(t) - h_n(t)| = |f_m(t) - f_m(x) - [f_n(t) - f_n(x)]| / |t - x| = |(f_m - f_n)(t) - (f_m - f_n)(x)| / |t - x| = |g_{mn}(t) - g_{mn}(x)| / |t - x| = |g'_{mn}(x + \theta(t - x))| = |f'_m(x + \theta(t - x)) - f'_n(x + \theta(t - x))| < \varepsilon, \forall m, n > N_\varepsilon$. Стало быть, $h_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} h$. Легко видеть, что $\exists \lim_{t \rightarrow x} h(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t) \stackrel{т.6}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} h_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \varphi(x), \forall x \in [a, b]$. □

Замечание. Из того, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a,b]} f$ и $f_n \in C^1[a, b], \forall n \in \mathbb{N}$, вообще говоря, не следует, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \forall x \in [a, b]$.

Пример. $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Имеем, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[-\pi, \pi]} 0$. Но $f'_n(x) = \cos(nx)$ не сходится на $[-\pi, \pi]$.

Замечание. Из того, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f$, $f_n \in C^1[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in [a, b]$, вообще говоря, не следует, что $f'(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Пример. $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in [0, 1]$. Имеем, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0, 1]} 0$. Но $f'_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x) =$
 $= \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$. При $x = 1$ $f' \neq \varphi$.

Замечание. Если $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]X f$, $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]X g$, то $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]X \alpha f + \beta g$.

§2. Функциональные ряды

Пункт 2.1. Равномерная сходимость функционального ряда.

$$a_n : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Определение 1. Ряд вида

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in X$$

называется *функциональным рядом*.

Определение 2. Множество $M = \{x \in X : (1) \text{ сходится}\}$ называется *областью сходимости* ряда (1).

Сходимость ряда (1) эквивалентна сходимости функциональной последовательности его частичных сумм

$$\left(S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in X \right).$$

Определение 3. Говорят, что ряд (1) *сходится равномерно на M*, если последовательность $(S_k(x))$, $k \in \mathbb{N}$ сходится равномерно на M .

Замечание. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на M , то $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]M 0$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \ln(1+n)}$$

сходится равномерно на \mathbb{R} .

Доказательство. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \ln(1+n)}$ — ряд типа Лейбница, то $\forall x \in \mathbb{R} \quad |(S - S_n)(x)| = |r_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + \ln(2+n)} \leq \frac{1}{\ln(2+n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому $r_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} 0$, что и доказывает равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \ln(1+n)}$. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

не сходится равномерно на $(-1, 1)$.

Доказательство. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ сходится равномерно на $(-1, 1)$. Тогда $|x^{n-1}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(-1, 1)} 0$. Но это не верно, так как $\sup_{x \in (-1, 1)} |x|^{n-1} = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

сходится равномерно на $[-q, q]$, где $0 < q < 1$.

Доказательство. $|r_n(x)| = |(S - S_n)(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| \leq \frac{q^n}{1-q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \square

Теорема 4 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на X* $\iff \forall \varepsilon >$

$$> 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=k}^{k+m} a_n(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall k > N_\varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in X.$$

Пункт 2.2. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 5. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X , a — предельная точка X и пусть $\exists \lim_{x \rightarrow a} a_n(x) \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} a_n(x)$.

Теорема 6. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = f(x)$, $x_0 \in X$ и пусть $a_n \in C(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $f \in C(x_0)$.

Замечание. Из того, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на $[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = f(x)$, $a_n \in C[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $f \in C[a, b]$, вообще говоря, не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$.

Пример.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$$

не сходится равномерно на $(-1, 1)$.

Доказательство. $(x^n - x^{n-1}) \in C(-1, 1)$. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1}) = 1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0 \in C(-1, 1)$, но сходимость ряда не равномерна. В самом деле, $S_k = x^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(-1,1)} 0$, так как $\sup_{x \in (-1,1)} |x^k| = 1 \not\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. \square

Теорема 7. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ и $a_n \in R[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\exists \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x a_n(t) dt$, $\forall x \in [a, b]$.

Теорема 8. Пусть $a_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, пусть для всякого $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in D[a, b]$ и пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, причем $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

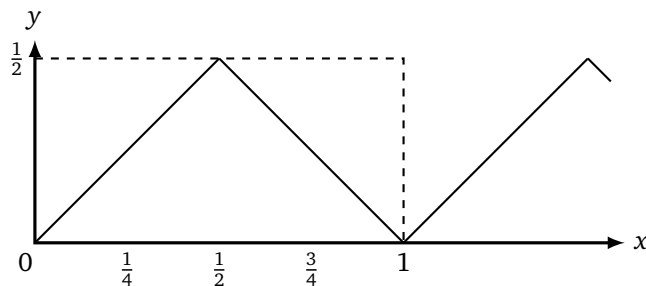
Пункт 2.3. Признаки равномерной сходимости рядов.

Теорема 9 (Признак Вейерштрасса). Пусть $|a_n(x)| \leq b_n$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X .

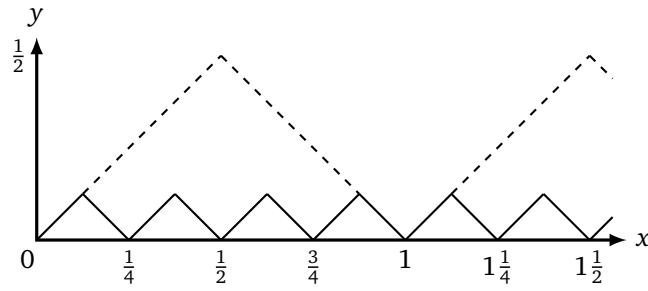
Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : 0 \leq \sum_{n=k}^{k+m} b_n < \varepsilon$, $\forall k > N$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\left| \sum_{n=k}^{k+m} a_n(x) \right| \leq \sum_{n=k}^{k+m} |a_n(x)| \leq \sum_{n=k}^{k+m} b_n < \varepsilon$, $\forall k > N$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$. \square

Рассмотрим пример непрерывной функции, не дифференцируемой ни в одной точке.

Пример (Ван-дер-Вардена). Рассмотрим функцию $f_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ и $f_0(x+1) = f_0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Определим теперь $f_n(x) = \frac{f_0(4^n x)}{4^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.



Тогда функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ — искомая функция, то есть непрерывная и нигде не дифференцируемая.

Доказательство. Из [6, п. 444]. Так как, очевидно, $0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{2 \cdot 4^k}$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), так что ряд мажорируется сходящейся прогрессией $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k}$, то по теореме 9 (Признак Вейерштрасса) ряд сходится равномерно, и функция $f(x)$ всюду непрерывна.

Остановимся на любом значении $x = x_0$. Вычисляя его с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$), по недостатку и по избытку, мы заключим его между числами вида: $\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \leq x_0 < \frac{s_n+1}{2 \cdot 4^n}$, где s_n — целое. Очевидно, что замкнутые промежутки $\Delta_n = \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n+1}{2 \cdot 4^n} \right]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), оказываются вложенными один в другой. В каждом из них найдется такая точка x_n , что расстояние ее от точки x_0 равно половине длины промежутка: $|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}$. ясно, что с возрастанием n варианта x_n стремится к x_0 .

Составим теперь отношение приращений $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(x_n) - f_k(x_0)}{x_n - x_0}$. Но, при $k > n$, число $\frac{1}{4^{n+1}}$ есть целое кратное периода $\frac{1}{4^k}$ функции f_k , так что $f_k(x_n) = f_k(x_0)$, соответствующие члены ряда обращаются в 0 и могут быть опущены. Если же $k \leq n$, то функция f_k , линейная в промежутке Δ_k , будет линейной и в содержащем ее промежутке Δ_n , причем $\frac{f_k(x_n) - f_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Таким образом, имеем окончательно $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^n (\pm 1)$; иными словами, это отношение равно четному целому числу при нечетном n и нечетному целому при четном n . Отсюда ясно, что при $n \rightarrow \infty$ отношение приращений ни к какому конечному пределу стремиться не может, так что наша функция при $x = x_0$ конечной производной не имеет. \square

Напомним лемму 1.3.18:

Лемма (Тождество Абеля). Пусть $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Обозначим $A_k = \sum_{n=1}^k a_n$ и $A_0 = 0$. Тогда $\sum_{n=k}^m a_n b_n =$

$$\sum_{n=k}^{m-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_m b_m - A_{k-1} b_k, \forall k \in \mathbb{N}, \forall m > k.$$

Теорема 10 (Признак Дирихле равномерной сходимости). Пусть $a_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, $b_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$: $\left| \sum_{n=1}^k a_n(x) \right| \leq C$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ и пусть $b_n \downarrow 0$ по n , $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство. Имеем, $\left| \sum_{n=k}^m a_n(x) b_n(x) \right| \leq \sum_{n=k}^{m-1} |A_n(x)| (b_n(x) - b_{n+1}(x)) + |A_m(x)| b_m(x) - |A_{k-1}(x)| b_k(x) \leq C \cdot \left(\sum_{n=k}^{m-1} (b_n(x) - b_{n+1}(x)) + b_m(x) + b_k(x) \right) = 2C b_k(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} 0$. Следовательно, по теореме 4 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

сходится равномерно на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon \in (0, \pi)$.

Доказательство. Имеем, $\left| \sum_{n=1}^k \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|} \leq \frac{1}{|\sin(\frac{\varepsilon}{2})|} = C$, $\frac{1}{n} \downarrow 0$ по n и $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0$. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

сходится, но не равномерно на $(0, 2\pi)$.

Доказательство.

Пусть $k \in \mathbb{N}$ — произвольно. Выберем $m = 2k$, $x = \frac{1}{k}$. Тогда $\left| \sum_{n=k}^{2k} \frac{\sin(\frac{n}{k})}{n} \right| = \underbrace{\frac{\sin(1)}{k} + \frac{\sin(1 + \frac{1}{k})}{k+1} + \dots + \frac{\sin(2)}{2k}}_{k+1 \text{ слагаемых}} \geq$
 $\geq (k+1) \frac{\sin(1)}{2k} \geq k \frac{\sin(1)}{2k}$.

Имеем, $\exists \varepsilon = \frac{\sin(1)}{2} : \forall N \in \mathbb{N}, \exists k > N, \exists m = 2k > k, \exists x = \frac{1}{k} \in (0, 2\pi) : \left| \sum_{n=k}^m \frac{\sin(nx)}{n} \right| \geq \varepsilon$. \square

Теорема 11 (Признак Абеля равномерной сходимости). Пусть $a_n : X \rightarrow \mathbb{C}, b_n : X \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X , $(b_n, n \in \mathbb{N})$ монотонна и равномерно ограничена константой C на X . Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=k}^{k+m-1} a_n(x) \right| < \varepsilon, \forall k > N_\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in X$. Для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ введем обозначения: $\tilde{a}_l(x) = a_{l+k-1}(x), \tilde{b}_l(x) = b_{l+k-1}(x), \tilde{A}_m(x) = \sum_{l=1}^m \tilde{a}_l(x) =$
 $= \sum_{n=k}^{k+m-1} a_n(x)$.

Имеем: $\left| \sum_{n=k}^{k+m} a_n(x)b_n(x) \right| = \left| \sum_{l=1}^{m+1} a_{l+k-1}(x)b_{l+k-1}(x) \right| = \left| \sum_{l=1}^{m+1} \tilde{a}_l(x)\tilde{b}_l(x) \right| = \left| \sum_{l=1}^m \tilde{A}_l(x)(\tilde{b}_l(x) - \tilde{b}_{l+1}(x)) + \tilde{A}_{m+1}(x) \cdot \tilde{b}_{m+1}(x) - \tilde{A}_0(x)\tilde{b}_1(x) \right| < \varepsilon(\tilde{b}_1(x) - \tilde{b}_2(x) + \dots + \tilde{b}_m(x) - \tilde{b}_{m+1}(x)) + \left| \tilde{b}_{m+1}(x) \right| \leq \varepsilon(\left| \tilde{b}_1(x) \right| + 2\left| \tilde{b}_{m+1}(x) \right|) \leq 3C\varepsilon$. \square

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} e^{-\frac{x}{n}}$$

сходится равномерно на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], \forall \varepsilon \in (0, \pi)$.

§3. Степенные ряды

Пункт 3.1. Радиус и интервал сходимости.

Определение 1. Ряд

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

называется *степенным рядом*. Точка x_0 называется *центром ряда* (1).

Замечание. Ряд (1) всегда сходится в точке $x = x_0$.

Замечание. Заменой $y = x - x_0$ ряд (1) приводится к виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Поэтому, для простоты обозначения,

будем рассматривать ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема 2 (Первая теорема Абеля). Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно во всех точках интервала $(-|x_0|, |x_0|)$.

Доказательство. Пусть $|x| < |x_0|$. Тогда $\exists C > 0 : |a_n x_0^n| < C$, так как $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Поэтому $|a_n x^n| =$
 $= \left| \frac{x}{x_0} \right|^n |a_n x_0^n| \leq \left| \frac{x}{x_0} \right|^n C$. Следовательно, по теореме 1.2.3 (Признаки сравнения) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, и при том абсолютно. \square

Теорема 3. Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ существует единственное $R \in [0, +\infty]$ такое, что: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно на $(-R, R)$ и расходится на $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$.

Доказательство. Рассмотрим множества $M = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ сходится}\}$ и $M^+ = \{|x|, x \in M\}$. Заметим, что они не пустые в силу того, что содержат точку 0. Положим $R = \sup M^+$ и покажем, что оно удовлетворяет условию теоремы.

Если $R = 0$, то $M = \{0\}$ и значит сходимост доказана. Пусть теперь $0 < R \leq +\infty$. Тогда $\forall x \in (-R, R) \exists y \in M^+ : |x| < y \leq R$. Значит, по теореме 2 (Первая теорема Абеля) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно в точке x .

Если $R = +\infty$, то $\mathbb{R} \setminus [-R, R]$ пусто. Пусть теперь $0 \leq R < +\infty$. Предположим, что в некоторой точке $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Тогда $x \in M$ и $|x| \in M^+$. Поэтому $|x| \leq \sup M^+ = R$. Противоречие.

Предположим, что существуют различные R_1 и R_2 , удовлетворяющие условию теоремы. Без ограничения общности, можно считать, что $R_1 < R_2$. Рассмотрим $x \in (R_1, R_2)$. С одной стороны, $x \in M$, так как $x < R_2$, с другой, $x \notin M$, так как $x > R_1$. Противоречие. \square

Замечание. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ в граничных точках $x = \pm R$ может вести себя по-разному.

Определение 4. Для ряда

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

величина $R \in [0, +\infty]$ называется *радиусом сходимости*, если (4) сходится абсолютно на $(x_0 - R, x_0 + R)$ и расходится на $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$, а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется *интервалом сходимости* ряда (4).

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

сходится равномерно и абсолютно на $[-1, 1]$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

сходится неравномерно на $(-1, 1]$ и абсолютно на $(-1, 1)$.

При $x = -1$: $(-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}$. Но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

сходится на $[-1, 1)$.

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

сходится на $(-1, 1)$.

Пример.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

сходится на $(-\infty, +\infty)$.

Теорема 5. Радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, если этот предел существует.

Доказательство. Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$. Покажем, что R есть искомая величина. Тогда $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x|$.

$$\cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{|x|}{R} & 0 < R < +\infty \\ \infty & R = 0 \\ 0 & R = \infty \end{cases} . \text{ Рассмотрим каждый случай отдельно.}$$

$0 < R < +\infty$. По теореме 1.2.5 (Признак Даламбера) искомый ряд сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

$R = 0$. Расходится на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (по теореме 1.2.5).

$R = \infty$. Сходится на \mathbb{R} (по теореме 1.2.5) \square

Напомним:

Определение 6. Пусть S — множество всех предельных точек последовательности $(a_n, n \in \mathbb{N})$. Тогда верхний предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \max(S) & (a_n, n \in \mathbb{N}) \text{ ограничена (сверху)} \\ +\infty & \text{иначе} \end{cases} .$$

Теорема 7. Обозначим $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен $\frac{1}{\rho}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное ненулевое вещественное число x .

Если $\rho = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{q}{|x|}, \forall n > N$, где $q \in (0, 1)$. Следовательно, $\sqrt[n]{|a_n|}|x| < q < 1 \iff |a_n||x^n| < q^n$, но $\sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty$ и, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится.

Если $\rho = +\infty$, то $\sqrt[n]{|a_n|}$ не ограничена сверху. Следовательно, существует подпоследовательность $(a_{n_k}, k \in \mathbb{N}) : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$. Поэтому $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{|x|}, \forall k > k_0$, то есть $|a_{n_k}||x^{n_k}| > 1$. Стало быть, $a_{n_k} x^{n_k} \not\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Пусть $0 < \rho < +\infty$. Пусть x — произвольное ненулевое число из интервала $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$. Тогда $\exists \varepsilon : |x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}$. Тогда $|x|(\rho + \varepsilon) < 1$. Так как $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то $\exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon, \forall n > N$. Поэтому $|x| \sqrt[n]{|a_n|} < |x|(\rho + \varepsilon), \forall n > N$, то есть $|a_n||x^n| < (\rho + \varepsilon)^n |x^n|$. Но $(\rho + \varepsilon)^n |x^n| < 1$. Стало быть, $\sum_{n=1}^{\infty} (\rho + \varepsilon)^n |x^n| < \infty$ и, следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится.

Пусть теперь $|x| > \frac{1}{\rho}$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : |x| > \frac{1}{\rho - \varepsilon} > 0$, то есть $|x|(\rho - \varepsilon) > 1$. Поэтому существует подпоследовательность $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}, k \in \mathbb{N})$ такая, что $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rho$. Следовательно, $\exists K \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \rho - \varepsilon, \forall k > K$. Отсюда $|x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > |x|(\rho - \varepsilon) > 1, \forall k > K$. Иными словами, $|a_{n_k}||x^{n_k}| > 1, \forall k > K$. В итоге, $a_{n_k} x^{n_k} \not\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, то есть $a_n x^n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. \square

Пример. Радиус сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5^{k^2} x^{k^2}$$

равен $\frac{1}{5}$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty} 5^{k^2} x^{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, где $a_n = \begin{cases} 5^{k^2} & n = k^2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$. Тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 5$ и, следовательно, радиус равен $\frac{1}{5}$. \square

Пункт 3.2. Равномерная сходимость степенного ряда. Вторая теорема Абеля.

Замечание. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда для равномерной сходимости этого ряда на $(-R, R)$, вообще говоря, не достаточно его сходимости на $(-R, R)$.

Пример. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Теорема 8. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда $\forall r \in (0, R)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[-r, r]$.

Доказательство. В силу того, что $|r| < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Так как $\forall x \in [-r, r] : |a_n||x^n| \leq |a_n|r^n$, то по теореме 2.9 (Признак Вейерштрасса) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[-r, r]$. \square

Теорема 9 (Вторая теореме Абеля). Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Тогда функция $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, определенная на $(-R, R)$, непрерывна на этом полуинтервале.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (-R, R)$ — произвольно. Тогда $\exists r \in (0, R) : |x_0| \leq r$. По теореме 8 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[-r, r]$. Очевидно, что $a_n x^n \in C[-r, r]$. Следовательно, по следствию к теореме 1.6 (Предельный переход функциональной последовательности) $S \in C[-r, r]$. В частности, $S \in C(x_0)$.

Пусть $x \in [0, R)$ — произвольно. Тогда $a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$. Имеем: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится равномерно; $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ монотонно убывает по n ; $\left|\frac{x}{R}\right|^n \leq 1$. Тогда, по теореме 2.11 (Признак Абеля равномерной сходимости) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[0, R)$. По следствию к теореме 1.6 $S \in C(R)$.

В итоге $S \in C(-R, R) \cup C(R) \iff S \in C(-R, R)$. \square

Следствие. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ сходится. Тогда функция $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, определенная на $[-R, R)$, непрерывна на этом полуинтервале.

Следствие. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и пусть этот ряд сходится на $[-R, R]$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на $[-R, R]$.

Пункт 3.3. Сумма и произведение степенных рядов. Комплексные степенные ряды.

Теорема 10. Пусть R_1, R_2, R_3, R_4 — радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ соответственно, где $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ — произвольное произведение рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Тогда $R_3, R_4 \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Рассмотрим степенной ряд

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 11 (Первая теорема Абеля). Пусть (3.3) сходится в точке $z_0 \neq 0$. Тогда (3.3) сходится абсолютно в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|\}$.

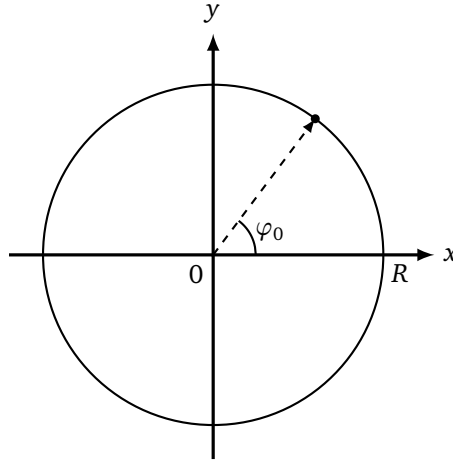
Теорема 12. Для (3.3) существует единственное $R \in [0, +\infty]$ такое, что: (3.3) сходится абсолютно в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и расходится на множестве $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

Теорема 13. Радиус сходимости ряда (3.3) равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, если этот предел существует.

Теорема 14. Радиус сходимости ряда (3.3) равен $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Теорема 15. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда (3.3). Тогда $\forall r \in (0, R)$ ряд (3.3) сходится равномерно в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Теорема 16 (Вторая теорема Абеля). Пусть $R > 0$ — радиус сходимости ряда (3.3) и пусть (3.3) сходится в некоторой точке $R \cdot e^{i\varphi_0}$. Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x \cdot e^{i\varphi_0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (R \cdot e^{i\varphi_0})^n$.



Пункт 3.4. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Лемма 17. Пусть ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ имеют радиусы сходимости R и R' соответственно. Тогда $R = R'$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $R \neq R'$.

Предположим $R < R'$. Пусть $x \in (R, R')$ — произвольное ненулевое число. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |x|^{n-1} < \infty$. Поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |x|^n < \infty$. Так как $|a_n| |x|^n \leq n |a_n| |x|^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n < \infty$. То есть, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Но $x > R$, значит, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится. Противоречие.

Предположим $R > R'$. Пусть $x \in (R', R)$ — произвольно. Тогда $\exists \rho \in (R', R) : x < \rho$. Так как $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty$, то $a_n \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. То есть $\exists C > 0 : |a_n| \rho^n \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому $n |a_n| |x|^n = |a_n| \rho^n n \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n \leq C n \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n$. Но $\frac{n+1}{n} \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

→ $\left(\frac{|x|}{\rho}\right) < 1$. Тогда по теореме 1.2.5 (Признак Даламбера) $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^n < \infty$. Поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x^n| < \infty$. Стало быть, $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x^{n-1}| < \infty$. Но $x > R'$, значит, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ расходится. Противоречие. \square

Следствие. Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ имеют один и тот же радиус сходимости.

Теорема 18 (Дифференцирование степенного ряда). Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда функция

$$(6) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

определенная на $(-R, R)$, является бесконечно дифференцируемой на этом интервале (то есть $f \in C^\infty(-R, R)$), причем $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k x^n}{dx^k}$.

Доказательство. Пусть

$$(7) \quad g = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Тогда по лемме 17 ряды (18) и (3.4) имеют один и тот же радиус сходимости R .

Пусть $x \in (-R, R)$ — произвольно и пусть $r \in (0, R) : |x| < r$. Тогда, по теореме 8, ряды (18) и (3.4) сходятся равномерно на $[-r, r]$. Следовательно, $\exists f'(x) = g(x)$. \square

Пример. Сумма ряда

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

равна $\arctan(x)$ на $[-1, 1]$.

Доказательство. Имеем, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$. Следовательно, радиус сходимости R ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ равен 1. По теореме 18 (Дифференцирование степенного ряда) $\exists S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}$ на $(-1, 1)$. Тогда $S(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$. Но $C = 0$, так как $S(0) = \arctan(0) = 0$.

Так как по $S \in C(1)$ (теорема 9 (Вторая теорема Абеля)) и $\arctan \in C(1)$, то $S(1) = \arctan(1)$. Аналогично для $x = -1$. Поэтому равенство $S(x) = \arctan(x)$ верно $\forall x \in [-1, 1]$. \square

Теорема 19 (Почленное интегрирование степенного ряда). Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$. Тогда функция $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, определенная на $(-R, R)$ имеет первообразную, причем $\forall x \in (-R, R)$:

$$(8) \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Заметим, что $f \in C(-R, R)$. Тогда $f \in R[-r, r]$, $\forall r \in (0, R)$. Поэтому $\forall x \in (-R, R) \exists \int_0^x f(t) dt$.

Осталось проверить равенство (19).

$x = 0$. Очевидно.

$x > 0$. $\exists r \in (0, R) : x \in [0, r]$. Так как $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ сходится равномерно на $[0, r]$, то по теореме 2.7 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$x < 0$. На $[x, 0]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно и, стало быть, по теореме 2.7 (Интегрирование функциональных рядов) $\exists \int_x^0 f(t) dt = \int_x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. \square

§4. Ряд Тейлора

Пункт 4.1. Ряд Тейлора. Единственность разложения.

Основные вопросы. Пусть $f \in C^\infty(-R, R)$. Существует ли степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ такой, что $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\forall x \in (-R, R)$? Если существует, то единственен ли он?

Теорема 1 (Единственность разложения). Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\forall x \in (-R, R)$. Тогда $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Доказательство. $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$.

По теореме 2.8 (Дифференцирование функциональной последовательности) $f^{(k)}(0) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^k x^n}{dx^k} \right) \Big|_{x=0} = \left[\left(\sum_{n=0}^{k-1} a_n \frac{d^k x^n}{dx^k} \right) + a_k \frac{d^k x^k}{dx^k} + \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \frac{d^k x^n}{dx^k} \right) \right] \Big|_{x=0} = k! a_k$, $\forall k \geq 1$. □

Определение 2. Пусть $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$. Тогда степенной ряд

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

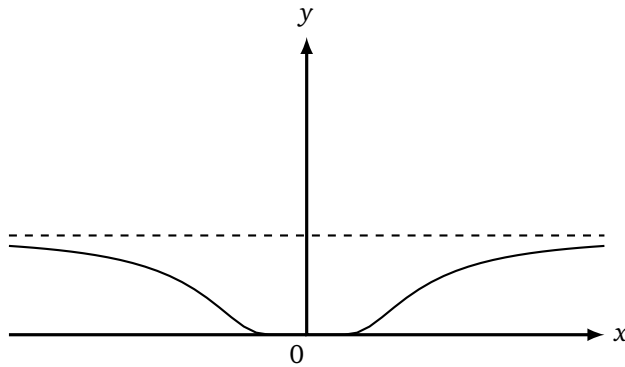
называется *рядом Тейлора* для функции f .

При $x_0 = 0$ ряд (2) называют *рядом Маклорена*.

Замечание. Ряд Тейлора может расходиться всюду за исключением одной точки.

Замечание. Для того, что бы функция f раскладывалась в свой ряд Тейлора, вообще говоря, не достаточно ее бесконечной непрерывности ($f \in C^\infty(\mathbb{R})$) и сходимости ее ряда Тейлора в каждой точке вещественной прямой.

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.



Заметим, что $f^{(n)}(x) = P(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Поэтому $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, где P — некоторый полином. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, однако $f(x) \neq 0$.

Определение 3. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ и x_0 — внутренняя точка M . Тогда f — *аналитическая в точке x_0* $\iff \exists \varepsilon > 0 : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$.

Замечание. Если f — аналитическая в точке x_0 , то $f \in C^\infty(U_\varepsilon(x_0))$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Замечание. Для того, что бы функция f была аналитической в точке x_0 , вообще говоря, не достаточно того, что $f \in C^\infty(U_\varepsilon(x_0))$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. Пусть $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ для некоторого $R > 0$. Тогда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ если и только если $r_k(x) = f(x) - \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Пункт 4.2. Основные разложения. В этом параграфе все доказательства основаны на теореме 4.

Теорема 5. Для всякого вещественного x справедливо равенство

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Доказательство. $\forall k \in \mathbb{N} : |r_k| = \frac{\exp(\theta x)}{(k+1)!} |x^{k+1}|$, где $\theta \in (0, 1)$. Тогда $|r_k| \leq \exp(|x|) \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, так как $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} < \infty$. □

Следствие. Для всякого вещественного x справедливы равенства

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Замечание. Пусть $f \in C^\infty(-R, R)$ для некоторого $R > 0$. Тогда ряд Тейлора для f имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}$, если f — четная и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, если f — нечетная.

Теорема 6. Для всякого вещественного x справедливо равенство

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказательство. $\forall k \in \mathbb{N} : |r_k(x)| = \frac{|\cos^{(k+1)}(\theta x)|}{(2k+1)!} |x|^{2k+1} \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. □

Следствие. Для всякого вещественного x справедливо равенство

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Доказательство. $\sin(x) = -\cos'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. □

Теорема 7. Для всякого $x \in (-1, 1]$ справедливо равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Доказательство. Пусть сначала $x \in (-1, 1)$. Тогда $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

Переходя к пределу $x \rightarrow 1-0$ в равенстве $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, получаем $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, так как $\ln \in C(2)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \in C(1)$ (по теореме 3.9 (Вторая теореме Абеля)). □

Теорема 8 (Биномиальный ряд). Для всякого $x \in (-1, 1)$ справедливо равенство

$$(1+x)^\alpha = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} x^n & \alpha \in \mathbb{N}^* \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Доказательство. При $\alpha \in \mathbb{N}^*$ — очевидно. Рассмотрим $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ и пусть $x \in (-1, 1)$ — фиксировано. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} : r_k(x) = \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k ((1+t)^\alpha)^{(k+1)} dt = A_k \int_0^x (x-t)^k (1+t)^{\alpha-k-1} dt = A_k \int_0^x g^k(t) (1+t)^{\alpha-1} dt$, где $A_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!}$ и $g(t) = \frac{x-t}{1+t}$. Легко видеть, что $g \downarrow$ на $(-1, 1)$; $g(0) = x$; $g(x) = 0$ и, следовательно, $|g| \leq |x|$ на $(-1, 1)$. Стало быть, $|r_k(x)| \leq |A_k| \int_0^x |x^k| (1+t)^{\alpha-1} dt = |A_k| |x^k| C_{\alpha, x}$, где $C_{\alpha, x}$ не зависит от k . Легко видеть, что $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n x^n| < \infty$, если $x \in (-1, 1)$, и, значит, $|r_k(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. □

Определение 9. Для всякого комплексного z определим функции:

1. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$
2. $\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!};$
3. $\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!};$
4. $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$
5. $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

Легко проверить, что эти функции определены корректно.

Следствие. Для всякого комплексного z справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \cosh(z) + \sinh(z) &= \exp(z); & \cosh(z) - \sinh(z) &= \exp(-z); \\ \cosh(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}; & \sinh(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}; \\ \cos(z) &= \cosh(iz); & \sin(z) &= \frac{1}{i} \sinh(iz); \\ \cos(z) + i \sin(z) &= \cosh(iz); & \cos(z) - i \sin(z) &= \cosh(-iz); \\ \cos(z) &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}; & \sin(z) &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2}. \end{aligned}$$

Теорема 10. Пусть $z, z' \in \mathbb{C}$. Тогда $\exp(z) \cdot \exp(z') = \exp(z + z')$.

Доказательство. Воспользуемся аналогом теоремы 1.3.12 (Мертенса) для комплексных рядов: $\exp(z) \cdot$

$$\exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k (z')^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z'). \quad \square$$

Следствие. Экспонента всякого комплексного числа отлична от нуля.

Доказательство. От противного. Предположим, $\exists z_0 \in \mathbb{C} : \exp(z_0) = 0$. Тогда $0 = 0 \exp(-z_0) = \exp(z_0) \cdot \exp(-z_0) = \exp(0) = 1$. Противоречие. \square

Следствие. Пусть $z, z' \in \mathbb{C}$. Тогда $\frac{\exp(z)}{\exp(z')} = \exp(z - z')$.

Следствие. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $(\exp(z))^n = \exp(nz)$.

Следствие. Пусть $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y))$.

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \Re(\exp(x + iy)) &= e^x \cos(y); & \Im(\exp(x + iy)) &= e^x \sin(y); \\ |\exp(z)| &= e^x; & \arg(\exp(x + iy)) &= y. \end{aligned}$$

Теорема 11. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда $(\exp(zx))'_x = z \exp(zx)$.

Доказательство. $(\exp(zx))'_x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!} \right)'_x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(zx)^n}{n!} \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(zx)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zx)^n}{n!} = z \exp(zx). \quad \square$

Следствие. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\int \exp(zx) dx = \frac{1}{z} \exp(zx) + C$, $C \in \mathbb{C}$.

Интегралы, зависящие от параметра

§1. Собственные интегралы

Пункт 1.1. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра.

Обозначение. $I_x = [a, b] \in \mathbb{R}$; $I_y = [c, d] \in \mathbb{R}$; $\Pi = I_x \times I_y \in \mathbb{R}^2$.

Определение 1. Пусть функция $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по x на I_x для всех $y \in I_y$, то есть $\exists J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, $\forall y \in I_y$. Интеграл $J(y)$ называется *интегралом (собственным), зависящим от параметра y* .

Теорема 2 (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра). Пусть $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C(\Pi)$, $K = I_y \times I_x \times I_x \in \mathbb{R}^3$. Определим функцию $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}$; $(y, z_1, z_2) \mapsto \int_{z_1}^{z_2} f(x, y) dx$, $\forall (y, z_1, z_2) \in K$. Тогда $\Phi \in C(K)$.

Доказательство. Пусть $(y, z_1, z_2) \in K$ и $\varepsilon > 0$ — произвольны. Имеем:

$$\Phi(y + \Delta y, z_1 + \Delta z_1, z_2 + \Delta z_2) - \Phi(y, z_1, z_2) = \int_{z_1 + \Delta z_1}^{z_2 + \Delta z_2} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{z_1}^{z_2} f(x, y) dx = A_1 - A_2 + A_3,$$

где

$$A_1 = \int_{z_2}^{z_2 + \Delta z_2} f(x, y + \Delta y) dx; \quad A_2 = \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z_1} f(x, y + \Delta y) dx; \quad A_3 = \int_{z_1}^{z_2} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx.$$

Оценим каждый из интегралов:

A_1 . Π — компакт и $f \in C(\Pi)$. Поэтому $\exists C > 0 : |f(x', y')| < C$, $\forall (x', y') \in \Pi$. Следовательно, $|A_1| \leq C|\Delta z_2| < C\varepsilon$, если $z_2, z_2 + \Delta z_2 \in I_x$ и $|\Delta z_2| < \varepsilon$.

A_2 . Аналогично: $|A_2| \leq C|\Delta z_1| < C\varepsilon$, если $z_1, z_1 + \Delta z_1 \in I_x$ и $|\Delta z_1| < \varepsilon$.

A_3 . Π — компакт и $f \in C(\Pi)$. Поэтому f равномерно непрерывна на Π . Значит, $\exists \delta_\varepsilon > 0 : |A_3| \leq \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx < (b - a)\varepsilon$, $\forall x \in I_x$, $\forall y, y + \Delta y \in I_y$, $|\Delta y| < \delta_\varepsilon$.

В итоге, $\forall \varepsilon \exists \delta = \min\{\varepsilon, \delta_\varepsilon\} : |\Phi(y + \Delta y, z_1 + \Delta z_1, z_2 + \Delta z_2) - \Phi(y, z_1, z_2)| = |A_1 - A_2 + A_3| \leq |A_1| + |A_2| + |A_3| < C\varepsilon + C\varepsilon + (b - a)\varepsilon = (2C + b - a)\varepsilon$, $\forall (y, z_1, z_2), (y + \Delta y, z_1 + \Delta z_1, z_2 + \Delta z_2) \in K$ с условием $\max\{|\Delta y|, |\Delta z_1|, |\Delta z_2|\} < \delta$. \square

Следствие. Пусть $f \in C(\Pi)$, $F : I_y \rightarrow \mathbb{R}$; $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$. Тогда $F \in C(I_y)$.

Следствие. Пусть $f \in C(\Pi)$, $F^* : I_y \rightarrow \mathbb{R}$; $y \mapsto \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$, причем $\varphi, \psi \in C(I_y)$ и $\varphi(I_y), \psi(I_y) \subset I_x$. Тогда $F^* \in C(I_y)$.

Пример. $\Phi(y) = \int_{\sin(y)}^y f(x, y) dx \in C(\mathbb{R})$, где $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} e^{-\frac{1+|y|}{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

Доказательство. Имеем, $\forall x \neq 0$, $f(x, y) \leq \frac{1}{|x|} e^{-\frac{1}{|x|}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f(0, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Положим $\varphi(y) = \sin(y)$, $\psi(y) = y$, $y \in [c, d]$, где $c \leq -1$ и $d \geq 1$ — произвольны. Тогда $\varphi([c, d]), \psi([c, d]) \subset [c, d]$. В силу теоремы $\Phi \in C[c, d]$. Так как c и d произвольны, то $\Phi \in C(\mathbb{R})$. \square

Пример. $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx \notin C(0)$, где $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Доказательство. Заметим, что $f(x, x) = \frac{2x^3}{4x^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$. Легко видеть, что $F(0) = \int_0^1 0 dx = 0$. Но, при $y > 0$,

$$F(y) = y^2 \int_0^1 \frac{2x dx}{(x^2 + y^2)^2} = y^2 \int_{y^2}^{1+y^2} \frac{dz}{z^2} = y^2 \left(-\frac{1}{z}\right) \Big|_{y^2}^{1+y^2} = 1 - \frac{y^2}{1+y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1 \neq 0. \text{ Следовательно, } F \notin C(0). \quad \square$$

Пункт 1.2. Предельный переход под знаком интеграла.

Определение 3. Пусть $f : X \times Y \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ и пусть y_0 — предельная точка Y . Тогда функция f равномерно стремится к $g(x)$ на X при $y \rightarrow y_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x, y) - g(x)| < \varepsilon, \forall y \in \dot{U}_{\delta_\varepsilon}(y_0) \cap Y, \forall x \in X$.

Обозначение. $f \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} g$.

Теорема 4 (Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций).

$f \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon, \forall y', y'' \in \dot{U}_{\delta_\varepsilon}(y_0) \cap Y, \forall x \in X$.

Теорема 5 (Критерий Гейне равномерной сходимости). Пусть $f : X \times Y \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ и пусть y_0 — предельная точка Y . Тогда $f \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} g$ если и только если для всякой последовательности Гейне $(y_n \in Y, n \in \mathbb{N})$, связанной с точкой y_0 , последовательность $f(x, y_n)$ сходится равномерно к $g(x)$ на X .

Доказательство. \implies Пусть $(y_n \in Y, n \in \mathbb{N})$ — произвольная последовательность Гейне, связанная с точкой y_0 . Тогда $\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x, y) - g(x)| < \varepsilon, \forall y \in \dot{U}_{\delta_\varepsilon}(y_0) \cap Y, \forall x \in X$. $\exists N \in \mathbb{N} : |y_n - y_0| < \delta_\varepsilon, \forall n > N$. Следовательно, $|f(x, y_n) - g(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in X$.

\impliedby От противного. Предположим, что $f \not\xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} g$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta_\varepsilon > 0 \exists y \in \dot{U}_{\delta_\varepsilon}(y_0) \cap Y, \exists x \in X : |f(x, y) - g(x)| \geq \varepsilon$. Пусть $(\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N})$ и пусть $y_n \in \dot{U}_{\delta_n}(y_0) \cap Y$. Но $(y_n, n \in \mathbb{N})$ — последовательность Гейне, связанная с точкой y_0 . Тогда $\forall N \in \mathbb{N} : |f(x, y_n) - g(x)| \geq \varepsilon, \forall x \in X$. Противоречие. \square

Пример.

$$f(x, y) = e^{-\frac{x}{y}}$$

сходится равномерно на $[\varepsilon, +\infty) \times (0, +\infty) = [\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}_+$ при $y \rightarrow 0, \forall \varepsilon > 0$.

Доказательство. $\forall x \in [\varepsilon, +\infty) : f(x, y) \leq e^{-\frac{\varepsilon}{y}} \xrightarrow[y \rightarrow +0]{\varepsilon, +\infty} 0$. Поэтому $f \xrightarrow[y \rightarrow +0]{[\varepsilon, +\infty)} 0$. \square

Пример.

$$f(x, y) = e^{-\frac{x}{y}}$$

не сходится равномерно на $(0, +\infty) \times (0, +\infty) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ при $y \rightarrow 0$.

Доказательство. В самом деле, $\exists \varepsilon = \frac{1}{e} > 0 : \forall \delta > 0 \exists y \in (0, \delta), \exists x = y > 0 : e^{-\frac{x}{y}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \geq \varepsilon$. \square

Теорема 6 (Предельный переход под знаком интеграла). Пусть $f : [a, b] \times Y \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, y_0 — предельная точка Y , $\forall y \in Y : \int_a^b f(x, y) dx$ и пусть $f \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} g$. Тогда $g \in R[a, b]$ и $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Доказательство. Пусть $(y_n \in Y, n \in \mathbb{N})$ — произвольная последовательность Гейне, связанная с точкой y_0 и пусть $F_n = \int_a^b f(x, y_n) dx, \forall n \in \mathbb{N}$. Легко заметить, что последовательность $(f(x, y_n), n \in \mathbb{N})$ удовлетворяет условию теорем 2.1.8 и 2.1.10 (Интегрируемость функциональных последовательностей) и, стало быть, $g \in R[a, b]$, кроме того $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \int_a^b g(x) dx$. В силу произвольности последовательности $(y_n \in Y, n \in \mathbb{N})$ и теоремы 5 (Критерий Гейне равномерной сходимости) теорема доказана. \square

Замечание. Первое следствие к теореме 2 (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра) является следствием теоремы 6 (Предельный переход под знаком интеграла).

Пункт 1.3. Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 7. Пусть $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}, \exists f'_y$ и $f, f'_y \in C(\Pi), K = I_y \times I_x \times I_x \in \mathbb{R}^3$. Определим функцию $\Phi : K \rightarrow \mathbb{R}; (y, z_1, z_2) \mapsto \int_{z_1}^{z_2} f(x, y) dx, \forall (y, z_1, z_2) \in K$. Тогда $\Phi \in D(K)$, причем $\Phi'_y(y, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} f'_y(x, y) dx; \Phi'_{z_2}(y, z_1, z_2) = f(z_2, y); \Phi'_{z_1}(y, z_1, z_2) = -f(z_1, y), \forall (y, z_1, z_2) \in K$.

Доказательство. Пусть $(y, z_1, z_2) \in K$ и $\varepsilon > 0$ — произвольны. Имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \int_{z_1 + \Delta z_1}^{z_2 + \Delta z_2} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{z_1}^{z_2} f(x, y) dx = \\ &= \int_{z_2}^{z_2 + \Delta z_2} f(x, y + \Delta y) dx - \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z_1} f(x, y + \Delta y) dx + \int_{z_1}^{z_2} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx; \end{aligned}$$

$$P = \Delta\Phi - \left[f(z_2, y)\Delta z_2 - f(z_1, y)\Delta z_1 + \int_{z_1}^{z_2} f'_y(x, y) dx \Delta y \right] = P_1 - P_2 + P_3,$$

где

$$P_1 = \int_{z_2}^{z_2 + \Delta z_2} [f(x, y + \Delta y) - f(z_2, y)] dx; \quad P_2 = \int_{z_1}^{z_1 + \Delta z_1} [f(x, y + \Delta y) - f(z_1, y)] dx;$$

$$P_3 = \int_{z_1}^{z_2} ([f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] - f'_y(x, y)\Delta y) dx.$$

Оценим каждый из интегралов:

P_1 . Π — компакт и $f \in C(\Pi)$. Поэтому f равномерно непрерывна на Π . Значит, $\exists \delta_1 > 0$: $|f(x, y + \Delta y) - f(z_2, y)| < \varepsilon$, если $|x - z_2| < \delta_1$ и $|\Delta y| < \delta_1$. Тогда $|P_1| < \varepsilon|\Delta z_2|$, если $|\Delta z_2| < \delta_1$ и $|\Delta y| < \delta_1$.

P_2 . Аналогично: $|P_2| < \varepsilon|\Delta z_1|$, если $|\Delta z_1| < \delta_1$ и $|\Delta y| < \delta_1$.

P_3 . $\exists \theta \in (0, 1)$: $P_3 = \int_{z_1}^{z_2} \{f'_y(x, y + \theta\Delta y)\Delta y - f'_y(x, y)\Delta y\} dx$. Но $f'_y \in C(\Pi)$. Поэтому f'_y равномерно непрерывна на Π . Значит, $\exists \delta_2 > 0$: $|f'_y(x, y + \theta\Delta y)\Delta y - f'_y(x, y)\Delta y| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, если $|\Delta y| < \delta_2$. Тогда $|P_3| < \varepsilon|\Delta y|$, если $|\Delta y| < \delta_2$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $|P| < \varepsilon(|\Delta y| + |\Delta z_1| + |\Delta z_2|)$, если $\max\{|\Delta y|, |\Delta z_1|, |\Delta z_2|\} < \delta$.

Окончательно, обозначив $\Delta = (\Delta y, \Delta z_1, \Delta z_2)$, $\|\Delta\| = \max\{|\Delta y|, |\Delta z_1|, |\Delta z_2|\}$, имеем: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\frac{|P|}{\|\Delta\|} < \varepsilon$, $\forall (y, z_1, z_2), (y + \Delta y, z_1 + \Delta z_1, z_2 + \Delta z_2) \in K$ с условием $\|\Delta\| < \delta$. Тогда $\frac{|P|}{\|\Delta\|} \xrightarrow{\|\Delta\| \rightarrow 0} 0$. Следовательно, $P = o(\|\Delta\|)$ при $\|\Delta\| \rightarrow 0$. \square

Следствие (Формула Лейбница). Пусть $f, f'_y \in C(\Pi)$, $F : I_y \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$, где $\varphi, \psi \in D(I_y)$ и $\varphi(I_y), \psi(I_y) \subset I_x$. Тогда $F \in D(I_y)$, причем $F'(y) = \psi'(y)f(\psi(y), y) - \varphi'(y)f(\varphi(y), y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx$.

Пункт 1.4. Интегрируемость интеграла, зависящего от параметра.

Предварительное замечание. Пусть $f \in C(\Pi)$. Тогда, в силу теоремы 2 (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра), существуют интегралы $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ и $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

Теорема 8. Пусть $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ и пусть $f \in C(\Pi)$. Тогда $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

Доказательство. Положим $\Phi(z) = \int_c^z dy \int_a^b f(x, y) dx$, $\Psi(z) = \int_a^b dx \int_c^z f(x, y) dy$. Легко проверить, что Φ удовлетворяет условиям теорем о непрерывности и дифференцируемости интеграла по верхнему пределу, а Ψ удовлетворяет условиям теорем 2 (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра) и 7 (Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра), и, стало быть, $\Phi, \Psi \in C[c, d] \cap D[c, d]$. Рассмотрим Φ' и Ψ' : $\Phi'(z) = \int_a^b f(x, z) dx = \Psi'(z)$. Поэтому $\Phi - \Psi = \text{const}$ на $[c, d]$. Но $(\Phi - \Psi)(c) = 0$. Следовательно, $\Phi - \Psi = 0$. \square

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & x+y \neq 0 \\ 0 & x+y = 0 \end{cases}.$$

Тогда $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \neq \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$.

Доказательство. Легко видеть, что $f \notin C(0, 0)$ и $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = -\frac{1}{2}$, $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{2}$. \square

§2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пункт 2.1. Несобственные интегралы на бесконечном промежутке интегрирования. Напомним:

Определение 1. Пусть $f \in R[a, b]$, $\forall b > a$. Рассмотрим интеграл $I = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$. Если этот предел существует, то говорят, что интеграл I сходится. В противном случае говорят, что он расходится.

Рассмотрим интеграл

$$(1) \quad F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx, \quad y \in Y,$$

который сходится для всякого $y \in Y$.

Определение 2. Интеграл (2.1) *сходится равномерно* на Y , если $\int_a^b f(x,y) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{Y} F(y)$.

Теорема 3 (Критерий Коши). $\int_a^b f(x,y) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{Y} F(y) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) dx \right| < \varepsilon, \forall b_1, b_2 > M, \forall y \in Y$.

Определение 4. Говорят, что интеграл (2.1) *сходится неравномерно* на Y , если (2.1) сходится поточечно, но не равномерно на Y .

Теорема 5 (Специальный критерий сходимости). Интеграл (2.1) *сходится равномерно на $Y \iff$ (2.1) сходится поточечно на Y и $\int_b^{+\infty} f(x,y) dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{Y} 0$.*

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & y \leq x \leq +\infty \end{cases}$$

сходится неравномерно на $(0, +\infty)$.

Доказательство. $\int_0^{+\infty} f(x,y) dx = \int_0^y \frac{dx}{y} = 1$. Следовательно, интеграл сходится поточечно для любого $y \in (0, +\infty)$.

Заметим, что $\int_b^{+\infty} f(x, 2b) dx = \frac{1}{2} > 0$. Поэтому, $\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 : \forall M \in \mathbb{R} \exists b > M \exists y = 2b : \int_b^{+\infty} f(x,y) dx = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$. \square

Аналогично формулируются определения 1, 2, 4 и теоремы 3, 5 для интеграла вида

$$\int_{-\infty}^a f(x,y) dx, \quad y \in Y,$$

который сходится для всякого $y \in Y$.

Определение 6. Говорят, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$ *сходится равномерно* на Y , если интегралы $\int_{-\infty}^0 f(x,y) dx$ и $\int_0^{+\infty} f(x,y) dx$ *сходятся равномерно* на Y .

Пример.

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2} dx$$

сходится равномерно на $[\varepsilon, +\infty)$, $\forall \varepsilon > 0$ и сходится неравномерно на $(0, +\infty)$.

Доказательство. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yx^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx$. Поэтому достаточно рассматривать интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) e^{-yx^2} dx = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int_0^1 e^{-yx^2} dx$, $I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-yx^2} dx$. Интеграл I_1 — собственный, а интеграл I_2 сходится для всякого $y \in (0, +\infty)$, так как $\exists C_y > 0 : ux^2 e^{-yx^2} \leq C_y$ и, следовательно, $|e^{-yx^2}| \leq \frac{C_y}{x^2}$, причем $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty$.

Пусть $Y = [\varepsilon, +\infty)$. Тогда $\left| \int_b^{+\infty} e^{-yx^2} dx \right| \leq \int_b^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2} dx \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{} 0, \forall y \in Y$. Следовательно, по теореме 5 (Специальный критерий сходимости) $F(y)$ *сходится равномерно* на Y .

Пусть теперь $Y = (0, +\infty)$. Рассмотрим $|F(y)| = F(y) = \int_b^{+\infty} e^{-yx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_{b\sqrt{y}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Заметим, что $|F(\frac{1}{b^2})| =$
 $= \left| \int_b^{+\infty} e^{-\frac{1}{b^2}x^2} dx \right| = b \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt = Cb$, где $C = \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Поэтому, $\exists \varepsilon = 1 > 0 : \forall M \in \mathbb{R} \exists b = M + \frac{1}{C} > M, \exists y = \frac{1}{b^2} \in Y :$
 $\left| \int_b^{+\infty} f(x,y) dx \right| = C(M + \frac{1}{C}) > 1 \geq \varepsilon.$ □

Обозначение. $\Pi_\infty = [a, +\infty) \times [c, d]$.

Замечание. Пусть $f \in C(\Pi_\infty)$ и пусть интеграл $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ сходится поточечно на (c, d) и расходится хотя бы в одной из концевых точек отрезка $[c, d]$. Тогда F сходится неравномерно на (c, d) .

Доказательство. Пусть для определенности расходится $F(c)$. Это значит, что $\exists \varepsilon > 0 : \forall M \in \mathbb{R} \exists b_1, b_2 > M :$
 $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,c) dx \right| > \varepsilon$. Обозначим $\Phi(y) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y) dx$. Так как по условию $\Phi \in C[c, d]$, то $\Phi \in C(c)$. Но тогда $\exists \delta > 0 :$
 $|\Phi(y)| > \varepsilon, \forall y \in [c, \delta)$. Следовательно, по теореме 3 (Критерий Коши) F не сходится равномерно на (c, d) . □

Пункт 2.2. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами.

Теорема 7 (Признак Вейерштрасса). Пусть $f : [a, +\infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, |f(\cdot, y)| \leq g, f(\cdot, y) \in R[a, b], \forall b > a, \forall y \in Y$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx < \infty$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ сходится равномерно по y на Y .

Доказательство. Пусть $b > a$ и $y \in Y$ — произвольны. Имеем: $\left| \int_b^{+\infty} f(x,y) dx \right| \leq \int_b^{+\infty} |f(x,y)| dx \leq \int_b^{+\infty} g(x) dx \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0$. Следовательно, $\int_a^{+\infty} f(x,y) dx \xrightarrow{Y} 0$. В силу теоремы 5 (Специальный критерий сходимости) доказательство завершено. □

Пример.

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y}{x}} \sin(xy)}{x^2 - \cos(x)} dx$$

сходится равномерно по y на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Имеем, $\left| \frac{e^{-\frac{y}{x}} \sin(xy)}{x^2 - \cos(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2 - \cos(x)} \right| \leq \frac{1}{x^2 - 1} \leq \frac{2}{x^2}$. Но $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty$ и, следовательно, искомый интеграл сходится равномерно на $[0, +\infty)$. □

Напомним:

Теорема 8 (Вторая теорема о среднем). Пусть $f \in R[a, b], g \in M[a, b]$. Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a) \int_a^c f(x) dx + g(b) \int_c^b f(x) dx$.

Теорема 9 (Признак Дирихле). Пусть $f, g : [a, +\infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}, f(\cdot, y) \in R[a, b], g(\cdot, y) \in M[a, b], \exists C > 0 :$
 $\left| \int_a^b f(x,y) dx \right| \leq C, \forall b > a, \forall y \in Y$ и $g(x,y) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y) dx$ сходится равномерно по y на Y .

Доказательство. Пусть $b_1, b_2 > a, b_2 > b_1$ и $y \in Y$ — произвольны. Тогда по теореме 8 (Вторая теорема о среднем) $\exists c \in [b_1, b_2] : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y) dx \right| \leq |g(b_1,y)| \left| \int_{b_1}^c f(x,y) dx \right| + |g(b_2,y)| \left| \int_c^{b_2} f(x,y) dx \right|$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists B > a : |g(b,y)| < \varepsilon, \forall b > B, \forall y \in Y$. В итоге, $\forall b_1 > B, \forall b_2 > b_1 : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y) dx \right| < 2C\varepsilon + 2C\varepsilon = 4C\varepsilon$. □

Пример (Интеграл Дирихле).

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x} dx$$

сходится равномерно на $[\delta, +\infty), \forall \delta > 0$ и сходится неравномерно на $(0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $Y = [\delta, +\infty)$. $I(y) = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) \frac{\sin(xy)}{x} dx = I_1 + I_2$, где $I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{x} dx$, $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x} dx$.

При этом I_1 — собственный. Для интеграла I_2 верна теорема 9 (Признак Дирихле): $\left| \int_1^b \sin(xy) dx \right| = \frac{1}{y} |\cos(y) - \cos(by)| \leq \frac{2}{y} \leq \frac{2}{\delta}$, а $\frac{1}{x} \downarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Пусть теперь $Y = (0, +\infty)$. Рассмотрим $\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin(xy)}{x} dx \right| = \left| \int_{b_1 y}^{b_2 y} \frac{\sin(t)}{t} dt \right|$. Заметим, что при $y = \frac{1}{b_1}$, $b_2 = 2b_1$: $\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin(xy)}{x} dx \right| = \left| \int_1^2 \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \neq 0$. Поэтому, $\exists \varepsilon = \left| \int_1^2 \frac{\sin(t)}{t} dt \right| > 0 : \forall B > 0 \exists b_1 > B, \exists b_2 = 2b_1, \exists y = \frac{1}{b_1} \in Y : \left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin(xy)}{x} dx \right| \geq \varepsilon$. \square

Теорема 10 (Признак Абея). Пусть $f, g : [a, +\infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\cdot, y) \in M[a, +\infty)$, $\forall y \in Y$, $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на Y и $\exists C > 0 : |g(x, y)| \leq C, \forall x \geq a, \forall y \in Y$. Тогда $\int_a^b f(x, y) g(x, y) dx$ сходится равномерно по y на Y .

Доказательство. Пусть $b_1, b_2 > a$, $b_2 > b_1$ и $y \in Y$ — произвольны. Тогда, по теореме 8 (Вторая теорема о среднем), $\exists c \in [b_1, b_2] : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| \leq |g(b_1, y)| \left| \int_{b_1}^c f(x, y) dx \right| + |g(b_2, y)| \left| \int_c^{b_2} f(x, y) dx \right|$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists B > a : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \forall b_1 > B, \forall b_2 > b_1, \forall y \in Y$. В итоге, $\forall b_1 > B, \forall b_2 > b_1 : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) g(x, y) dx \right| < C\varepsilon + C\varepsilon = 2C\varepsilon$. \square

Пункт 2.3. Предельный переход в несобственном интеграле.

Теорема 11 (Предельный переход под знаком интеграла). Пусть $f : [a, +\infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, y_0 — предельная точка Y , $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} g(x), \forall b > a$ и $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на Y . Тогда $g \in R[a, b], \forall b > a$ и $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) dx = \int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Доказательство. Для всякого произвольного $b > a$ верна теорема 1.6 (Предельный переход под знаком интеграла) и, стало быть, $g \in R[a, b], \forall b > a$.

Пусть $b_2 > b_1 > a$ — произвольны. Тогда $\int_{b_1}^{b_2} g(x) dx = A_1 + A_2$, где $A_1 = \int_{b_1}^{b_2} [g(x) - f(x, y)] dx$, $A_2 = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно.

По теореме 3 (Критерий Коши) $\exists N > a : |A_2| < \varepsilon, \forall b_1, b_2 > N, \forall y \in Y$.

Пусть теперь $b_1, b_2 > N$ — фиксированы с условием $b_2 > b_1$. Тогда $\exists \delta > 0 : |f(x, y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{b_2 - b_1}, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) \cap Y, \forall x \in [b_1, b_2]$. Следовательно, $|A_1| < \varepsilon, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) \cap Y, \forall x \in [b_1, b_2]$.

В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \exists N > a : \forall b_1, b_2 > N : \left| \int_{b_1}^{b_2} g(x) dx \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

Пусть $b > a$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} g(x) dx = B_1 - B_2 + B_3$, где $B_1 = \int_b^{+\infty} f(x, y) dx$, $B_2 = \int_b^{+\infty} g(x) dx$, $B_3 = \int_a^b [f(x, y) - g(x)] dx$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно.

Из условия теоремы следует, что $\exists N_1 > a : |B_1| < \varepsilon, \forall b > N_1, \forall y \in Y$.

По доказанному ранее $\exists N_2 > a : |B_2| < \varepsilon, \forall b > N_2$.

Пусть теперь $N = \max\{N_1, N_2\}$. и пусть $b > N$ — фиксировано. Тогда $\exists \delta > 0 : |f(x, y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) \cap Y, \forall x \in [a, b]$. Следовательно, $|B_3| < \varepsilon, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) \cap Y, \forall x \in [a, b]$.

В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \int_a^{+\infty} [f(x, y) - g(x)] dx \right| < \varepsilon, \forall y \in \dot{U}_\delta(y_0) \cap Y$. \square

Теорема 12. Пусть $f \in C(\Pi_\infty)$ и пусть интеграл $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$. Тогда $F \in C[c, d]$.

Доказательство. Пусть $y_0 \in [c, d]$ и $b > a$ — произвольны. Из условия следует, что $f \in C([a, b] \times [c, d])$, то есть f равномерно непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$. Следовательно, $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} f(x, y_0)$. Стало быть, выполнены все условия теоремы 11 (Предельный переход под знаком интеграла). Следовательно, $F(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} F(y_0)$. \square

Замечание. В теореме 11 (Предельный переход под знаком интеграла), если Y не ограничено, то в качестве y_0 можно взять $+\infty$ или $-\infty$.

Условия теоремы 12 не являются необходимыми.

Пример.

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} \cos(xy) dx$$

непрерывна на \mathbb{R}_+ , однако интеграл F сходится неравномерно на \mathbb{R}_+ .

Доказательство. Пусть $y_0 > 0$ — произвольно. Тогда $\exists [c, d], c > 0 : y_0 \in [c, d]$. Причем, F сходится равномерно по y на $[c, d]$. Стало быть, по теореме 12 $F \in C[c, d]$, то есть $F \in C(y_0)$. \square

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & x > y \end{cases}$$

сходится неравномерно по y на \mathbb{R}_+ .

Доказательство. Так как $f(x, y) \leq \frac{1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$, то $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{\mathbb{R}_+} 0$. Однако, $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{y} \int_0^y dx = 1 \neq 0$. \square

Пункт 2.4. Дифференцирование несобственных интегралов.

Теорема 13. Пусть $f : \Pi_\infty \rightarrow \mathbb{R}, \exists f'_y, f, f'_y \in C(\Pi_\infty), \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится в некоторой точке $y_0 \in [c, d]$ и пусть $G(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно на $[c, d]$. Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$ и $\exists \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right)' = G(y), \forall y \in [c, d]$.

Доказательство. $\forall x > a : f(x, y) = \int_{y_0}^y f'_y(x, y) dy + f(x, y_0)$. Тогда $\forall b_1, b_2 > a$ с условием $b_2 > b_1 : \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx = A_1 + A_2$, где $A_1 = \int_{b_1}^{b_2} dx \int_{y_0}^y f'_y(x, y) dy, A_2 = \int_{b_1}^{b_2} f(x, y_0) dx$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно.

$$\exists N_1 > a : |A_2| < \varepsilon, \forall b_1, b_2 > N_1.$$

По теореме 1.8 и условию непрерывности $f'_y A_1 = \int_{y_0}^y dy \int_{b_1}^{b_2} f'_y(x, y) dx$. В силу равномерной сходимости G

$$\exists N_2 > a : \left| \int_{b_1}^{b_2} f'_y(x, y) dx \right| < \varepsilon, \forall b_1, b_2 > N_2, \forall y \in [c, d]. \text{ Отсюда: } |A_1| \leq \int_c^d dy \left| \int_{b_1}^{b_2} f'_y(x, y) dx \right| < (d - c)\varepsilon.$$

В итоге, по теореме 3 (Критерий Коши) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$.

Определим теперь для всех натуральных чисел, больших a , функцию $F_n(y) = \int_a^n f(x, y) dx$, определенную на $[c, d]$. Заметим, что $(F_n, n \in \mathbb{N}, n > a)$ — функциональная последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы 2.1.11 (Дифференцирование функциональной последовательности): $\exists F'_n$ на $[c, d], \forall n \in \mathbb{N}, n > a$ (следует из теоремы 1.7 (Дифференцируемость собственного интеграла, зависящего от параметра)); $F_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \forall y \in [c, d]; F'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[c, d]} G$. Стало быть, $\exists F'(y) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) \right)' \stackrel{\text{т. 2.1.11}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} F'_n(y) = G(y), \forall y \in [c, d]$. \square

Обозначение. $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$.

Пример (Интеграл Дирихле).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $f(x, y) = e^{-xy} \frac{\sin(x)}{x}$ (в точках вида $(0, y)$ доопределим пределом), определенную на $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$ и $F(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx$, определенную на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Легко видеть, что $f \in C(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)$; $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ сходится равномерно по y на $\overline{\mathbb{R}}_+$; e^{-xy} монотонно убывает по x , $\forall y \in \overline{\mathbb{R}}_+$, следовательно, $0 < e^{-xy} \leq 1$, и, стало быть, по теореме 10 (Признак Абеля) F сходится равномерно по y на $\overline{\mathbb{R}}_+$. В итоге, выполнены все условия теоремы 12 (Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра), поэтому $F \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Легко видеть, что f дифференцируема по y . Рассмотрим функцию $G(y) = \int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx$, определенную на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Для всякого $y_0 \in \mathbb{R}_+ \exists [c, d]$, $c > 0$: $y_0 \in [c, d]$. Нетрудно убедиться, что $f'_y(x, y) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [c, d])$ и G сходится равномерно на $[c, d]$. Стало быть, по теореме 13 (Дифференцирование несобственных интегралов) $\exists F' = G$ на $[c, d]$. В силу произвольности $y_0 \exists F' = G$ на \mathbb{R}_+ .

$G(y) = \int_0^{+\infty} (-\sin(x))e^{-xy} dx = \cos(x)e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} \cos(x)e^{-xy} dx = -1 + y \left(\sin(x)e^{-xy} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-xy} dx \right) = -1 - y^2 G(y)$. Стало быть, $G(y) = -\frac{1}{1+y^2}$.

Пусть $y \in \mathbb{R}_+$. Тогда $F(y) = \int G(y) dy = -\arctan(y) + C$. Легко видеть, что $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C$. Следовательно, $C = \frac{\pi}{2}$.

В силу непрерывности $FI = F(0) = \lim_{y \rightarrow +0} F(y) = \frac{\pi}{2}$. □

Следствие.

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(a).$$

Замечание. $I(a)$ сходится неравномерно на \mathbb{R} .

Пункт 2.5. Интегрируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 14 (Интегрирование по конечному промежутку). Пусть $f \in C(\Pi_\infty)$ и $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$. Тогда $F \in R[c, d]$, причем $\int_c^d F(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$.

Доказательство. Так как по теореме 12 (Непрерывности несобственных интегралов) $F \in C[c, d]$, то $F \in R[c, d]$.

Рассмотрим произвольную последовательность Гейне ($b_n > a$, $n \in \mathbb{N}$), связанную с $+\infty$. Пусть $F_n(y) = \int_a^{b_n} f(x, y) dx$. Заметим, что $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[c, d]} F(y)$ (по условию) и $f \in C(\Pi_\infty)$. По теоремам 2.1.10 (Интегрируемость функциональных последовательностей) и 1.8 (Интегрируемость интеграла, зависящего от параметра) $\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d dy \int_a^{b_n} f(x, y) dx \stackrel{1.8}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$. В силу произвольности последовательности ($b_n > a$, $n \in \mathbb{N}$), теорема доказана. □

Лемма 15. Пусть $f \in R[a, b]$, $\forall b > a$, $f \geq 0$ на $[a, +\infty)$ и существует последовательность Гейне ($b_n > a$, $n \in \mathbb{N}$), связанная с $+\infty$ такая, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x) dx = F$. Тогда $\exists \int_a^{+\infty} f(x) dx = F$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. В силу условия и теоремы 3 (Критерий Коши) $\exists N \in \mathbb{N}$: $\left| \int_a^{b_n} f(x) dx - F \right| < \varepsilon$ и $\left| \int_{b_m}^{b_n} f(x) dx \right| < \varepsilon$, $\forall m, n > N$.

Пусть ($c_m > a$, $m \in \mathbb{N}$) — произвольная последовательность Гейне, связанная с $+\infty$. Так как $c_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$, то $\exists M \in \mathbb{N}$: $c_m > b_{N+1}$, $\forall m > M$. Фиксируем произвольно $m > M$. В силу того, что $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, $\exists n > N$: $b_{N+1} < c_m < b_n$.

В итоге, $\left| \int_a^{c_m} f(x) dx - F \right| = \left| \left(\int_a^{b_{N+1}} f(x) dx - F \right) + \left(\int_{b_{N+1}}^{c_m} f(x) dx \right) \right| \stackrel{\text{т.к. } f \geq 0}{\leq} \left| \int_a^{b_{N+1}} f(x) dx - F \right| + \left| \int_{b_{N+1}}^{c_m} f(x) dx \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

В силу произвольности выбора последовательности ($c_m > a$, $m \in \mathbb{N}$) и m лемма доказана. □

Замечание. Пусть $f \in C(\Pi_\infty)$, $f \geq 0$ на Π_∞ и пусть существует последовательность Гейне, связанная с $+\infty$, такая, что $\int_a^{b_n} f(x, y) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[c, d]} F(y)$. Тогда $\exists \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, причем он сходится равномерно по y на $[c, d]$.

Лемма 16. Пусть $f \in C(\Pi_\infty)$ и $f \geq 0$ на Π_∞ . Тогда для равномерной сходимости по y на $[c, d]$ интеграла $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ необходимо и достаточно непрерывности F на этом отрезке.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 12 (Непрерывность несобственного интеграла).

Достаточность следует из леммы 15 для функциональной последовательности $(F_n(y) = \int_a^n f(x, y) dx, n \in \mathbb{N}, n > a)$, выполнение условия равномерной сходимости для которой следует из теоремы 2.1.5 (Признак Дини). \square

Теорема 17. Пусть $f \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$, $f \geq 0$ на $[a, +\infty) \times [c, +\infty)$, существуют интегралы $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ и $G(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$, причем они непрерывны. Если при этом существует хотя бы один из повторных интегралов, то существует и другой, причем они совпадают.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\exists I = \int_c^{+\infty} F(y) dy$.

Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность Гейне ($b_m > a, m \in \mathbb{N}$), связанную с $+\infty$ и обозначим:

$$F_m(y) = \int_a^{b_m} f(x, y) dx, \quad G_n(x) = \int_c^n f(x, y) dy, \quad J_{m,n} = \int_c^n dy \int_a^{b_m} f(x, y) dx.$$

В силу неотрицательности f $J_{m,n} = \int_c^n F_m(y) dy \leq \int_c^n F(y) dy \leq \int_c^{+\infty} F(y) dy = I$.

Так как по теореме 1.8 (Интегрируемость интеграла, зависящего от параметра) $J_{m,n} = \int_a^{b_m} dx \int_c^n f(x, y) dy = \int_a^{b_m} G_n(x) dx$, то по лемме 16 $G_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b_m]}$ G . Для всякого фиксированного $m \in \mathbb{N}$ по теореме 1.6 (Предельный переход под знаком интеграла) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} J_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{b_m} G_n(x) dx = \int_a^{b_m} G(x) dx = J_m$. При этом $J_m \leq I$.

В силу монотонности последовательности ($b_m > a, m \in \mathbb{N}$), неотрицательности G (следует из неотрицательности f) и теоремы Вейерштрасса $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} J_m = J \in \mathbb{R}$. В силу леммы 15 $\exists \int_a^{+\infty} G(x) dx = J$. При этом $J \leq I$.

Меняя местами x и y в предыдущих рассуждениях, получаем, что $I \leq J$. Стало быть, $J = I$. \square

Теорема 18. Пусть $f \in C([a, +\infty) \times [c, +\infty))$, существуют и непрерывны интегралы $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$, $\int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$. Если при этом существует хотя бы один из повторных интегралов $\left(\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \right.$ или $\left. \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy \right)$, то существуют и совпадают интегралы $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ и $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$.

Доказательство. По лемме 16 $\forall d > c \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$. Стало быть, по теореме 3 (Критерий Коши) $F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по y на $[c, d]$. Следовательно, $F \in C[c, +\infty)$.

Аналогично $G(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \in C[a, +\infty)$.

Без ограничения общности предположим, что $\exists \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy$. По теореме 3 (Критерий Коши) $\exists \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$. В итоге для f выполнены все условия теоремы 17, кроме условия неотрицательности f .

Но для $f_1 = \frac{|f|-f}{2}$ и $f_2 = \frac{|f|+f}{2}$ выполнены все условия теоремы 17. Теорема доказана в силу соотношения $f = f_2 - f_1$. \square

Пример (Интеграл Пуассона).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Доказательство. Из [7, стр. 318]. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I$.

Положим $\psi(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-(xy)^2} dx$, тогда $\psi(0) = 0$ и $\psi(y) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = I$ при $y > 0$. Следовательно,
 $\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \psi(y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} I dy = I^2$.

Функция $f(x,y) = ye^{-(1+x^2)y^2}$ непрерывна и неотрицательна на $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Функция $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2} dy = \frac{1}{2(1+x^2)}$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и интеграл $\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. Функция же $F(y)$, где $F(y) = e^{-y^2} \psi(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2} dx$, непрерывна только на луче $[\varepsilon, +\infty)$, где $\varepsilon > 0$. Таким образом, условия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов выполнены для семейства $f(x,y)$, $x \in [0, +\infty)$, $y \in [\varepsilon, +\infty)$, при любом $\varepsilon > 0$, поэтому получаем $\int_{\varepsilon}^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x,y) dx = \int_0^{+\infty} dx \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^{+\infty} G(x, \varepsilon) dx$ при любом $\varepsilon > 0$, где $G(x, \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x,y) dy$, $x \in [0, +\infty)$, $\varepsilon \in [0, 1)$.

Неравенство $0 < G(x, \varepsilon) \leq \int_0^{+\infty} f(x,y) dy = \Phi(x)$, $\varepsilon \geq 0$, показывает, что в силу признака Вейерштрасса $\int_0^{+\infty} G(x, \varepsilon) dx$ сходится равномерно на $[0, 1]$, поэтому $I^2 = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x,y) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x,y) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} G(x, \varepsilon) dx = \int_0^{+\infty} G(x, 0) dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x,y) dy = \frac{\pi}{4}$. Отсюда получаем, что $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. \square

Замечание. Аналогично рассматриваются интегралы вида $\int_{-\infty}^a f(x,y) dx$.

Замечание. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$ раскладывают в сумму интегралов $\int_{-\infty}^0 f(x,y) dx$ и $\int_0^{+\infty} f(x,y) dx$, а затем рассматривается каждый по отдельности.

Пункт 2.6. Несобственные интегралы от неограниченных функций, зависящие от параметра. Напомним:

Определение 19. Пусть $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in R[a + \varepsilon, b]$, $\forall \varepsilon \in (0, b - a)$. Тогда несобственным интегралом $\int_a^b f(x) dx$ называется $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$, если этот предел существует.

Определение 20. Пусть $f : (a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ и пусть $\exists \int_a^b f(x,y) dx$, $\forall y \in Y$. Тогда интеграл $F(y) = \int_a^b f(x,y) dx$ сходится равномерно на Y , если $F_{\varepsilon}(y) = \int_{a+\varepsilon}^b f(x,y) dx \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow +0]{Y} F(y)$.

Замечание. Аналогично определяется равномерная сходимость для $f : [a, b) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$.

Замечание. Для функций $f : (a, b) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ выбирается некоторое $c \in (a, b)$ и интеграл раскладывается в сумму интегралов $\int_a^c f(x,y) dx$ и $\int_c^b f(x,y) dx$.

Задача. Сформулировать и доказать критерий Коши, специальный признак равномерной сходимости, признак Вейерштрасса равномерной сходимости, теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости в случае $Y = [c, d]$.

Пример.

$$F(y) = \int_0^1 x^{-1+y} dx$$

сходится равномерно на $[y_0, +\infty)$, $\forall y_0 > 0$ и неравномерно на $(0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $Y = [y_0, +\infty)$. Тогда $x^{-1+y} \leq x^{-1+y_0}$. По признаку Вейерштрасса $F(y)$ сходится равномерно по y на Y .

Пусть теперь $Y = (0, +\infty)$. Тогда $F(y) - F_n(y) = \int_0^1 x^{-1+y} dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 x^{-1+y} dx = \int_0^{\frac{1}{n}} x^{-1+y} dx = \frac{x^y}{y} \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{y n^y} \stackrel{y=\frac{1}{n}}{=} n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Стало быть, $\sup_{(0, +\infty)} |F - F_n| \geq \left| F\left(\frac{1}{n}\right) - F_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} n \not\rightarrow 0$, то есть нарушен специальный признак равномерной сходимости. \square

§3. Интегралы Эйлера

Пункт 3.1. Гамма-функция Эйлера (интеграл Эйлера второго рода).

Определение 1. Интеграл

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} x^{-1+y} e^{-x} dx, \quad y > 0$$

называется Гамма-функцией.

Теорема 2 (Свойства Гамма-функции).

1. $\Gamma \in C(0, +\infty)$;
2. $\Gamma \in D^\infty(0, +\infty)$, причём $\frac{d^m \Gamma}{dy^m}(y) = \int_0^{+\infty} x^{-1+y} \ln^m(x) e^{-x} dx$, $m \in \mathbb{N}$;
3. $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$;
4. $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$;
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$;
6. $\Gamma(y)\Gamma(1-y) = \frac{\pi}{\sin(\pi y)}$, $y \in (0, 1)$.

Доказательство. 1. $\Gamma(y) = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \int_0^1 x^{-1+y} e^{-x} dx$, $\Gamma_2 = \int_1^{+\infty} x^{-1+y} e^{-x} dx$.

Γ_1 . Пусть $y_0 > 0$ — произвольно. $\forall y \geq y_0$: $|x^{-1+y} e^{-x}| \leq |x^{-1+y}| \leq |x^{-1+y_0}|$ и $\int_0^1 x^{-1+y_0} dx < \infty$. Стало быть, по признаку Вейерштрасса (задача к пункту 2.6) Γ_1 сходится равномерно на $[y_0, +\infty)$, $\forall y_0 > 0$. Следовательно, $\Gamma_1 \in C[y_0, +\infty)$, $\forall y_0 > 0$, то есть $\Gamma_1 \in C(0, +\infty)$.

Γ_2 . Пусть $y_0 > 0$ — произвольно. $|x^{-1+y} e^{-x}| \leq x^{-1+y_0} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \leq C_{y_0} e^{-\frac{x}{2}}$ и $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx < \infty$. Стало быть, по теореме 2.7 (Признак Вейерштрасса) Γ_2 сходится равномерно на $(0, y_0]$, $\forall y_0 > 0$. Следовательно, $\Gamma_2 \in C(0, y_0]$, $\forall y_0 > 0$, то есть $\Gamma_2 \in C(0, +\infty)$.

2. $\Gamma(y) = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \int_0^1 x^{-1+y} e^{-x} dx$, $\Gamma_2 = \int_1^{+\infty} x^{-1+y} e^{-x} dx$.

Γ_1 . Пусть $y_0 > 0$ — произвольно. $\forall y \geq y_0$: $|x^{-1+y} \ln^m(x) e^{-x}| \leq x^{-1+y_0} x^{y-y_0} |\ln^m(x)| \leq x^{-1+\frac{y_0}{2}} x^{\frac{y_0}{2}} |\ln^m(x)| \leq C_{y_0, m} x^{-1+\frac{y_0}{2}}$ и $\int_0^1 x^{-1+\frac{y_0}{2}} dx < \infty$. Стало быть, по признаку Вейерштрасса (задача к пункту 2.6) Γ_1 сходится равномерно на $[y_0, +\infty)$, $\forall y_0 > 0$. Следовательно, $\Gamma_1 \in C[y_0, +\infty)$, $\forall y_0 > 0$, то есть $\Gamma_1 \in C^\infty(0, +\infty)$.

Γ_2 . Пусть $y_0 > 0$ — произвольно. $|x^{-1+y} \ln^m(x) e^{-x}| \leq x^{-1+y_0} x^{y-y_0} e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \leq C_{y_0, m} e^{-\frac{x}{2}}$ и $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx < \infty$. Стало быть, по теореме 2.7 (Признак Вейерштрасса) Γ_2 сходится равномерно на $(0, y_0]$, $\forall y_0 > 0$. Следовательно, $\Gamma_2 \in C(0, y_0]$, $\forall y_0 > 0$, то есть $\Gamma_2 \in C^\infty(0, +\infty)$.

3. $\Gamma(y+1) = \int_0^{+\infty} x^y e^{-x} dx = -x^y e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} x^{-1+y} e^{-x} dx = y\Gamma(y)$.

4. $\Gamma(1) = 1$: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. Стало быть, в силу пункта 2 данной теоремы $\Gamma(n+1) = n!$.

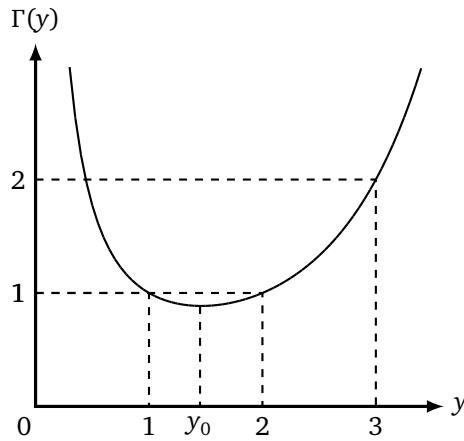
5. $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \stackrel{x=t^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$.

6. Без доказательства. \square

Следствие (График Гамма-функции).

Заметим что:

1. $\Gamma''(y) = \int_0^{+\infty} x^{-1+y} \ln^2(x) e^{-x} dx > 0$;
2. $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. Следовательно, по теореме Ролля $\exists y_0 \in (1, 2)$: $\Gamma'(y_0) = 0$;
3. $\Gamma(y) = \frac{\pi}{\sin(\pi y)\Gamma(1-y)} \stackrel{y \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{y}$.



Пункт 3.2. Бета–функция Эйлера (интеграл Эйлера первого рода).

Определение 3. Интеграл

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{-1+x}(1-t)^{-1+y} dt, \quad x,y > 0$$

называется Бета–функцией.

Теорема 4 (Свойства Бета–функции).

1. $B(x,y) \in C(\mathbb{R}_+^2)$;
2. $B(x,y) = B(y,x)$;
3. $B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{-1+x} dz}{(1+z)^{x+y}}$;
4. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Указание к доказательству пункта 3. Замена $t = \frac{z}{1+z}$. □

Доказательство пункта 4. Без доказательства. □

§4. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции полиномами

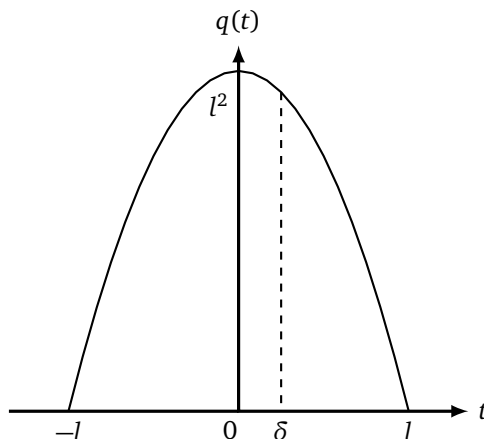
Рассмотрим пространство $C[a, b]$ с нормой $\|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$.

Теорема 1. Для всякой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f существует последовательность полиномов $(p_n(x) \in \mathbb{R}[x], n \in \mathbb{N})$ такая, что $\|f - p_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ на $[a, b]$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать что $f(a) = f(b) = 0$, так как в противном случае с помощью линейной замены $\tilde{f}(x) = f(x) + cx + d$ можно добиться, чтобы $f(a) + ac + d = f(b) + bc + d = 0$, и из предположения, что $(\tilde{p}_n(x) \in \mathbb{R}[x], n \in \mathbb{N})$ — последовательность полиномов для \tilde{f} , будет следовать, что $(\tilde{p}_n(x) - cx - d \in \mathbb{R}[x], n \in \mathbb{N})$ — последовательность полиномов для f . Также можно считать, что f равна 0 на $\mathbb{R} \setminus [a, b]$.

Пусть $l = b - a$. Рассмотрим функцию $q(t) = \max\{l^2 - t^2, 0\}$.

Положим $c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} q^n(t) dt$, $A_n(\delta) = \int_{|t| \geq \delta} q^n(t) dt$ и $Q_n(t) = \frac{q^n(t)}{c_n}$.



Заметим, что $A_n(2\delta) = 2 \int_{2\delta}^l q^n(t) dt \leq 2q^n(2\delta)l$ и $c_n = 2 \int_0^l q^n dt \geq 2 \int_0^\delta q^n(t) dt \geq 2\delta q^n(\delta)$. Стало быть, $\frac{A_n(2\delta)}{c_n} \leq \frac{lq^n(2\delta)}{\delta q^n(\delta)} = C_\delta \left(\frac{q(2\delta)}{q(\delta)}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Легко видеть, что f равномерно непрерывна на \mathbb{R} , поэтому $\omega_f(z) \xrightarrow{z \rightarrow +0} 0$, где $\omega_f(z) = \sup_{|x-y| < z} |f(x) - f(y)|$ — модуль непрерывности функции f .

Положим $\widehat{p}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)Q_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)Q_n(x-t)dt$ — свертка f с Q_n . Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно.

Тогда $\exists \delta > 0$: $\omega_f(z) < \varepsilon$, $\forall z \in (0, \delta)$. Заметим, что $|f(x) - \widehat{p}_n(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(t))Q_n(x-t)dt \right| \leq I_1 + I_2$, где

$I_1 = \int_{|x-t| \leq \delta} |f(x) - f(t)|Q_n(x-t)dt$, $I_2 = \int_{|x-t| \geq \delta} |f(x) - f(t)|Q_n(x-t)dt$. Но $I_1 \leq \omega_f(\delta) \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x-t)dt = \omega_f(\delta) < \varepsilon$ и

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $I_2 \leq 2\|f\| \int_{|x-t| \geq \delta} Q_n(x-t)dt < \varepsilon$, $\forall n > N_\varepsilon$. Стало быть, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$: $\|f - \widehat{p}_n\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, $\forall n > N$.

Пусть $x \in [a, b]$. Тогда $\widehat{p}_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x-t)f(t)dt = \int_a^b Q_n(x-t)f(t)dt$, причем $Q_n(x-t) = \frac{q^n(x-t)}{c_n} = \frac{(t^2 - (x-t)^2)^n}{c_n} =$

$= \sum_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k$, где $a_k(t)$ — соответствующие полиномы. Поэтому $\widehat{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} b_k x^k$, где $b_k = \int_a^b a_k(t)f(t)dt$. Стало

быть, сужение \widehat{p}_n на $[a, b]$ — полином. \square

Следствие. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, что $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a, b]$.

Ряды Фурье

§1. Ряды Фурье по ортогональным системам функций

Пункт 1.1. Ортогональные системы функций.

Определение 1. Скалярным произведением функций f и g в пространстве $C[a, b]$ называется $\int_a^b f(x)g(x)dx$ и обозначается (f, g) .

Определение 2. Нормой функции f в пространстве $C[a, b]$ называется $\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ и обозначается $\|f\|_2$.

Определение 3. Система функций $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ называется ортогональной, если $\varphi_n \neq 0$ на $[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ при $m \neq k$.

Пример. Система функций $(f_n(x) = \sin(nx), n \in \mathbb{N})$ является ортогональной на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_0^{\pi} (\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)) dx = 0.$ □

Замечание. $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Замечание. $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \not\stackrel{\text{в.г.}}{\implies} \|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Пример.

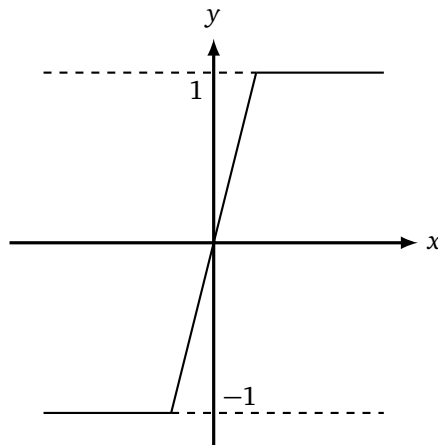
$$f_n(x) = \max\{1 - nx, 0\}$$

сходится на $[0, 1]$ по $\|\cdot\|_2$, но не по $\|\cdot\|_{\infty}$.

Доказательство. $\|f_n - 0\|_2 = \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^2 dx} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$ При этом $f_n(0) = 1$, и, стало быть, $\|f_n - 0\|_{\infty} = 1 \neq 0.$ □

Замечание. Пространство $C[a, b]$ с нормой $\|\cdot\|_2$ не является полным.

Пример. Система функций $(f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$, где $f_n(x) = \begin{cases} nx & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 1 & x > \frac{1}{n} \\ -1 & x < -\frac{1}{n} \end{cases}$, является фундаментальной, но не сходящейся по $\|\cdot\|_2$.



Доказательство. Пусть $m > n$.

$$\|f_m - f_n\|_2^2 = 2 \int_0^{\frac{1}{n}} |f_m(x) - f_n(x)|^2 dx \leq 2 \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Предположим, $\exists f \in C[-1, 1] : \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$ Пусть $g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. Очевидно, что $g \notin C[-1, 1]$.

Следовательно, $f \neq g$ на $[-1, 1]$. Стало быть, $f \neq g$ на $[-1, 0]$ или на $[0, 1]$. Пусть для определенности на $[0, 1]$.

Заметим, что $\|g - f_n\|_2^2 \leq 2 \int_0^{\frac{1}{n}} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Имеем, $\|g - f\|_2^2 \geq \int_0^1 |1 - f(x)|^2 dx = C > 0$, так как $f \in C[0, 1]$ и $\exists x_0 \in [0, 1] : f(x_0) \neq 1$. Но с другой стороны, $\|g - f\|_2 \leq \|g - f_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и поэтому $\|g - f\|_2 = 0 \neq \sqrt{C}$. Противоречие. \square

Замечание. Для простоты обозначения, индекс у $\|\cdot\|_2$ опустим.

Определение 4. Ортогональная система функций $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ называется ортонормальной, если $\|\varphi_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Пример. Система функций $(\varphi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N})$ является ортонормальной на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2nx)) dx = 1.$ \square

Замечание. Если система функций $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ ортогональна, то система функций $(\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ — ортонормальна.

Пункт 1.2. Ортогональность и линейная независимость функций.

Определение 5. Система функций $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ называется линейно независимой, если $\forall m \in \mathbb{N}$ выражение $\sum_{k=1}^m c_k \varphi_k$ обращается в ноль если и только если $c_1 = \dots = c_m = 0$.

Теорема 6. Всякая ортогональная система функций $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ является линейно независимой.

Доказательство. Пусть $m \geq 2$ и $s \leq m$ — произвольны. Предположим, что $\sum_{k=1}^m c_k \varphi_k = 0$. Тогда $0 = \int_a^b 0 dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x) \right) dx = \int_a^b \left(\varphi_s(x) \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x) \right) dx = c_s \|\varphi_s\|^2$. Так как $\|\varphi_s\|^2 \neq 0$, то $c_s = 0$. \square

Замечание. Не всякая линейно независимая система функций является ортогональной.

Пример. $(f_n = x^{n-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ — неортогональная линейно независимая система функций.

Доказательство. $\int_0^1 x^{m-1} x^{n-1} dx = \frac{1}{m+n-1} \neq 0.$ \square

Пункт 1.3. Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Определение 7. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной, если существуют такие $a = x_0 < \dots < x_n = b$, что $f \in C(x_{i-1}, x_i), \forall i = 1 \dots n$, причем функция f в точках x_k либо непрерывна, либо имеет разрыв первого рода.

Пример. $f(x) = [x]$ — целая часть.

Пусть $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ — ортогональная система функций и пусть f — кусочно-непрерывная функция на $[a, b]$.

Определение 8. Числа $c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, n \in \mathbb{N}$ называются коэффициентами Фурье функции f .

Определение 9. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), x \in [a, b]$ называется рядом Фурье функции f .

Обозначение. $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$.

Теорема 10 (Единственность разложения в ряд Фурье). Пусть $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ — ортогональная система функций, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и пусть $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \varphi_n$, причем сходимость ряда равномерная. Тогда $c_n^* = c_n$ — коэффициенты ряда Фурье функции f .

Доказательство. $c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^* \varphi_n(x) \right) \varphi_k(x) dx = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b c_n^* \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b c_k^* \varphi_k^2(x) dx = c_k^*.$ \square

Теорема 11 (Неравенство Бесселя). Пусть $(\varphi_n \in C[a, b], n \in \mathbb{N})$ — ортонормальная система функций, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и пусть $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|^2$.

Доказательство. Пусть $S_k = \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n$. Тогда $\int_a^b [f(x) - S_k(x)] \varphi_j(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx - c_j = 0$, если $j \leq k$.

Поэтому $\int_a^b [f(x) - S_k(x)] S_k(x) dx = 0$.

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x) dx = \int_a^b [f(x) - S_k(x) + S_k(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x) - S_k(x)]^2 dx + \int_a^b S_k^2(x) dx = \int_a^b [f(x) - S_k(x)]^2 dx + \sum_{n=1}^k c_n^2,$$

причем $\int_a^b [f(x) - S_k(x)]^2 dx \geq 0$. Стало быть, $\sum_{n=1}^k c_n^2 \leq \|f\|^2$. Переходя к пределу по k , получаем утверждение теоремы. \square

Следствие. В силу того, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|f\|^2 < \infty$, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Замечание. Не для всякой последовательности $(c_n, n \in \mathbb{N})$ найдется кусочно-непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$.

Пример. Не существует кусочно-непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции, рядом Фурье которой является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Доказательство. Предположим, что такая кусочно-непрерывная функция существует. Тогда бы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ сходил. Но, как известно, он расходится. Противоречие. \square

Замечание. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ сходится равномерно на $[-\pi + \varepsilon_1, \pi - \varepsilon_2]$, $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 2\pi$, но неравномерно на $[-\pi, \pi]$.

§2. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье

Пункт 2.1. Тригонометрические ряды Фурье. В данном параграфе рассматривается ортогональная система функций $(1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Определение 1. Тригонометрическим рядом Фурье функции f называют ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$, $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Замечание. Для четных функций все b_n равны нулю, а для нечетных — все a_n .

Пункт 2.2. Достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гельдера, если $\exists C > 0, \exists \alpha > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha, \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

Обозначение. $f \in H^\alpha[a, b]$.

Замечание. Функция, удовлетворяющая условию Гельдера на $[a, b]$, является равномерно непрерывной на этом отрезке.

Замечание. Если функция f удовлетворяет условию Гельдера с $\alpha > 1$, то f — константа.

Доказательство. $\left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \leq C|\Delta x|^{\alpha-1} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$. Отсюда $f' = 0$ на $[a, b]$. \square

Замечание. $H^1[a, b] = \text{Lip}[a, b]$.

Пример. $f(x) = |x| \in \text{Lip}[-1, 1]$.

Пример. $f(x) = |x|^\alpha \in H^\alpha[-1, 1], 0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 одного знака и пусть для определенности $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Тогда по теореме Лагранжа $\exists \theta \in (0, 1) : |f(x_2) - f(x_1)| = x_2^\alpha - x_1^\alpha = \frac{\alpha(x_2 - x_1)}{(x_1 + \theta(x_2 - x_1))^{1-\alpha}} \leq \alpha \frac{x_2 - x_1}{x_1^{1-\alpha}} \leq \alpha(x_2 - x_1)^\alpha$, если $x_2 - x_1 \leq x_1$. Если же $x_2 - x_1 > x_1$, то $|f(x_2) - f(x_1)| = x_2^\alpha - x_1^\alpha \leq x_2^\alpha = (x_1 + (x_2 - x_1))^\alpha \leq (2(x_2 - x_1))^\alpha = 2^\alpha(x_2 - x_1)^\alpha$.

Пусть x_1 и x_2 разных знаков. Тогда $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2^\alpha - 0| + |x_1^\alpha - 0| \leq 2 \max\{\alpha, 2^\alpha\} |x_2 - x_1|^\alpha = 2^{1+\alpha} |x_2 - x_1|^\alpha$.

В итоге в качестве C можно взять $2^{1+\alpha}$. \square

Определение 3. Пусть $f : [a, b] \setminus x \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная функция. Говорят, что f удовлетворяет условию Дини в точке x , если $\exists f(x+0), f(x-0)$, причем $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 : \int_0^{\varepsilon_1} \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t} dt < \infty$ и $\int_0^{\varepsilon_2} \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t} dt < \infty$.

Пример. Гельдерова на $[a, b]$ функция удовлетворяет условию Дини во всех точках отрезка $[a, b]$.

Пример. Если функция f и ее производная являются кусочно-непрерывными на $[a, b]$, то f удовлетворяет условию Дини в каждой точке этого отрезка.

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \bar{f}, \bar{f}' \in C[x_0, x_0 + \varepsilon]$, где $\bar{f} = \begin{cases} f(x) & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon] \\ f(x_0 + 0) & x = x_0 \end{cases}$,

$\bar{f}' = \begin{cases} f'(x) & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon] \\ f'(x_0 + 0) & x = x_0 \end{cases}$. Отсюда $\bar{f}' \in B(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Стало быть, $\bar{f} \in \text{Lip}[x_0, x_0 + \varepsilon] = H^1[x_0, x_0 + \varepsilon]$. Следовательно, выполнено условие Дини справа от точки x_0 . Аналогично доказывается слева. \square

Замечание. Непрерывности функции f на $[a, b]$ не достаточно для того, что бы f удовлетворяла условию Дини во всех точках отрезка $[a, b]$.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\ln|x||} & 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ x & x = 0 \end{cases}$ непрерывна на $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, но в точке 0 не удовлетворяет условию Дини.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Тогда $\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{f(0+t)-f(0)}{t} dt = -\int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{dt}{t \ln(t)} \stackrel{y=\ln(t)}{=} \int_{\ln(\delta)}^{\ln(\varepsilon)} \frac{dy}{\ln(\varepsilon)y} = \ln(\ln(\varepsilon)) - \ln|\ln(\delta)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} +\infty$.

Стало быть, $\int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t|\ln(t)|}$ расходится. \square

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{|\ln(x)|^{\alpha}}$ удовлетворяет условию Дини лишь при $\alpha > 1$.

Лемма 4. Пусть $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Тогда $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos(nx) = \frac{\sin(\frac{2k+1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$.

Доказательство. $2\sin(\frac{x}{2}) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos(nx) \right) = \sin(\frac{x}{2}) + 2\cos(x)\sin(\frac{x}{2}) + \dots + 2\cos(kx)\sin(\frac{x}{2}) = \sin(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{3x}{2}) - \sin(\frac{x}{2}) + \dots + \sin(\frac{(2k+1)x}{2}) - \sin(\frac{(2k-1)x}{2}) = \sin(\frac{2k+1}{2}x)$. \square

Определение 5. Ядром Дирихле называется функция $D_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\frac{2k+1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ (в точках разрыва доопределяется по непрерывности пределом).

Замечание. $\int_0^{\pi} D_k(x) dx = \int_{-\pi}^0 D_k(x) dx = \frac{1}{2}$.

Определение 6. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная функция. Точка $x_0 \in [a, b]$ называется регулярной, если $f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$.

Лемма 7. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная 2π -периодическая функция и пусть $S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ — частичная сумма ряда Фурье функции f . Тогда $S_k(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x-0)] D_k(t) dt + \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+0)] D_k(t) dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k [\cos(nt)\cos(nx) + \sin(nt)\sin(nx)] \right] dt \stackrel{\text{Л.4}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(t-x) dt \stackrel{z=t-x}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_k(z) dz$. Поэтому $S_k(x) - \frac{f(x-0)}{2} - \frac{f(x+0)}{2} = \int_{-\pi}^0 [f(x+z) - f(x-0)] D_k(z) dz + \int_0^{\pi} [f(x+z) - f(x+0)] D_k(z) dz$. \square

Лемма 8. Пусть $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная функция. Тогда $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x) \sin(\lambda x) dx = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\varphi \in C^1[a, b]$. Тогда $\exists M > 0 : |\varphi|, |\varphi'| \leq M$ на $[a, b]$. Тогда $\left| \int_a^b \varphi(x) \sin(\lambda x) dx \right| = \left| -\varphi(x) \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} \Big|_a^b + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda} dx \right| \leq \frac{2M}{\lambda} + \frac{(b-a)M}{\lambda} = \frac{(2+b-a)M}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

Предположим, что $\varphi \in C[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Тогда $\exists \varphi_{\varepsilon} \in C^1[a, b] : \|\varphi - \varphi_{\varepsilon}\|_{\infty} < \varepsilon$ (в качестве такой φ_{ε} можно взять полином, существование которого было доказано в теореме 3.4.1 (Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции полиномами)). По ранее доказанному, $\int_a^b \varphi_{\varepsilon}(x) \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

Поэтому $\exists M_{\varepsilon} > 0 : \left| \int_a^b \varphi_{\varepsilon}(x) \sin(\lambda x) dx \right| < \varepsilon, \forall \lambda > M_{\varepsilon}$. В итоге $\left| \int_a^b \varphi \sin(\lambda x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x) - \varphi_{\varepsilon}(x)| dx + \left| \int_a^b \varphi_{\varepsilon}(x) \cdot \sin(\lambda x) dx \right| < (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (b-a+1)\varepsilon$.

Окончательно, пусть φ — кусочно-непрерывна. Тогда существуют такие $a = x_0 < \dots < x_n = b$, что $f \in$

$C(x_{i-1}, x_i), \forall i = 1 \dots n$. Положим $\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \varphi(x_{i-1} + 0) & x = x_{i-1} \\ \varphi(x_i - 0) & x = x_i \end{cases}$. Легко видеть, что $\varphi_i \in C[x_{i-1}, x_i]$. В итоге,

$\int_a^b \varphi(x) \sin(\lambda x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \sin(\lambda x) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$. \square

Теорема 9 (Достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке). Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — кусочно-непрерывная¹ 2π -периодическая функция, удовлетворяющая условию Дини в некоторой точке x . Тогда ряд Фурье функции f в точке x сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

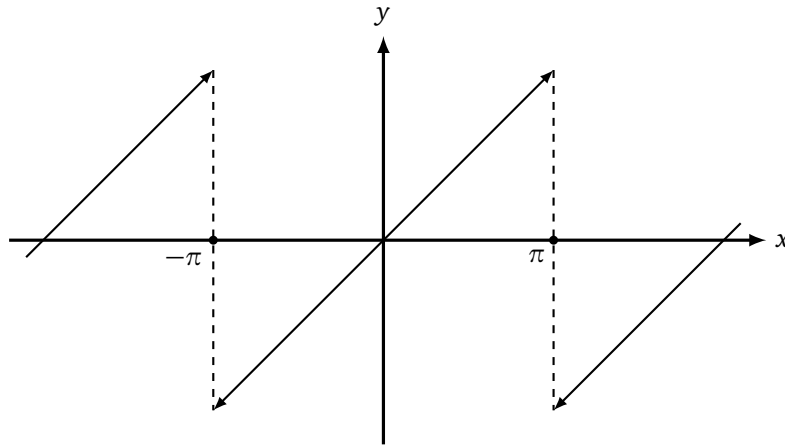
Доказательство. $S_k(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \stackrel{\text{л. 7}}{=} I_1 + I_2$, где $I_1 = \int_0^\pi [f(x-t) - f(x-0)]D_k(t)dt$, $I_2 = \int_0^\pi [f(x+t) - f(x+0)]D_k(t)dt$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно.

Заметим, что $I_1 = \int_0^\pi \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} \frac{t}{2\pi \sin(\frac{t}{2})} \sin(\frac{2k+1}{2}t) dt$. Обозначим подынтегральную функцию через $g_k(t)$.

$|g_k(t)| \leq C \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{|t|}$, $\forall t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. В силу условия Дини $\exists \delta_\varepsilon > 0: \left| \int_0^{\delta_\varepsilon} g_k(t) dt \right| \leq C \int_0^{\delta_\varepsilon} \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{t} dt < \varepsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. По лемме 8 $\exists N \in \mathbb{N}: \left| \int_{\delta_\varepsilon}^\pi g_k(t) dt \right| < \varepsilon$, $\forall k > N$.

Рассмотрев аналогично I_2 , имеем: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: |S_k(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}| < 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$, $\forall k > N$. \square

Пример. Построим график суммы ряда Фурье функции $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$.



Заметим, что этот ряд совпадает с функцией лишь на $(-\pi, \pi)$.

Пункт 2.3. Теорема Фейера.

Определение 10. Ядром Фейера называется функция $F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, где D_k — ядро Дирихле.

Лемма 11. Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}^*$. Тогда $F_n(x) = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{2\pi(n+1)\sin^2(\frac{x}{2})}$.

Доказательство. Имеет место равенство $\sum_{k=0}^n \sin(\frac{2k+1}{2}x) = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$. В самом деле, $\sin(\frac{x}{2}) \left[\sin(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{3x}{2}) + \dots + \sin(\frac{(2n+1)x}{2}) \right] = \sin^2(\frac{x}{2}) + \sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{3x}{2}) + \dots + \sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{(2n+1)x}{2}) = \frac{1-\cos(x)}{2} + \frac{\cos(x)-\cos(2x)}{2} + \dots + \frac{\cos(nx)-\cos((n+1)x)}{2} = \frac{1-\cos((n+1)x)}{2} = \sin^2(\frac{n+1}{2}x)$.

В итоге, $F_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)\sin(\frac{x}{2})} \sum_{k=0}^n \sin(\frac{2k+1}{2}x) = \frac{1}{2\pi(n+1)\sin(\frac{x}{2})} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}x)}{2\pi(n+1)\sin^2(\frac{x}{2})}$. \square

Лемма 12. Пусть $n \in \mathbb{N}^*$. Тогда $\int_{-\pi}^\pi F_n(t) dt = 1$.

Доказательство. Следует из определения ядра Фейера и замечания к определению ядра Дирихле. \square

Теорема 13 (Фейера). Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция, непрерывная в некоторой точке x , такая, что $\int_{-\pi}^\pi |f(t)| dt < \infty$. Тогда $\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, где $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x)$, $S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ — частичная сумма ряда Фурье функции f .

Доказательство.

Из доказательства леммы 7 следует, что $S_k(x) = \int_{-\pi}^\pi f(x+t)D_k(t)dt$. Тогда $\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x) = \int_{-\pi}^\pi f(x+t) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) dt = \int_{-\pi}^\pi f(x+t) F_n(t) dt \stackrel{\text{л. 11}}{=} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{2\pi(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})} dt$.

¹Имеется в виду, что f кусочно-непрерывна на всяком отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

$\sigma_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))F_n(t)dt$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно.

В силу того, что $f \in C(x)$, $\exists \delta = \delta_{\varepsilon, x} > 0 : |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ при $|t| \leq \delta$. Следовательно, $\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt < \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt \stackrel{\pi, 12}{=} \varepsilon$.

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < \infty$, $F_n(t) \leq \frac{C_\delta}{n+1}$ при $|t| \in [\delta, \pi]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, то $\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt \leq \frac{C_\delta}{n+1} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt + 2\pi|f(x)| \right) = \frac{\hat{C}_{x,\delta}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поэтому найдется $N_{\varepsilon, x, \delta} \in \mathbb{N} : \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt < \varepsilon$, $\forall n > N_{\varepsilon, x, \delta}$.

Окончательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, $\forall n > N$. □

Из доказательства теоремы вытекает

Следствие. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π периодическая функция, непрерывная на отрезке $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, такая, что $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < \infty$. Тогда $\sigma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f$.

Приложение

Вопросы коллоквиума

1. Числовые ряды и их основные свойства (необходимый признак сходимости, остаток ряда, критерий Коши).
2. Знакоположительные ряды (критерий сходимости, признаки сравнения, предельный признак сравнения).
3. Знакоположительные ряды (признак Даламбера, формулировка признака Гаусса, радикальный признак Коши).
4. Знакоположительные ряды (интегральный признак Коши).
5. Знакопеременные ряды (абсолютная и условная сходимость, перестановка членов абсолютно сходящегося ряда).
6. Связь между безусловной и абсолютной сходимостью ряда.
7. Теорема Римана об условно сходящемся ряде.
8. Умножение рядов (теорема Абеля об умножении двух абсолютно сходящихся рядов, произведения рядов по Коши — теорема Мертенса).
9. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда.
10. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.
11. Функциональные последовательности (поточечная и равномерная сходимости, критерий Коши и специальный критерий равномерной сходимости, признак Дини).
12. Теорема о предельном переходе. Свойства равномерно сходящихся последовательностей (непрерывность предельной функции, полнота $C[a, b]$).
13. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей.
14. Функциональные ряды (поточечная и равномерная сходимости, критерий Коши равномерной сходимости, предельный переход, почленное интегрирование и дифференцирование).
15. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда. Пример непрерывной, нигде не дифференцируемой, функции.
16. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости ряда.
17. Степенные ряды (первая теорема Абеля, радиус и интервал сходимости).
18. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля.
19. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
20. Единственность разложения функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Разложения в ряд Тейлора: $\exp(x)$; $\cos(x)$; $\sin(x)$.
21. Разложения в ряд Тейлора: $(1+x)^a$; $\ln(1+x)$.
22. Экспоненциальная функция комплексного переменного.

Экзаменационные вопросы

1. Числовые ряды и их основные свойства (необходимый признак сходимости, остаток ряда, критерий Коши). Знакоположительные ряды (критерий сходимости, признаки сравнения, предельный признак сравнения).
2. Знакоположительные ряды (признак Даламбера, формулировка признака Гаусса, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши).
3. Знакопеременные ряды (абсолютная и условная сходимость, перестановка членов абсолютно сходящегося ряда). Теорема Абеля об умножении двух абсолютно сходящихся рядов.
4. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда.
5. Признак сходимости Дирихле и Абеля.
6. Функциональные последовательности (поточечная и равномерная сходимости, критерий Коши и специальный критерий равномерной сходимости, признак Дини).
7. Свойства равномерно сходящихся последовательностей (предельный переход, непрерывность предельной функции). Полнота $C[a, b]$.
8. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей.

9. Функциональные ряды (поточечная и равномерная сходимости, критерий Коши равномерной сходимости, предельный переход, почленное интегрирование и дифференцирование). Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.
10. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости.
11. Степенные ряды (первая теорема Абеля, радиус и интервал сходимости).
12. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сумма и произведение степенных рядов.
13. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
14. Единственность разложения функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Разложение в ряд Тейлора: $\exp(x)$; $\cos(x)$; $\sin(x)$.
15. Разложение в ряд Тейлора: $(1+x)^a$; $\ln(1+x)$.
16. Непрерывность интеграла, зависящего от трех параметров (в том числе, от нижнего и верхнего пределов).
17. Семейства функций, зависящих от параметра: равномерная сходимости, критерии Коши и Гейне равномерной сходимости. Предельный переход под знаком интеграла.
18. Дифференцируемость интеграла, зависящего от трех параметров (в том числе, от нижнего и верхнего пределов). Формула Лейбница.
19. Интегрируемость интеграла, зависящего от параметра.
20. Равномерная сходимости несобственных интегралов: а) с бесконечным промежутком интегрирования; б) от неограниченной функции. Критерий Коши и Гейне. Критерий равномерной сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции.
21. Признак Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости несобственных интегралов.
22. Предельный переход в несобственном интеграле. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.
23. Дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интеграл Дирихле.
24. Интегрируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Теорема об изменении порядка интегрирования в повторных несобственных интегралах. Интеграл Пуассона.
25. Интегралы Эйлера.
26. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами.
27. Ортогональные системы функций. Ортогональность и линейная независимость. Ряд Фурье кусочно-непрерывной функции по ортогональной системе. Неравенство Бесселя.
28. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема о достаточных условиях сходимости ряда Фурье в точке.
29. Теорема Фейера.

Литература

- [1] Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. М.: МЦНМО, 2015
- [2] Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. М.: МЦНМО, 2015
- [3] Камынин Л. И. Курс математического анализа. Часть I. М.: МГУ, 1995
- [4] Камынин Л. И. Курс математического анализа. Часть II. М.: МГУ, 1995
- [5] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999
- [6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2003
- [7] Виноградова И.А., Олехник С. Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: МЦНМО, 2018