математический анализ

четвертый семестр

лектор
Елена Александровна Бадерко

Часть 5

Лекция 1
09/02 д.о

Кратные интегралы Римана

Глава 1 Интегралы Римана на брусе

§1: Определение интеграла Римана

Пункт 1. Брус в $\mathbb{R}^n$ и его разбиение

Опр.1 Пусть $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, $a_i<b_i$ $\forall i=\overline{1,n}$. Тогда множество $I=I^n:=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]$ называется **брусом** (промежутком) в $\mathbb{R}^n$.

Объёмом (мерой) I называется число $|I|:=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

$v(I)=\mu(I)=|I|$ – так тоже пишут

Опр.2 Пусть I - брус, P_i - разбиение отрезков $[a_i,b_i]$. Тогда

Множество точек $\{x_i\}$ называется **разбиением** P бруса I

$a_i=x_i^{(0)}<x_i^{(1)}<\dots<x_i^{(N_i)}=b_i$, N_i точек разбиения P_i отрезка $[a_i,b_i]$

Разбиение P „делит" брус I на $N:=N_1\cdot N_2\cdot\dots\cdot N_n$ „частичных брусов",

т.е. $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]$ (N_1, N_2, N_n)

$I=\bigcup\limits_{(j)}I_{(j)}$, где

$I_{(j)}:=[x_1^{j_1-1},x_1^{j_1}]\times[x_2^{j_2-1},x_2^{j_2}]\times\dots\times[x_n^{j_n-1},x_n^{j_n}]$ — частичный брус

$1\le j_1\le N_1$

$1\le j_2\le N_2$

$N=(N_1,\dots,N_n)$, $(j):=(j_1,\dots,j_n)$ - **мультииндекс** (набор чисел)

Опр.3 **Диаметром** разбиения P бруса I называется

$$d(P):=\max_{i=\overline{1,n}}d(P_i)$$

Замечание $0<d(P)\le\max\limits_{i=\overline{1,n}}|b_i-a_i|\le\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2\right)^{1/2}=\|\bar b-\bar a\|_2$

Опр.4 Пусть P-разбиение бруса I, так что $I=\bigcup\limits_{(j)}I_{(j)}$

$\forall(j)$ фикс. произв. $\xi^{(j)}=(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_n^{(j)})\in I_{(j)}$, $\xi_i^{(j)}\in[x_i^{(j-e)},x_i^{(j)}]$

$\xi:=\{\xi^{(k)}\}$ - **метка**; разбиение P вместе с меткой - **размеченное разбиение** бруса I

Пункт 2. Интеграл Римана на брусе $\bar{I}^n$

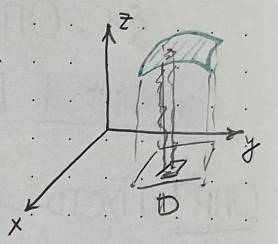
Опр. 1 Пусть $f: \bar{I} \to \mathbb{R}$ и (P, ξ) - размеченное разбиение бруса $\bar{I}$

Число $\sigma(f, P, \xi) := \sum_{(j)} f(\xi^{(j)}) \cdot |\bar{I}_{(j)}|$ называется **интегральной суммой** функции $f(\bar{x})$, соответствующей разм разбиению (P, ξ)

Было: площадь под графиком $f(x)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ Стало: объём цилиндроида

$z = f(x,y)$ $(x,y) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$

$\mathbb{D} := [a,b] \times [c,d]$



Опр. 2. Число J называется пределом $\sigma(f, P, \xi)$ при $d(P) \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall$ разм. разб. (P, ξ) с $d(P) < \delta$ $|\sigma(f, P, \xi) - J| < \varepsilon$

Тогда J - **кратный интеграл Римана** функции $f(x)$ по брусу $\bar{I}^n$

Утв. $\mathcal{B}$ - база, если: $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in M$

1) $\forall \varepsilon \in M$ $B_\varepsilon \neq \emptyset$ 2) $\forall \varepsilon_1$ и $\varepsilon_2 \in M$ $\exists B_{\varepsilon_3} \subset B_{\varepsilon_1} \cap B_{\varepsilon_2}$

Пусть $\mathcal{T}$ - множество всех разм. разбиений (P, ξ) бруса $\bar{I}$

Введём базу $\mathcal{B} = \{B_\delta\}$, где $B_\delta := \{(P, \xi) / d(P) < \delta\}$, $0 < \delta \leq \delta_0 = \max_{i=\overline{1,n}} (b_i - a_i)$

Тогда $\mathcal{B}$ - база, обозн. $d(P) \to 0$

Следствие 1) $J = \lim_{d(P) \to 0} \sigma(P, \xi) \iff J = \lim_{\mathcal{B}} \sigma(P, \xi)$

2) Единственность предела

3) Критерий Коши

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $\forall (P, \xi), (P', \xi')$ / $d(P) < \delta$, $d(P') < \delta$

$\Rightarrow |\sigma(f, P, \xi) - \sigma(f, P', \xi')| < \varepsilon$

Опр. 3 f называется **интегрируемой по Риману** на брусе $\bar{I}$, если $\exists J = \lim_{d(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi) \in \mathbb{R}$

Число J - интеграл Римана на брусе $\bar{I}$ от ф-ции f

$$J = \int_{\bar{I}^n} f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{\bar{I}^n} f(x_1, \dots, x_n)\, \underbrace{dx_1 \dots dx_n}_{dv \text{ - эл-}\bar{I} \text{ n-мерн. объёма}}$$

(n) $\iint_{\bar{I}^2} f(x,y)\, dx\, dy$

Опр.4 $R(\bar{I})$ – множество всех функций, интегрируемых на брусе $\bar{I}$

(П) $f(\bar{x}) = c \Rightarrow \int\limits_{\bar{I}^n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n = c \cdot |\bar{I}| = c \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Напоминание $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$

$\overset{(!)}{=} \iint\limits_{\mathbb{D}} f(x,y)\,dx\,dy, \quad \mathbb{D} = [a,b] \times [c,d]$

Задача: $\int\limits_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \Rightarrow \int\limits_{\bar{I}^n} x_1 \dots x_n\,dx_1 \dots dx_n = \frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \cdots \frac{b_n^2 - a_n^2}{2}$ (Камынин)

Задача: Обобщить функцию Дирихле для нашего случая ($\not<^{\text{в.г.}}$)

–11 Необходимое условие интегрируемости

$f \in R(\bar{I}^n) \Rightarrow f \in B(\bar{I}^n)$

▶ Дис: $\exists f \in R(\bar{I}^n)$, но $f \notin B(\bar{I}_n)$, P – произв. разб. бруса $\bar{I} = \bigcup\limits_{(k)} \bar{I}_{(k)}$

$\Rightarrow \exists (k_0) \;/\; f \notin B(\bar{I}_{(k_0)})$

Положим $\varepsilon = 1$, по опр. интегр-ти $\exists \delta > 0 \;/\; \forall (P,\xi), (P',\xi')$ $d(P) < \delta$, $d(P') < \delta$

$|\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P',\xi')| < \varepsilon = 1$

$\exists P = P'$, а ξ и ξ' будут отличаться только на частичном брусе с мультииндексом (k_0)

$\exists \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \bar{I}_{(k_0)}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \bar{I}_{(k_0)}$.

В силу выбора разбиений (P,ξ) и (P',ξ')

$A := |\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P',\xi')| = |f(\alpha) - f(\beta)| \cdot |\bar{I}_{(k_0)}|$

α – фиксируем, β – выбираем в силу неограниченности f на $\bar{I}_{(k_0)}$

$|f(\beta)| \geqslant \frac{1}{|\bar{I}_{(k_0)}|} + |f(\alpha)| \Rightarrow A \geqslant 1$ ⊥ ◀

Замечание Условие не явл. достаточным ($\not<^{\text{в.г.}}$)

Лекция 2
16/02 д.о.

$f(\bar{x}) = 1, \; x_i \in \mathbb{Q}, \; i = \overline{1,n}$
$f(\bar{\xi}) = 0, \; \xi_i \notin \mathbb{Q}, \; i = \overline{1,n}$, $f \notin R(\bar{I})$

Обозн. $\mathcal{T} :=$ мн-во $\{$разб. (P,ξ) бруса $\bar{I}\}$, $\mathcal{T}^* :=$ $\{$разб. P бруса $\bar{I}$ без меток$\}$

Пункт 3. Суммы Дарбу и предельный критерий интегрируемости

(!) $f \notin B(I) \Rightarrow f \notin R(I)$

P - разб. бруса I на $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_n$ - част. брусов

$I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ (k - просто число, не мультииндекс)

$\exists f \in B(I)$

Опр. 1 1) Число $S(f,P) = S(P) = \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k|$, где $M_k := \sup_{I_k} f$ называется **верхней суммой Дарбу** функции f, соотв. разбиению P

2) Число $s(f,P) = s(P) = \sum_{k=1}^{N} m_k |I_k|$, где $m_k := \inf_{I_k} f$ называется **нижней суммой Дарбу** функции f, соотв. разбиению P

Замечание Если $P' < P$ (измельчение), то $S(P') \leq S(P)$ и $s(P') \geq s(P)$ (т.к. $M_{k_e} \leq M_k$ и $m_{k_e} \geq m_k$)

Лемма 1 $f \in B(I) \Rightarrow$ 1) $S(P) = \sup \sigma(P,\xi)$ 2) $s(P) = \inf \sigma(P,\xi)$ $\forall P \in \mathcal{P}^*$

P - фикс. в.с. Дарбу, инт. сумма

▷ 1) ($\Rightarrow$) $\sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \leq S(P)$ $\forall P \in \mathcal{P}^*$ $\quad I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ ($N = N_1 \ldots N_n$) - разб. на част. брусы

$\sigma(P,\xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\bar{\xi}_k)|I_k| \leq \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k| = S(P)$ $\forall \xi$ $\Rightarrow \sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \leq S(P)$

($\Leftarrow$) $\sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \geq S(P)$ $\forall P \in \mathcal{P}^*$

$\exists \varepsilon > 0$ произв., $M_k = \sup_{I_k} f$ $\forall k = \overline{1,N} \Rightarrow \exists \bar{\xi}_k \in I_k \,/\, f(\bar{\xi}_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{|I_k|}$

$\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_N)$ $\quad \sum_{k=1}^{N} f(\bar{\xi}_k)|I_k| > \sum_{k=1}^{N} \left(M_k - \frac{\varepsilon}{|I_k|}\right)|I_k| = S(P) - \varepsilon$

$\sup_{\xi} \sigma(f,P,\xi) \geq \sigma(P,\bar{\xi}_0) = \sum_{k=1}^{N} f(\bar{\xi}_k)|I_k| > S(P) - \varepsilon$ $\quad (\forall \varepsilon > 0)$

$\Rightarrow \sup_{\xi} \sigma(P,\xi) \geq S(P)$. Стало быть, $\sup \sigma(P,\xi) = S(P)$

2) Аналогично ◁

Замечание $f \in C(I) \Rightarrow f \in C(I_k)$ $\forall k \Rightarrow S(P)$ и $s(P)$ - инт. суммы для непр-ой ф-ции

Обозн. P_i - разб. отр. $[a_i, b_i]$ $i = \overline{1,n} \Rightarrow P = (P_1, \ldots, P_n)$

Опр. 2 Пусть $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^*$. Тогда $\tilde{P} = (\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n)$ - **измельчение** разбиения P

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{P}_i$ - измельчение P_i (в старом смысле) $\forall i = \overline{1,n}$ $\quad \tilde{P}_i \subset P_i$

Обозн. $\tilde{P} \prec P$

Лемма 2 Пусть $f \in B(I) \Rightarrow \forall P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^*$ / $\tilde{P} \prec P$ имеем:

1) $S(\tilde{P}) \leqslant S(P) \to \inf\limits_{\mathcal{P}^*} S(P)$ 2) $s(\tilde{P}) \geqslant s(P) \to \sup\limits_{\mathcal{P}^*} s(P)$

▷ 1) Разб. P порождает представление $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$, а $\tilde{P}$ порождает $I_k = \bigcup\limits_{\ell=1}^{N_k} I_{k\ell}$

Так что $I = \bigcup\limits_{k=1}^{N}\bigcup\limits_{\ell=1}^{N_k} I_{k\ell}$. $M_{k\ell} = \sup\limits_{I_{k\ell}} f(\bar{x})$, имеем:

$$S(\tilde{P}) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{N_k} \underbrace{M_{k\ell}}_{\leqslant M_k} |I_{k\ell}| \leqslant \sum_{k=1}^{N} M_k \sum_{\ell=1}^{N_k} |I_{k\ell}| = \sum_{k=1}^{N} M_k |I_k| = S(P),$$ 2) аналогично ◁

Лемма 3 Пусть $f \in B(I) \Rightarrow s(P_1) \leqslant S(P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}^*$

▷ $P_3 := P_1 \cup P_2$ (по координатам объединяем все точки) $\Rightarrow P_3 \prec P_1$, $P_3 \prec P_2$

$\overset{\text{Лемма 2}}{\Rightarrow} s(P_1) \overset{\text{Л.2}}{\leqslant} s(P_3) \leqslant S(P_3) \overset{\text{Л.2}}{\leqslant} S(P_2)$ ◁

Опр. 3 Пусть $f \in B(I)$. Тогда

1) Верхний интеграл Дарбу $\mathcal{J}_B := \inf\limits_{P \in \mathcal{P}^*} S(P)$

2) Нижний интеграл Дарбу $\mathcal{J}_H := \sup\limits_{P \in \mathcal{P}^*} s(P)$

Обозн. Пусть $f \in B(I)$ $\forall P \in \mathcal{P}^*$

1) Колебание $\omega_k(f)$ функции $f(\bar{x})$ на брусе I_k

$$\omega_k(f, I_k) := \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in I_k} |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| = M_k - m_k$$

2) $\Omega(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{N} \omega_k |I_k| = \Omega(P)$

Лекция 3
18/02 д.о.

Следствия

1) $\mathcal{J}_H \leqslant \mathcal{J}_B$

▷ Лемма 3 $\Rightarrow s(P_1) \leqslant S(P_2) \quad \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}^* \Rightarrow s(P_1) \leqslant \inf\limits_{P_2 \in \mathcal{P}^*} S(P_2) = \mathcal{J}_B \quad \forall P_1 \in \mathcal{P}^*$

$\Rightarrow \sup\limits_{P_1 \in \mathcal{P}^*} s(P_1) = \mathcal{J}_H \leqslant \mathcal{J}_B$ ◁

2) $0 \leqslant \mathcal{J}_B - \mathcal{J}_H \leqslant \Omega(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}^*$

▷ $\mathcal{J}_B - \mathcal{J}_H \leqslant S(P) - s(P) = \sum\limits_{k=1}^{N} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\omega_k} |I_k| = \sum\limits_{k=1}^{N} \omega_k |I_k| = \Omega(P)$ ◁

$\forall P \in \mathcal{P}^*$

Предельный критерий ∫-ти на брусе

$\exists f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$

▶ $\Rightarrow$ Пусть $f \in R(I) \Rightarrow \exists\, J := \int\limits_I f(x)\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma(P,\xi)$

Кр.Коши $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /\ |\sigma(P,\xi') - \sigma(P,\xi'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall (P,\xi'), (P,\xi'') \in \mathcal{P}$ с $d(P) < \delta$

$\Rightarrow \sup\limits_{\xi',\xi''} |\sigma(P,\xi') - \sigma(P,\xi'')| = \sup\limits_{\xi} \sigma(P,\xi) - \inf\limits_{\xi} \sigma(P,\xi) \overset{\text{лемма 1}}{=} S(P) - s(P) =$

$= \Omega(P) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta \Rightarrow 0 \leqslant \Omega(P) < \varepsilon \quad \forall P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta$

$\Rightarrow \Omega(P) \to 0$ при $d(P) \to 0$

$\Leftarrow$ Пусть $f \in B(I)$, $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$ $\Longrightarrow$

а) Имеем: $0 \leqslant J_B - J_H \leqslant S(P) - s(P) = \Omega(P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0 \Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} (J_B - J_H) = 0$ (const)

$\Rightarrow J_B - J_H = 0 \Rightarrow J_B = J_H =: J$

Д-м, что $J_B - J_H \geqslant 0$. Имеем $J_B - J_H = \inf\limits_{P\in\mathcal{P}^*} S(P) - \sup\limits_{P\in\mathcal{P}^*} s(P)$

$S(P) := \sum\limits_{k=1}^{N} M_k |I_k|$, где $M_k := \sup\limits_{I_k} f$

$s(P) := \sum\limits_{k=1}^{N} m_k |I_k|$, где $m_k := \inf\limits_{I_k} f$

Но $M_k \geqslant m_k \Rightarrow S(P) - s(P) \geqslant 0$

$\Rightarrow \inf\limits_{\mathcal{P}^*} S(P) - \sup\limits_{\mathcal{P}^*} s(P) = J_B - J_H \geqslant 0$

б) Д-м, что $f \in R(I)$ и $\int\limits_I f\,dx = J$

т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /\ |\sigma(P,\xi) - J| < \varepsilon \quad \forall (P,\xi) \in \mathcal{P}$ с $d(P) < \delta$ (1)

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Т.к. $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0$, то $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 /$

$0 \leqslant \Omega(P) = S(P) - s(P) < \varepsilon$, $\forall P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta$ (2)

Имеем: $s(P) \leqslant J_H = J = J_B \leqslant S(P) \Rightarrow J - \varepsilon \leqslant S(P) - \varepsilon \overset{(2)}{<} s(P) \leqslant$

$\leqslant \sigma(P,\xi) \leqslant S(P) \overset{(2)}{<} S(P) + \varepsilon \leqslant J_H + \varepsilon = J + \varepsilon$ (3) $\forall P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta$

Итак, $J - \varepsilon < \sigma(P,\xi) < J + \varepsilon \Rightarrow |\sigma(P,\xi) - J| < \varepsilon \quad \forall (P,\xi) \in \mathcal{P}$ с $d(P) < \delta \Rightarrow$ (1) ◀

Следствия 1) $f \in B(I)$, $\lim\limits_{d(P)\to 0} \Omega(P) = 0 \overset{a),\,б)}{\Longrightarrow} J_B = J_H = J := \int\limits_I f(x)\,dx$

2) $f \in R(I) \Rightarrow J := \int\limits_I f\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P) = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(P)$

$\triangleright$ $f\in R(I) \overset{\boxed{-1}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{d(P)\to 0}\Omega(P)=0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 /\ J-\varepsilon\leqslant S(P)\leqslant J+\varepsilon$

$\forall P\in\mathcal{P}^*$ с $d(P)<\delta$

$\Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P)=J$

Аналогично, $\lim\limits_{d(P)\to 0} s(P)=J$ $\triangleleft$

Пункт 4 Критерий Дарбу интегрируемости на брусе

Напоминание $J\tilde{P}\prec P \Rightarrow S(\tilde{P})\leqslant S(P),\ s(\tilde{P})\geqslant s(P)$

$\Rightarrow \Omega(\tilde{P})=S(\tilde{P})-s(\tilde{P})\leqslant S(P)-s(P)=\Omega(P)$ (1)

Обозн. $JP=(P_1,\dots,P_n)\in\mathcal{P}^*$. Тогда $|P_i|:=$ кол-во точек мн-ва P_i $(\geqslant 2)$

Лемма 1 $Jf\in B(I)$, т.е. $\exists M>0 /\ |f|\leqslant M$ на I;

$J\tilde{P}=(\tilde{P}_1,\dots,\tilde{P}_n)\prec P=(P_1,\dots,P_n)$, причём $|\tilde{P}_i|-|P_i|=:t_i$, $i=\overline{1,n}$

$\Rightarrow S(\tilde{P})\geqslant S(P)-A\cdot d(P)$ и $s(\tilde{P})\leqslant s(P)+A\cdot d(P)$, где

$A=A(t_1,\dots,t_n):=2M|I|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{t_i}{b_i-a_i}$, так что $\Omega(\tilde{P})\geqslant\Omega(P)-2A\cdot d(P)$ (2)

$\triangleright\ \cancel{\cdot\cdot}\ \triangleleft$

Лемма 2 $Jf\in B(I)$. Тогда $f\in R(I)\Leftrightarrow \inf\limits_{P\in\mathcal{P}^*}\Omega(P)=0$

$\triangleright$ $(\Rightarrow)$ $Jf\in R(I)\overset{\boxed{-1}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{d(P)=0}\Omega(P)=0$. Кроме того, $\Omega(P)\geqslant 0$, $\forall P\in\mathcal{P}^*$, т.е. 0 - нижняя грань $\Omega(P)$

$\forall\varepsilon>0\ \exists P\in\mathcal{P}^* /\ \Omega(P)=|\Omega(P)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \inf\limits_{P\in\mathcal{P}^*}\Omega(P)=0$

$(\Leftarrow)$ $Jf\in B(I)$, $\inf\limits_{P\in\mathcal{P}^*}\Omega(P)=0$ (*) $J\varepsilon>0$ пр-но. Из (*) $\Rightarrow \exists P'\in\mathcal{P}^* /$

$0\leqslant\Omega(P')<\frac{\varepsilon}{2}$. Положим $s_i:=|P_i'|$, $i=\overline{1,n}$, $\delta:=\frac{\varepsilon}{4A(s_1,\dots,s_n)}$,

где $A(s_1,\dots,s_n)$ из Леммы 1.

$JP\in\mathcal{P}^*$ с $d(P)<\delta$ пр-но, положим $P'':=P'\cup P$. Тогда $P''\prec P'$, $P''\prec P$,

причём $|P_i''|\leqslant|P_i|+\underbrace{|P_i'|}_{s_i} \Rightarrow t_i:=|P_i''|-|P_i|\leqslant s_i$ (**)

Имеем: (1) $\Rightarrow \Omega(P'')\leqslant\Omega(P')<\frac{\varepsilon}{2}$

(2) $\Rightarrow \Omega(P'')\geqslant\Omega(P)-2\underset{(t_1,\dots,t_n)}{A}d(P)\overset{(**)}{\geqslant}\Omega(P)-2A(s_1,\dots,s_n)d(P)\geqslant$

$\geq \Omega(P) - \delta \cdot 2A(s_1, \dots, s_n) = \Omega(P) - \frac{\varepsilon}{2}$.

В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / \ 0 \leq \Omega(P) \leq \Omega(P'') + \frac{\varepsilon}{2} \leq \underbrace{\Omega(P')}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\forall P \in \mathcal{P}^*$ с $d(P) < \delta \Rightarrow \lim\limits_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \overset{\boxed{\dashv}}{\Longrightarrow} f \in R(I)$ ◁

Лекция 4 02/03 д.о. $\boxed{\dashv \text{Критерий Дарбу } \int\text{-ти на брусе}}$

Пусть $f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow J_B = J_H$

▶ $(\Rightarrow)$ Пусть $f \in R(I) \overset{\boxed{\dashv \text{Пр.кр.}}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \overset{\text{Следствие 1}}{\Longrightarrow} J_B = J_H$

$(\Leftarrow)$ Пусть $f \in B(I)$, $J_B = J_H =: J$. Д-м, что $\inf\limits_{\mathcal{P}^*} \Omega = 0$ (см. Лемму 2)

Фикс. пр-но $\varepsilon > 0$. Имеем: $\exists P^{(1)}, P^{(2)} \in \mathcal{P}^* / S(P^{(1)}) < J_B + \frac{\varepsilon}{2} = J + \frac{\varepsilon}{2}$

$s(P^{(2)}) > J_H - \frac{\varepsilon}{2} = J - \frac{\varepsilon}{2}$

Положим $P = P^{(1)} \cup P^{(2)}$, тогда $P \prec P^{(1)}$ и $P \prec P^{(2)}$

$\Rightarrow S(P) \leq S(P^{(1)})$, $s(P) \geq s(P^{(2)}) \Rightarrow 0 \leq \Omega(P) = S(P) - s(P) \leq$

$\leq S(P^{(1)}) - s(P^{(2)}) < J + \frac{\varepsilon}{2} - J + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

В итоге, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{P} = \mathcal{P}(\varepsilon) \in \mathcal{P}^* / \ 0 \leq \Omega(P) < \varepsilon \Rightarrow \inf\limits_{\mathcal{P}^*} \Omega = 0$ ◀

Замечание 1) Пусть $f \in B(I)$. Тогда $f \in R(I) \Leftrightarrow \exists$-ют и равны $\lim\limits_{d(P) \to 0} s(P)$ и $\lim\limits_{d(P) \to 0} S(P)$, причём эти пределы равны интегралам

▷ $(\Rightarrow)$ Пусть $f \in R(I)$, $J := \int\limits_I f\,dx \overset{\text{Сл.2, п.3}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{d(P) \to 0} S(P) = \lim\limits_{d(P) \to 0} s(P) = J$

$(\Leftarrow)$ Пусть $f \in B(I)$, $J := \lim\limits_{d(P) \to 0} S(P) = \lim\limits_{d(P) \to 0} s(P)$. Тогда $\Omega(P) = S(P) - s(P) \to$

$\to \lim\limits_{d(P) \to 0} S(P) - \lim\limits_{d(P) \to 0} s(P) = J - J = 0$

Сл-но, $\lim\limits_{d(P) \to 0} \Omega(P) = 0 \Rightarrow f \in R(I)$ ◁

§2: Множества меры нуль

Пункт 1 Определения и основные свойства множеств меры нуль

Опр. 1 Брус $\underline{I} = \underline{I}^n$ называется **кубическим** (n-мерным кубом), если $b_i - a_i = \ell > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$

Опр. 2 Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. E имеет (лебегову) **меру нуль**, обозн. $\mu(E) = 0$
$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более, чем счётная система $\{\underline{I}_k \mid \underline{I}_k$ - куб. брус$\}$
с условиями: 1) $E \subset \bigcup\limits_k \underline{I}_k$ 2) $\sum\limits_k |\underline{I}_k| < \varepsilon$

Замечания 1) В Опр. 2 можно брать открытые брусы
$\mathring{\underline{I}}_k = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$

▷ 1) Если верно для $\{\mathring{\underline{I}}_k\}$, то верно и для $\{\underline{I}_k\}$ (т.к. содержится)
2) Пусть верно для $\{\underline{I}_k\}$: $\mu(E) = 0$ по Опр. 2 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более, чем сч.
$\{\underline{I}_k \mid \underline{I}_k$ - куб брус$\}$ / а) $E \subset \bigcup\limits_k \underline{I}_k$, б) $\sum\limits_k |\underline{I}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\forall k$ выберем куб. брус $\mathcal{I}_k$ / $\mathring{\mathcal{I}}_k \supset \underline{I}_k$, $|\mathring{\mathcal{I}}_k| < 2|\underline{I}_k|$, $k \geq 1$
$\Rightarrow E \subset \bigcup\limits_k \mathring{\mathcal{I}}_k$, $\sum\limits_k |\mathring{\mathcal{I}}_k| \leq 2 \sum\limits_k |\underline{I}_k| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ◁

2) Можно куб. брус заменить на шары ▷...◁
3) Можно брать брусы не обязательно кубические ▷...◁ - потом

Лемма 1) Точка есть мн-во меры нуль
2) $\mu(E_m) = 0$, $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m) = 0$
3) $A \subset B$, $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$
4) $\underline{I}$-брус в $\mathbb{R}^n$ ($b_i - a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$) $\Rightarrow \mu(I) \neq 0$ ($\neg \mu(\underline{I}) = 0$) ▷...◁

Т Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, G-открыто, $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G)$ (т.е. $f_i \in C^1(G)$, $i = \overline{1,n}$)
Тогда $E \subset G$, $\mu(E) = 0 \Rightarrow \mu(f(E)) = 0$ ▷...◁

Замечания 1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2) а) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
б). f - инъективное $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
f - не инъективно $\overset{\text{в. 2.}}{\neq} f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ▷...◁

Пункт 2. База окрестностей в $\mathbb{R}^n$

Опр. Система множеств $\{U_\alpha \mid U_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ U\text{-открыто}\}$ — **база окрестностей в $\mathbb{R}^n$**

$\overset{def}{\iff} \forall G \subset \mathbb{R}^n,\ G\text{-открыто},\ \exists$ п/система $\{V_\alpha\} \subset \{U_\alpha\} \mid G = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$

Лемма 1 1) Система открытых брусов $\{\mathring{I}(p,q) := (p_1,q_1)\times\ldots\times(p_n,q_n),\ (p,q)\in\mathbb{Q}^n\times\ldots\times\mathbb{Q}^n\}$ — (1)

счётная база окрестностей в $\mathbb{R}^n$,

так что $\{\mathring{I}(p,q)\} = \{\mathring{I}_k,\ k\in\mathbb{N}\}$

2) Система открытых шаров $\{B(q,r),\ q\in\mathbb{Q}^n,\ r\in\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+\}$ — счётная база окрестностей в $\mathbb{R}^n$

(радиус r, с центром q)

▷ 1) Система (1) — счётная (из счётности $\mathbb{Q}$)

Проверим, что (1) — база окрестностей в $\mathbb{R}^n$

$\exists G \subset \mathbb{R}^n$, G-открыто — произв.

Имеем: $\forall x\in G,\ \exists \mathring{I} := (a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n) \subset G \mid x\in\mathring{I}$

Стак, $\forall x\in G\ \exists \mathring{I}(x) \mid x\in\mathring{I}(x),\ \mathring{I}(x)\subset G$

Т.к. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, то $\mathring{I}(x)$ можно выбрать из системы $\{\mathring{I}(p,q)\} = \{\mathring{I}_k,\ k\in\mathbb{N}\}$

Сл-но, $\forall x\in G\ \exists \mathring{I}_k(x) \mid x \overset{(*)}{\in} \mathring{I}_k,\ \mathring{I}_k(x) \overset{(**)}{\subset} G$

Но $\overset{(*)}{\Rightarrow} G \subset \bigcup\limits_{x\in G} \mathring{I}_k(x)$; $\overset{(**)}{\Rightarrow} \bigcup\limits_{x\in G} \mathring{I}_k(x) \subset G \mid \Rightarrow G = \bigcup\limits_{x\in G} \mathring{I}_k(x)$

2) Аналогично ◁

—11 $A\subset\mathbb{R}^n$, $A \subset \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$, V_α-открыто $\forall\alpha \Rightarrow \exists$ не более, чем счётное п/покр $\{V_{\alpha_k}\} \subset \{V_\alpha\} \mid A \subset \bigcup\limits_k V_{\alpha_k}$

▶ $\exists A \subset \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$, V_α-откр.; Лемма 1 $\Rightarrow$ $\{\mathring{I}_k, k\in\mathbb{N}\}$ — сч. база окрестностей

Имеем: $\forall x\in A\ \exists V_{\alpha(x)} \mid x\in V_{\alpha(x)} \overset{11}{=} \bigcup\limits_k \mathring{I}_{k_\ell} \Rightarrow \exists \ell \mid x\in \mathring{I}_{k_\ell} =: U(x) \subset V_{\alpha(x)}$

$\Rightarrow A \subset \bigcup\limits_{x\in A} U(x) \subset \bigcup\limits_k V_{\alpha(x_k)}$ — счётное объединение

$\Rightarrow \bigcup\limits_{x\in A} U(x)$ не более, чем счётно ◀

—12 Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $\forall x \in A$ $\exists$ брус $\underline{I}(x)$ / $\mu(\underline{I}(x) \cap A) = 0$
$x \in \mathring{\underline{I}}(x)$ – внутр. т.
Тогда $\mu(A) = 0$

▶ $A \subset \bigcup\limits_{x \in A} \mathring{\underline{I}}(x)$ **—11** $\Rightarrow$ $\exists$ не более, чем счётная с-ма откр. брусов, покрывающая A:
$\{\underline{I}(x_k)\}$, $A_k \subset \bigcup\limits_k \mathring{\underline{I}}(x_k)$

Тогда $A = A \cap \left(\bigcup\limits_k \mathring{\underline{I}}(x_k)\right)$, но можно переставить: $\bigcup\limits_k \underbrace{\left(A \cap \mathring{\underline{I}}(x_k)\right)}_{\ddot{A}_k}$.

По усл $\mu(A \cap \underline{I}(x_k)) = 0 \Rightarrow \mu(A_k) = 0$

Имеем: 1) $A = \bigcup\limits_k A_k$ (не более, чем сч.)
2) $\mu(A_k) = 0$
$\Rightarrow \mu(A) = 0$ ◀

Пункт 3. Мера графика непрерывной функции. Теоремы Сарда

—11 Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, G – открытое, $f: G \to \mathbb{R}$, $f \in C(G)$

$\Gamma := \{(x,y): x \in G, y = f(x)\}$ – график функции $f(x)$ $\Rightarrow \mu(\Gamma) = 0$ (в пр-ве $\mathbb{R}^{n+1}$)

▶ Фикс. произв. точку на графике $\Gamma \ni (x_0, f(x_0))$. В силу **—12** достаточно доказать, что $\exists$ брус $\underline{I}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ /
$(x^\circ, f(x^\circ)) \subset \mathring{\underline{I}}^{n+1}$ (*) и $\mu(\underline{I}^{n+1} \cap \Gamma) = 0$ (**)

! $z = f(x,y)$; $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$
$\Gamma = \{(x,y; f(x,y)\} \in \mathbb{R}^3$ – поверхность
$x \in D$, $y \in D$
$\mu_3(\Gamma) = 0$

1. Д-м, что (*) верно; G – откр. мн-во
$\Rightarrow$ $\exists$ брус $\underline{I}^n$ / $x^\circ \in \mathring{\underline{I}}^n \subset \underline{I}^n \subset G$. $\underline{I}^n$ – компакт, $f \in C(\underline{I}^n)$
$\Rightarrow \exists \min\limits_{\underline{I}^n} f =: m$, $\exists \max\limits_{\underline{I}^n} f =: M$, $m - 1 < m \leqslant f(x) \leqslant M < M + 1$
Положим $\underline{I}^{n+1} := \underline{I}^n \times [m-1; M+1] \Rightarrow (x^\circ, f(x^\circ)) \in \mathring{\underline{I}}^{n+1} \Rightarrow$ (*)

2. Д-м, что (**) верно: $\underline{I}^n$ – компакт
—Кантора $\Rightarrow f \in C(\underline{I}^n) \Rightarrow f$ – р/мерно непр. на $\underline{I}^n$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ / $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{|\underline{I}^n|} =: \varepsilon_1$ $\forall x, y$ / $\|x - y\| < \delta$
Фикс. произв. разб. бруса $\underline{I}^n$ на част. брусы $\underline{I}_j^n \left(\begin{matrix} j = \overline{1, N} \\ N = N_1 \dots N_n \end{matrix}\right)$ с усл. $d(P) < \delta$
$(\forall j)$ $\forall x, y \in \underline{I}_j^n$ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$ по усл.
$\Rightarrow 0 \leqslant M_j - m_j =: w_j(f) < \varepsilon_1$, $M_j := \max\limits_{\underline{I}_j^n} f$, $m_j := \min\limits_{\underline{I}_j^n} f$

Построим для каждого $\overline{I}_j^n$ свой $\overline{I}_j^{n+1} := \overline{I}_j^n \times [m_j - \frac{\varepsilon}{2}; M_j + \frac{\varepsilon}{2}]$

$|\overline{I}_j^{n+1}| = |\overline{I}_j^n| \cdot (w_j + \varepsilon) < 2\varepsilon |\overline{I}_j^n| \quad \forall j = \overline{1,N}$

$\sum_j |\overline{I}_j^{n+1}| < 2\varepsilon \cdot \sum_j |\overline{I}_j^n| = 2\varepsilon \cdot |\overline{I}_n^n| = 2\varepsilon \Rightarrow \mu(\overline{I}^{n+1} \cap \Gamma) = 0 \Rightarrow (**)$ ◀

Следствия 1) Пусть $1 \leqslant k \leqslant n-1$, E - k-мерная пл-ть $\mathbb{R}^n$

$E_k := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = h_i, i = \overline{1,n-k} \}$, причём $rk(a_{ij}) = n-k$, $i = \overline{1,n-k}$, $j = \overline{1,n}$

$\mu(E_k) = 0$ (в $\mathbb{R}^n$)

(П) $rkA = n-1$, $A\bar{x} = \bar{b}$ $\Rightarrow$ решение - 1 мерн. объект, прямая

$n-1$ ур-е на n переменных

$n-2$ ур-я на n переменных $\Rightarrow$ 2 мерн. объект, пл-ть

▷ 1) $\exists k = n-1$, $E_{n-1}: \sum a_j x_j = h$, $\exists j_0 / a_{j_0} \neq 0$;

$x_n = \frac{1}{h} \{ - \sum_{j \neq n} a_j x_j + h \} \Rightarrow f(x_1, \dots, x_{n-1}) \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \overset{\text{—1}}{\Rightarrow} \mu(E_{n-1}) = 0$

2) $k = 1, 2, \dots, n-2 \Rightarrow E_k \subset E_{n-1} \Rightarrow \mu(E_k) = 0$ ◁

2) A - аффинное преобр $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $|A| \neq 0 \Rightarrow A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

$|A| = 0 \Rightarrow A(\mathbb{R}^n) = E_k$

$rkA = n-k$ $\Rightarrow \mu(A(\mathbb{R}^n)) = 0$

Лекция 6
09/03Д.О

—12 Сарда, для $1 \leqslant m < n$

Пусть $1 \leqslant m < n$, $G \subset \mathbb{R}^m$, G-откр., $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G) \Rightarrow \mu(f(G)) = 0$

▶ 1. Введём вспомог. ф-цию $g: G \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

опр. по формуле $g_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-m}) := f_i(x_1, \dots, x_m) \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n-m}$

Имеем: $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = \overline{1,m}$, $\frac{\partial g_i}{\partial y_j} = 0 \Rightarrow g \in C^1(G \times \mathbb{R}^{n-m})$

2. $G \times \mathbb{R}^{n-m}$ - откр. в $\mathbb{R}^n$. Зс.д., пусть $(x^0; y^0) \in G \times \mathbb{R}^{n-m}$

Имеем: т.к. G-откр., $\exists$ брус $\overline{I}^m / x^0 \in \mathring{\overline{I}}^m \subset G$

$\exists$ брус $\overline{I}^{n-m} / y_0 \in \mathring{\overline{I}}^{n-m} \subset \mathbb{R}^{n-m}$, сл-но $(x^0, y^0) \in \mathring{\overline{I}}^m \times \mathring{\overline{I}}^{n-m} \subset G \times \mathbb{R}^{n-m}$

3. Пусть $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n / x \in G, y=0\} \subset \mathbb{R}^n$

Тогда $H \subset E_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n / y_i = 0,\ i=\overline{1,n-m}\}$ – n-мерная пл-ть $(m<n)$

Но $\mu(E_m)=0 \Rightarrow \mu(H)=0 \Rightarrow \mu(g(H))=0$

4. Имеем: $g(H) = \{z \in \mathbb{R}^n / z = \underbrace{g(x,y)}_{=f(x)},\ x \in G,\ y=0\} = \{z \in \mathbb{R}^n / z = f(x),\ x \in G\} =$

$= f(G)$

$\Rightarrow \mu(f(G))=0$ ▲

Обозн. Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$, G – откр., $f: G \to \mathbb{R}^n$

Тогда 1) $Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_n \end{pmatrix}$ — МАТРИЦА ЯКОБИ

2) Если $m=n$, то $\det \|Df\|$ – ЯКОБИАН отображения f

НАПОМИНАНИЕ (Ф-ЛА В $\mathbb{R}^n$ С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛ. В ИНТЕГР. ФОРМЕ)

• $G \subset \mathbb{R}^n$, G-откр., $f: G \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(G)$, брус $\bar{I}^n \subset G$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(y + \theta(x-y))\, d\theta$, $\forall x, y \in \bar{I}^n$

Обобщение: $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f_i \in C^1(G)$, $i=\overline{1,n}$, $\bar{I}^n \subset G$

$\Rightarrow f_i(x) - f_i(y) = \sum_{j=1}^{m} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y + \theta(x-y))\, d\theta \right)(x_j - y_j)$, $\forall x, y \in \bar{I}^n$

или $f(x) - f(y) = \int_0^1 Df(y + \theta(x-y))\, d\theta \, (x-y)$, $\forall x, y \in \bar{I}^n$ (столбец)

ТЕОРЕМА САРДА, $m=n$ $G \subset \mathbb{R}^n$, G-откр., $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(G)$

$S := \{x \in G / \det Df(x) = 0\} \Rightarrow \mu(f(S)) = 0$ ▲

ТЕОРЕМА САРДА, $m>n$ $G \subset \mathbb{R}^m$, G-откр., $f: G \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(G)$

$S := \{x \in G / \operatorname{rang} Df(x) < n\} \Rightarrow \mu(f(S)) = 0$ ▲

§3: Критерий Лебега ∫-ти на брусе

Пункт 1. Множества объёма нуль

Опр. $JA\subset\mathbb{R}^n$. Тогда $v(A)=0$ (A имеет **объём нуль**)
$\overset{\text{def}}{\iff} \forall\varepsilon>0$ $\exists$ конечная система брусов $\{\bar I_k, k=\overline{1,m}\}$:
1) $A\subset\bigcup_{k=1}^{m}\bar I_k$ 2) $\sum_{1}^{m}|\bar I_k|<\varepsilon$

Замечание В опр. можно брать $\mathring{I}_k$, шары и параллелепипеды (откр. и замк.)

Лемма 1 1) $v(A)=0 \Rightarrow A$-ограничено (для меры б.г. нет, $\mathbb{Q}$)
2) $v(A)=0 \Rightarrow \mu(A)=0$ ($\not\Leftarrow$ б.г., н-р, прямая на пл-ти или $A=\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$)
3) $B\subset A$, $v(A)=0 \Rightarrow v(B)=0$
4) брус $\bar I$ не имеет объём нуль
5) K-компакт, $\mu(K)=0 \Rightarrow v(K)=0$ (на компакте $\exists$ конечное п/покр.)
6) $\mu(A)=0 \Rightarrow \mathring{A}=\emptyset$
▷ сис: $J\mathring{A}\neq\emptyset$. Тогда $\exists x\in\mathring{A}$, $\exists$куб $\bar I$ с усл. $x\in\bar I\subset A \Rightarrow \mu(I)=0$ ⊥ ◁
7) $v(A)=0 \Rightarrow \mathring{A}=\emptyset$
8) $v(A)=0 \Rightarrow v(\bar A)=0$ (для $\mu(\bar A)\neq 0$ б.г., н-р, $\mathbb{Q}$) $\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$
▷ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\{\bar I_k, k=\overline{1,m}\}$ / $A\subset\bigcup_{1}^{m}\bar I_k$, $\sum_{1}^{m}|\bar I_k|<\varepsilon \Rightarrow \bar A\subset\bigcup_{1}^{m}\bar I_k$, $\sum_{1}^{m}|\bar I_k|<\varepsilon$
(объедин. конечного числа замкнутых – замкнуто, в беск. – не замк.)
$\Rightarrow v(\bar A)=0$ ◁
9) $v(A)=0 \Rightarrow v(\partial A)=0$
▷ $v(A)=0 \Rightarrow v(\bar A)=0$. Но $\partial A\subset\bar A \Rightarrow v(\partial A)=0$ ◁

Пункт 2. Колебание функции в точке

Напоминание 1) $B_\delta(x^0)=B(x^0,\delta):=\{x\in\mathbb{R}^n / \|x-x^0\|<\delta\}$
2) $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $f\in B(\Omega)$.
Тогда $\omega(f,\Omega):=\sup_{x,y\in\Omega}|f(x)-f(y)| = \underbrace{\sup_\Omega f}_{M(f,\Omega)} - \underbrace{\inf_\Omega f}_{m(f,\Omega)}$ – колебание f на Ω

Опр. $A\subset\mathbb{R}^n$, $x^0\in A$, $f:A\to\mathbb{R}$, $f\in B(A)$

Тогда $\omega(f,x^0)=\omega(x^0):=\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f,B(x^0,\delta)\cap A)$ – колебание f в т. x^0

Опр. корректно, т.к. по $\boxed{\dashv \text{Вейерштрасса}}$ $\exists \lim \omega = \inf\limits_{\delta>0}\omega(f,B(x^0,\delta)\cap A)$

Замечание 1) $\omega(x^0)=\underbrace{\lim\limits_{\delta\to 0} M(f,B(x^0,\delta)\cap A)}_{\text{огр.}} - \underbrace{\lim\limits_{\delta\to 0} m(f,B(x^0,\delta)\cap A)}_{\text{огр.}}$

$\lim\limits_{\delta\to 0} M(\ldots) = \inf\limits_{\delta>0} M(\ldots)$, $\lim\limits_{\delta\to 0} m(\ldots) = \sup\limits_{\delta>0} m(\ldots)$

(!) при уменьш. δ
$\sup f(B_\delta(x_0)\cap A)\downarrow$
$\inf f(B_\delta(x_0)\cap A)\nearrow$

2) $\omega(f,B(x_0,\delta)\cap A)\nearrow$ по δ, $\omega\geq 0$
$\Rightarrow \omega(f,x_0)=\inf\omega(f,B(x_0,\delta)\cap A)$

Лекция 7
16/03 д.о.

$\dashv$1 Критерий Бэра непрерывности в точке

$]A\subset\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}$, $f\in B(A)$, $x^0\in A \Rightarrow$ $f\in C(x^0)\Leftrightarrow\omega(f,x^0)=0$

▶ $(\Leftarrow)$ $]\omega(x^0)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 /\ 0\leq \underbrace{\omega(f,B_\delta(x^0)\cap A)}_{\sup|f(x)-f(y)|\ \forall x,y\in B\cap A}<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-f(x^0)|\leq\omega(f,B_\delta(x^0)\cap A)<\varepsilon$ $\forall x\in B_\delta(x^0)\cap A$ $\Rightarrow f\in C(x^0)$

$(\Rightarrow)$ $]f\in C(x^0)$

а) x^0 – изолир. точка $\Rightarrow M(x^0)=m(x^0)=f(x^0)\Rightarrow\omega(x^0)=0$

б) $x^0\in A\cap A' \Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_0>0 / |f(x)-f(x^0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x\in A\cap B(x^0,\delta)$ $\forall\delta\in(0,\delta_0)$

$\left(\begin{array}{l}|x-x_0|<\delta_0\\ \text{если верно}\\ \forall x\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\text{будет верно}\\ \forall x\\ |x-x_0|<\delta<\delta_0\end{array}\right)$ $\forall x,y\in B_\delta(x^0)\cap A$ $\forall\delta\in(0,\delta_0)$

$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(x^0)|+|f(x^0)-f(y)|\leq\frac{2\varepsilon}{3}$

$\omega(f,B_\delta(x^0)\cap A)\leq\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f,B_\delta(x^0)\cap A)=0$, $\omega(f,x^0)=0$ ◀

Вывод: y – т. разрыва огр. ф-ции $f \Rightarrow \omega(f,y)>0$

$E=\{$мн-во т. разрыва f на $I\}=\{y:\omega(f,y)\geq 0\}$

$E(\varepsilon):=\{x\in A\ /\ \omega(f,x)\geq\varepsilon>0\}$

Замечание $]$ есть огр. мн-во $B\subset\mathbb{R}^n$, $d(B)=\operatorname{diam}(B):=\sup\limits_{x,y\in B}\|x-y\|$

$\boxed{\dashv 2}$:= $\operatorname{diam} B\leq\sqrt{n}\,d(B)$

$\dashv$Кантора для ограниченных ф-ций

$]K\subset\mathbb{R}^n$, K – компакт, $f:K\to\mathbb{R}$, $f\in B(K)$, $\exists\omega_0>0 / \omega(f,x)\leq\omega_0$ $\forall x\in K$ $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \omega(f,I\cap K)<\omega_0+\varepsilon$ $\forall$ бруса I с $\operatorname{diam}(I)<\delta$

▶ 1. $\exists \varepsilon > 0$ пр-но. Рассм произв точку $\tilde{x} \in K$

$\omega(\tilde{x}) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(B_\delta(\tilde{x}) \cap K) \le \omega_0 \Rightarrow \exists \delta(\tilde{x}) \;/\; 0 \le \omega(f, B_{2\delta}(\tilde{x}) \cap K) < \omega(\tilde{x}) + \varepsilon \le \omega_0 + \varepsilon$

Но шары $\{B_{\delta(\tilde{x})}(\tilde{x})\}$ покрывают K

2. $\exists$ конечное п/покрытие $\{B_{\delta_\ell}(x^\ell), \ell = \overline{1,m}\}$, $K \subset \bigcup\limits_{\ell=1}^{m} B_{\delta_\ell}(x^\ell)$

$\delta := \min\limits_{\ell = \overline{1,m}} \delta_\ell$

3. Пусть $\bar{I}$-брус $/\; \bar{I} \cap K \neq \emptyset$ и $\operatorname{diam}(\bar{I}) < \delta$

$\Rightarrow \exists x^\circ \in \bar{I} \cap K$, K-покрыто $\{B_{\delta_\ell}\} \Rightarrow \exists$ система $\ell = \{1, \dots, k\} \;/\; x^\circ \in B_{\delta_\ell}(x^\ell)$, $\ell = \overline{1,k}$

$\forall x \in \bar{I} \quad \|x - x^\ell\| \le \|x - x^\circ\| + \|x^\circ - x^\ell\| < \delta + \delta_\ell \le 2\delta_\ell$

Но тогда эта запись означает, что $\bar{I} \subset B_{2\delta_\ell}(x^\ell) \quad \forall \ell = \overline{1,k}$

$\forall x \in \bar{I} \Rightarrow x \in B_{2\delta_\ell}(x^\ell)$

Ст-но, $\omega(f, \bar{I} \cap K) \le \omega(f, B_{2\delta_\ell}(x^\ell) \cap K < \omega_0 + \varepsilon$ ◀

Следствие] выполнены усл. [—Кантора] для $K = \bar{I}^n$ - брус в $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разб. бруса $\bar{I}^n$ - $P \;/\; \Omega(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{N} \omega(f, \bar{I}_k) |\bar{I}_k| < (\omega_0 + \varepsilon) |\bar{I}^n|$

$\bar{I}_k$ - частичный брус

▷ **Напоминание** $\forall F = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ брус $\|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \le \sqrt{n} \cdot \max\limits_{i = \overline{1,n}} (b_i - a_i)$

$\operatorname{diam} F \le \sqrt{n} \cdot \max\limits_{i = \overline{1,n}} (b_i - a_i)$

[—Кантора]

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;/\; \omega(f, F) < \omega_0 + \varepsilon \quad \forall F$ с $\operatorname{diam}(F) < \delta$

$\exists$ P-разб. бруса с $d(P) < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, тогда $\bar{I}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \bar{I}_k^n$, $\operatorname{diam} \bar{I}_k^n \le \sqrt{n}\, d(P) < \delta$

$\Rightarrow \Omega(f, P) < (\omega_0 + \varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{N} |\bar{I}_k^n| = (\omega_0 + \varepsilon) \cdot \bar{I}^n$ ◁

Лемма Пусть $A = \bar{A} \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in B(A)$

$E(\varepsilon) := \{x \in A \;/\; \omega(f, x) \ge \varepsilon > 0\}$, $E := \{x \in A \;/\; f \notin C(x)\} \equiv \{x \in A \;/\; \omega(f, x) \neq 0\}$ кр. Бэра

Тогда 1) $\varepsilon_1 \ge \varepsilon_2 > 0 \Rightarrow E(\varepsilon_1) \subset E(\varepsilon_2)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad E(\varepsilon) = \overline{E(\varepsilon)}$

3) $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E\left(\frac{1}{m}\right)$, $m \in \mathbb{N}$

▷ 1) $\exists \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$, $\exists x \in E(\varepsilon_1) \Rightarrow \omega(f, x) \ge \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow x \in E(\varepsilon_2)$,

т.е. $E(\varepsilon_1) \subset E(\varepsilon_2)$

2) РАССМ. ПОСЛ-ТЬ $(x^\ell \in E(\varepsilon),\ \ell \in \mathbb{N})$ $x^\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \tilde{x}$. Т.К. $A=\overline{A} \Rightarrow \tilde{x}\in A$

$\Rightarrow \forall \delta>0\ \exists x^\ell \in B_\delta(\tilde{x})$ В ОКР-ТИ ПРЕДЕЛА

ДЛЯ НЕКОТОРОГО $\delta_1 \in (0,\delta)$ $B_{\delta_1}(x^\ell) \subset B_\delta(\tilde{x})$

Т.К. $x^\ell \in E(\varepsilon) \Rightarrow \omega(f, B_{\delta_1}(x^\ell)\cap A) \geqslant \omega(x^\ell) \geqslant \varepsilon > 0$

СЛ-НО, $\omega(f, B_\delta(\tilde{x})\cap A) \geqslant \omega(f, B_{\delta_1}(x^\ell)) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \omega(\tilde{x}) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \tilde{x}\in E(\varepsilon)$

$\Rightarrow E(\varepsilon) = \overline{E(\varepsilon)}$

3) $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E(\frac{1}{m})$

а) $\subset$ $\exists x\in E$, по $\boxed{\neg 11}$ $\omega(x)>0 \Rightarrow \exists m /\ \omega(x) \geqslant \frac{1}{m} \Rightarrow x\in E(\frac{1}{m}) \Rightarrow x \in \bigcup_{m=1} E(\frac{1}{m})$

б) $\supset$ $\exists x \in \bigcup_m E_m \Rightarrow \exists m\in\mathbb{N} /\ x\in E_m \Rightarrow \omega(x) \geqslant \frac{1}{m} > 0 \overset{\boxed{\neg 11}}{\Rightarrow} f\notin C(x) \Rightarrow x\in E$ $\triangle$

Замечание $\forall \varepsilon>0$ $A = A_1(\varepsilon) \cup A_2(\varepsilon)$, ПРИЧЁМ

1) $\mu(A_1(\varepsilon)) = 0$ 2) $\exists$ СИСТЕМА $\{I_k, k\in\mathbb{N}\} /\ A_2(\varepsilon) \subset \bigcup_k I_k$ И $\sum_k |I_k| < \varepsilon \Rightarrow \mu(A) = 0$

Лекция 8
18/03 д.о.

Пункт 3. Критерий Лебега для бруса

Критерий Лебега

Пусть $I\subset\mathbb{R}^n$, $f: I\to\mathbb{R}$, $f\in B(I)$, $E := \{x\in I / f\notin C(x)\}$. Тогда $f\in R(I)$ $\Leftrightarrow \mu(E) = 0$

Напоминание 1. МН-ВО $K\subset\mathbb{R}^n$ - КОМПАКТНО $\Leftrightarrow$ K - ЗАМКН. И ОГРАНИЧЕНО $\Rightarrow E(\varepsilon)\subset I^n$, $E(\varepsilon)$ - ЗАМКНУТО $\Rightarrow E(\varepsilon)$ - КОМПАКТНО

2. Лемма 2, п.4, §1: $f\in B(I)$. Тогда $f\in R(I) \Leftrightarrow \inf_{P^*} \Omega(P) = 0$

3. Если мн-во n-меры нуль компактно, то оно имеет и n-объём нуль

▶ $\Rightarrow$ $\exists f\in R(I)$. Пусть $E_m = E(\frac{1}{m})$, $E = \bigcup_{m=1} E_m$, дост. проверить для какого-то фикс. произв. m: $\mu(E_m) = 0$

а) $\boxed{\neg \text{Предел. крит.}} \Rightarrow \lim_{d(P)\to 0} \Omega(f,P) = 0$, фикс. произв. $\varepsilon>0$

$\Rightarrow \exists$ РАЗБ. P БРУСА I / $0 \leqslant \Omega(f,P) < \frac{\varepsilon}{m}$ (1)

б) $I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ - РАЗБ. I НА ЧАСТИЧНЫЕ БРУСЫ

$\exists\ E_m' := E_m \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} \partial \bar{I}_k\right)$

$E_m'' := E_m \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} \mathring{\bar{I}}_k\right)$

c) Рассм. E_m': $\mu(\partial \bar{I}_k) = 0 \quad \forall k = \overline{1,N}$, т.к. $\partial \bar{I}_k$ - объединение кусков плоскостей

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} \partial \bar{I}_k\right) = 0 \Rightarrow \mu(E_m') = 0$

d) Рассм. E_m'': • если оно пусто $\Rightarrow$ Д-но

• $E_m'' \neq 0 \Rightarrow \exists x^0 \in E_m'' \Rightarrow \exists k^0 \;/\; x^0 \in E_m \cap \mathring{\bar{I}}_{k^0}$ (откр.) $\Rightarrow \exists B_\delta(x^0) \;/\; B_\delta(x^0) \subset \mathring{\bar{I}}_{k^0}$

$\left(B_\delta(x^0) \cap E_m \neq 0\right),\ \omega(\mathring{\bar{I}}_{k^0}) \geq \omega(B_\delta(x^0)) \geq \omega(x^0) \geq \frac{1}{m}$

Рассм. все такие брусы из $\bar{I}_k$: $\{\bar{I}_{k\ell} : \omega(f, \bar{I}_{k\ell}) \geq \frac{1}{m}\}$

так что $E_m'' \subset \left(\bigcup_\ell \mathring{\bar{I}}_{k\ell}\right)$, $\sum_\ell \omega(f, \bar{I}_{k\ell}) \cdot |\bar{I}_{k\ell}| \leq \sum \omega(f, \bar{I}_k) |\bar{I}_k| < \frac{\varepsilon}{2m}$

$\frac{1}{m} \sum_\ell |\bar{I}_{k\ell}| \leq$ Получается, что $\sum_\ell |\bar{I}_{k\ell}| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow v(E_m'') = 0 \Rightarrow \mu(E_m'') = 0$

Но $E_m = E_m' \cup E_m'' \Rightarrow \mu(E_m) = 0$ (m - любое)

($\Leftarrow$) $\exists \mu(E) = 0$. Проверим, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разб. P_0 бруса $\bar{I}$ / $0 \leq \Omega(f, P_0) < C \cdot \varepsilon$ ($C = \text{const}$)

Тогда $\inf_{\sigma^*} \Omega(f, P) = 0 \Rightarrow f \in R(\bar{I})$ по Лемме 2

a) Пусть $\varepsilon > 0$ произв. фикс.

$E(\varepsilon) := \{x \in \bar{I} \;/\; \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ $E(\varepsilon) \subset E \Rightarrow \mu(E(\varepsilon)) = 0$

$E(\varepsilon)$ - замкнуто, $E(\varepsilon) \subset \bar{I} \Rightarrow E(\varepsilon)$ - компакт $\Rightarrow v(E(\varepsilon)) = 0$

$\Rightarrow \exists$ конечная система брусов $\mathcal{J} := \{\mathcal{J}_\ell, \ell = \overline{1,L}\}$ / 1) $E(\varepsilon) \subset \bigcup_{\ell=1}^{L} \mathring{\mathcal{J}}_\ell$

2) $\sum_{\ell=1}^{L} |\mathcal{J}_\ell| < \varepsilon$

$\exists\ \mathcal{J}_\ell := [a_1^{(\ell)}, \beta_1^{(\ell)}] \times [a_2^{(\ell)}, \beta_2^{(\ell)}] \times \ldots \times [a_n^{(\ell)}, \beta_n^{(\ell)}]$

b) Рассм. разб. бруса $\bar{I}$: $P = (P_1, \ldots, P_n)$, $P_i \supset \{a_i^{(\ell)}\} \cup \{a_i, b_i\} \cup \{\beta_i^{(\ell)}\}$

Имеем: разб. на част. брусы $\bar{I}_k$, соответствующие P: $\bar{I} = \bigcup_{k=1}^{N} \bar{I}_k$

Разобьём с-му $\{\bar{I}_k\}$ на две п/с-мы:

$\bar{I}' := \{\bar{I}_{k_s}, s = \overline{1,S} \;/\; \bar{I}_{k_s} \subset \mathcal{J}_\ell \subset \mathcal{J}$ для некоторого ℓ из мн-ва номеров $\ell\}$

$\bar{I}'' := \{\bar{I}_{k_t}, t = \overline{1,T} \;/\; \bar{I}_{k_t} \cap \mathring{\mathcal{J}}_\ell \neq 0 \quad \forall \ell = \overline{1,L}\}$ - пересечение по границе допускается

c) Рассм. систему I': $\sum \omega(f, I_{k_s})|I_{k_s}| \leq 2M \sum_{l=1}^{L} |J_l| < 2M \cdot \varepsilon$, $I_{k_s} \subset I$ (3)

d) Рассм. произв. част. брус $I_{k_t} \subset I''$, по построению $I_{k_t} \cap E(\varepsilon) = \varnothing$ (т.к. $E(\varepsilon) \subset \bigcup_{l=1}^{L} \mathring{I}_l$) $\Rightarrow \omega(f, x) < \varepsilon \quad \forall x \in I_{k_t}$, $t = \overline{1,T}$

По $\boxed{\dashv \text{КАНТОРА}}$ $\Rightarrow \exists$ разб. P_{k_t} бруса I_{k_t} (с $d(P_{k_t}) < \delta$) / $I_{k_t} = \bigcup_{m=1}^{M_t} I_{k_t, m}$

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{M_t} \omega(f, I_{k_t,m})}_{\leq \varepsilon + \varepsilon} |I_{k_t,m}| < 2\varepsilon \cdot |I_{k_t}| \quad (4) \quad (\forall t = \overline{1,T})$$

$\omega_0 = \varepsilon$

e) Рассм. теперь разбиение $P_0 := P \cup \left(\bigcup_{t=1}^{T} P_{k_t}\right)$

Имеем: $0 \leq \Omega(P_0) = \sum_{I_{k_s} \subset I'} \underbrace{\omega(f, I_{k_s})|I_{k_s}|}_{\leq 2M\varepsilon \text{ по } (3)} + \sum_{I_{k_t} \subset I''} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{M_t} \omega(I_{k_t,m})|I_{k_t,m}|\right)}_{\leq 2\varepsilon |I_{k_t}| \text{ по } (4)} \leq 2M\varepsilon + 2\varepsilon \underbrace{\sum_{I''} |I_{k_t}|}_{\leq |I|} \leq$

$\leq 2(M + |I|)\varepsilon = C \cdot \varepsilon$ ◀

Глава 2 Интеграл Римана на ограниченном множестве

§1: Измеримость по Жордану

Пункт 1. Определение измеримого множества

Опр. 1 Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Функция $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ называется **характеристической** функцией мн-ва A.

Опр. 2 Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, A - ограничено. Тогда A - **измеримо по Жордану** $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\mu(\partial A) = 0$ — но здесь речи про I нет

$A \subset I$

Замечание • A - ограничено $\Rightarrow \partial A$ огр. и замкн. $\Rightarrow \partial A$ - компакт $\Rightarrow \left(\begin{matrix} \mu(\partial A) = 0 \\ v(\partial A) = 0 \end{matrix}\right) \Leftrightarrow$

• $\exists A \subset \mathbb{R}^n$, A - ограничено $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists$ брус I: $A \subset I$

$\dashv$1 Критерий измеримости по Жордану

$\exists A \subset I$. Тогда A измеримо по Жордану $\Leftrightarrow \chi_A \in R(I)$

▶ Покажем, что $E := \{x \in I / \chi_A(x) \notin C(x)\} = \partial A$

В с.д., $\mathbb{R}^n = A_i \cup A_e \cup \partial A$: $A_i = \mathring{A}$ - внутренность, $A_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$

• Очевидно, $\underset{(\equiv 1)}{\chi_A \in C(A_i)}$ и $\underset{(\equiv 0)}{\chi_A \in C(A_e)}$

• Пусть $x^0 \in \partial A \Rightarrow \exists x_n^{(1)} \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(1)} \to x^0$, $\chi_A(x_n^{(1)}) = 1$

$\exists x_n^{(2)} \in CA$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n^{(2)} \to x^0$, $\chi_A(x_n^{(2)}) = 0$

$\Rightarrow \chi_A \notin C(x^0) \Rightarrow E = \partial A$.

Имеем: A-огр. Тогда $\mu(\partial A)=0 \Leftrightarrow \mu(E)=0 \Leftrightarrow \chi_A \in R(\bar{I})$ — Т-ка Лебега

Опр.3 Пусть $A \subset \bar{I}$, A - измеримо по Жордану

$\Rightarrow |A|_n = |A| := \int\limits_{\bar{I}} \chi_A(x)\,dx$ - **мера Жордана**

Замечание 1) Пусть $A = \bar{I} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$$\Rightarrow \int\limits_{\bar{I}} \chi_{\bar{I}}(x)\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i), \text{ причём}$$

$$\lim \sigma(\chi_{\bar{I}}, P) = 1 \cdot \sum_{k=1}^{N} |\bar{I}_k| = |\bar{I}|$$

2) Опр.3 корректно (не зависит от бруса $\bar{I}$ / $A \subset \bar{I}$)

$A \subset \bar{I}_1, A \subset \bar{I}_2 \Rightarrow \int\limits_{\bar{I}_1} \chi_A\,dx = \int\limits_{\bar{I}_2} \chi_A\,dx$

Лекция 9 23/03 д.о.

▷ Пусть $A \subset \bar{I}_1$, $A \subset \bar{I}_2 \Rightarrow A \subset \bar{I} := \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2$ - брус

по усл., A-изм по Жордану $\overset{\text{Т-ка 11}}{\Longrightarrow} \chi_A \in R(\bar{I}_1), \chi_A \in R(\bar{I}_2), \chi_A \in R(\bar{I})$

Т.о., $\exists \int\limits_{\bar{I}_1} \chi_A\,dx$, $\exists \int\limits_{\bar{I}_2} \chi_A\,dx$, $\exists \int\limits_{\bar{I}} \chi_A\,dx$

Пусть $P(\bar{I})$ - произв. разб. бруса $\bar{I}$ с $d(P) = d(P(\bar{I}))$

- Рассм. $P(\bar{I}_1) = P(\bar{I}) \cup P(\bar{I}_1 \setminus \mathring{\bar{I}})$ с $d(P(\bar{I}_1)) \le d(P(\bar{I}))$
  и выбираем метку так, что её точка $\in \bar{I}_1 \setminus \bar{I}$, так что $\chi(\xi) = 0$
- Рассм. $P(\bar{I}_2) = P(\bar{I}) \cup P(\bar{I}_2 \setminus \mathring{\bar{I}})$ с $d(P(\bar{I}_2)) \le d(P(\bar{I}))$
  и выбираем метку с точками $\bar{I}_2 \setminus \bar{I}$

Имеем: $\sigma(\chi_A, P(\bar{I}_1), \xi^{(1)}) = \sigma(\chi_A, P(\bar{I}), \xi) = \sigma(\chi_A, P(\bar{I}_2), \xi^{(2)})$

($\xi^{(1)}$ — выбор метки; $\xi^{(2)}$ — выбор метки)

К $\xrightarrow[d(P)\to 0]{\lim}$: $\int\limits_{\bar{I}_1} \chi_A\,dx = \int\limits_{\bar{I}_2} \chi_A\,dx$ ◁

Т-ка 12 $\exists A \subset \bar{I}$. Тогда ($A$ измеримо по Жордану) $\wedge$ ($|A| = 0$) $\Leftrightarrow$ $v(A) = 0$

▶ ($\Rightarrow$) а) Д-м, что $\mathring{A} = \emptyset$

сие: $\exists \mathring{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathring{\bar{I}}(x) \subset \bar{I}(x) \subset \mathring{A} \subset A$ для некоторого бруса $\bar{I}(x)$

$\Rightarrow$ по усл., $0 = \int\limits_{\bar{I}} \chi_A\,dx = \overline{J}_H(\chi_A, \bar{I}) = \sup\limits_P s(\chi_A, \bar{I}) \ge |\bar{I}(x)| > 0$ ⊥

(т.к. $\chi_A|_{\bar{I}(x)} = 1$)

б) Д-м, что $v(A) = 0$. По усл., $\mu(\partial A) = 0 \Rightarrow v(\partial A) = 0$, т.к. A - компакт

Но $\mathring{A}=\emptyset \Rightarrow A \subset \mathring{A} \cup \partial A = \partial A \Rightarrow v(A)=0$

($\Leftarrow$) Предп., что $v(A)=0$

а) Имеем: $v(\partial A)=0 \Rightarrow \mu(\partial A)=0 \Rightarrow A$ – изм. по Жордану

$\boxed{-11} \Rightarrow J|A| = \int\limits_{\underline{I}} \chi_A(x)\,dx = J_H(\chi_A, \underline{I}) = \sup\limits_P s(\chi_A, \underline{I})$

б) Д-м, что $|A|=0$

JP-произв. р-е бруса $\underline{I}$ / $\underline{I} = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \underline{I}_k$. Тогда $\forall k$, $\underline{I}_k \not\subset A$ (иначе $v(\underline{I}_k)=0$, т.к. $v(A)=0$) (брус)

$\Rightarrow \underline{I}_k \cap CA \neq \emptyset \Rightarrow m_k(\chi_A)=0 \ \ \forall k \Rightarrow J_H(\chi_A)=0 \Rightarrow \int\limits_{\underline{I}} \chi_A\,dx = 0$

$\Rightarrow |A|=0$ ◀

Замечание $|A|$ называют также **объёмом** A.

Пункт 2. Свойства измеримых множеств

Лемма $A \subset \underline{I}$, A – изм. по Жордану $\Rightarrow \bar{A}$ и ∂A изм. по Жордану

▷ 1) Имеем $\partial\bar{A} = \partial A$. По усл., $\mu(\partial A)=0=\mu(\partial\bar{A})$

2) По усл., A – измеримо $\Rightarrow \mu(\partial A)=0 \Rightarrow v(\partial A)=0$ ($\boxed{-12}$) $\Rightarrow \partial A$ – измеримо (компакт) ◁

$\boxed{-11}$ A_1, A_2 – огр., измеримы по Жордану $\Rightarrow A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2$ – изм. по Ж.

▶ 1) Д-м, что $A_1 \cup A_2$ – измеримо по Ж.

Имеем: $v(\partial A_1) = v(\partial A_2) = 0$

Но $\partial(A_1 \cup A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$; в с.у., $\forall O(x)$, $x \in \partial(A_1 \cup A_2)$, $\begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap (A_1 \cup A_2), \\ \exists x_2 \in O(x) \cap (CA_1 \cap CA_2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap A_1, \\ \exists x_2 \in O(x) \cap CA_1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap A_2 \\ \exists x_2 \in O(x) \cap CA_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \partial A_1 \ni x \\ \text{или} \\ \partial A_2 \ni x \end{matrix} \Rightarrow x \in \partial A_1 \cup \partial A_2$

По усл. $\mu(\partial A_1) = \mu(\partial A_2) = 0 \Rightarrow \mu\partial(A_1 \cup A_2) = 0 \Rightarrow A_1 \cup A_2$ – изм. по Жордану

2) Д-м, что $A_1 \cap A_2$ – измеримо по Ж.

$\partial(A_1 \cap A_2) \subset (\partial A_1) \cup (\partial A_2)$. В с.у., $\exists x \in \partial(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \forall O(x) \begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap (A_1 \cap A_2) \\ \exists x_2 \in O(x) \cap (CA_1 \cup CA_2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap (A_1 \cap A_2), \\ \exists x_2 \in O(x) \cap CA_1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \exists x_1 \in O(x) \cap (A_1 \cap A_2), \\ \exists x_2 \in O(x) \cap CA_2 \end{cases} \Rightarrow x \in \partial A_1 \cup \partial A_2$

Т.о., $\mu(\partial(A_1 \cap A_2)) = 0 \Rightarrow A_1 \cap A_2$ – изм. по Жордану ◀

Следствие Пусть $A_1, \dots, A_N$ – огр. и изм. $\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{N} A_k$ – измеримы

Опр. $\exists U,V\subset\mathbb{R}^n$, U,V-открыты, $f:U\to V$, f-биекция. Тогда

1) f - гомеоморфизм $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}(f\in C(U))\wedge(f^{-1}\in C(V))$

2) f - диффеоморфизм $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}(f\in C^1(U))\wedge(f^{-1}\in C^1(V))$

§1.2 О локальном диффеоморфизме

Пусть $G\subset\mathbb{R}^m$, G-открыто, $x^0\in G$, $f:G\to\mathbb{R}^m$, $y^0=f(x^0)$, причём

1) $f\in C^1(G)$
2) $\det Df(x^0)\neq 0$

$\Rightarrow \exists U,V\subset\mathbb{R}^m$, U,V-откр. $/\ x^0\in U$, $y^0\in V$, причём

1) $f:U\to V$ - диффеоморфизм
2) $Df^{-1}(y)=(Df(x))^{-1}\ \forall x\in U,\ y=f(x)$ ▶◀

Лекция 10
30/03 д.о.

§1.3 О сохранении измеримости при C^1-отображении

Пусть $A\subset\bar{A}\subset G\subset\mathbb{R}^n$, G-открыто, A-огр. и измеримо по Жордану
$f:G\to\mathbb{R}^n$, $f\in C^1(G)\Rightarrow f(A)$-огр. и измеримо по Жордану

▶ 1) $f(A)$-огр.: в с.д., $\bar{A}$-огр. и замкнуто в $\mathbb{R}^n\Rightarrow\bar{A}$-компакт
$\Rightarrow f(\bar{A})$-компакт $\Rightarrow f(\bar{A})$-огр. $\Rightarrow f(A)$-огр.

2) Д-м, что $f(A)$-измеримо по Жордану
A-огр. $\Rightarrow\exists$ брус $\bar{I}\ /\ \bar{A}\subset\bar{I}$
Положим $S:=\{x\in G\ /\ \det\|Df(x)\|=0\}$ и $S_A:=S\cap\bar{A}\subset\bar{I}$
Пусть $x^0\in A^\circ\ /\ \det\|Df(x^0)\|\neq 0\ \overset{\text{§1.2}}{\Rightarrow} f(x^0)\in(f(A))^\circ$;
$\Rightarrow\partial f(A)\subset f(\partial A)\cup f(S_A)$ (*)
Но • $\mu(\partial A)=0$, т.к. A измеримо $\overset{\text{§1.1 инвар. и при } C^1}{\Rightarrow}\mu(f(\partial A))=0$, т.к. $f\in C^1(G)$
• $\mu(f(S_A))=0$ (по §1.1 Сарда, $m=n$) $/\Rightarrow\mu(\partial f(A))=0$ по (*) $\Rightarrow f(A)$ изм. ◀

§2: Интеграл Римана на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$

Пункт 1 Определение интеграла Римана на ограниченном множестве

Предв. замечание $f: A \to \mathbb{R}$, $f \cdot \chi_A := \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Опр. $\exists A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \bar{I}$ — брус (A-огр.), $f: A \to \mathbb{R}$. Тогда

$f \in R(A)$ — **интегрируема по Риману** на $A \overset{def}{\iff} f\chi_A \in R(\bar{I})$

При этом $\int\limits_A f(x)dx := \int\limits_{\bar{I}} (f\chi_A)(x)dx$

Замечание 1) $f \in R(A) \Rightarrow f \in B(A)$.

В с.д., $f\chi_A \in R(A) \Rightarrow f\chi_A \in B(A) \Rightarrow f\chi_A = f$ на A, $f\chi_A \in B(A)$

2) Если $A = \bar{I}$, то $f\chi_{\bar{I}} = f \Rightarrow \int\limits_{\bar{I}} f(x)dx = \int\limits_{\bar{I}} f(x)\chi_{\bar{I}}(x)dx = \int\limits_{\bar{I}} f(x)dx$

⊣1 Корректность Опр.

$\exists A \subset \bar{I}_1$, $A \subset \bar{I}_2$, $f: A \to \mathbb{R}$, $f\chi_A \in R(\bar{I}_1) \Rightarrow f\chi_A \in R(\bar{I}_2)$, причём $\int\limits_{\bar{I}_2} f\chi_A dx \overset{(1)}{=} \int\limits_{\bar{I}_1} f\chi_A dx$

▶ 1) Д-м, что $f\chi_A \in R(\bar{I}_2)$

$\exists \bar{I} := \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2$ — брус. Тогда $A \subset \bar{I}$. Заметим, что $f \in B(A)$, т.к. $f\chi_A \in R(\bar{I}) \Rightarrow f\chi_A \in B(A)$

Имеем: $E(f\chi_A) \cap \bar{I}_1 = E(f\chi_A) \cap \bar{I} = E(f\chi_A) \cap \bar{I}_2$ (2)

(мн-во т-к разрыва $f\chi_A$)

Но $f\chi_A \in R(\bar{I}_1) \overset{\text{⊣Кр. Лебега}}{\Rightarrow} \mu(E(f\chi_A) \cap \bar{I}_1) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \mu(E(f\chi_A) \cap \bar{I}_2) = 0$, причём

$f\chi_A$-огр $\overset{\text{⊣Кр. Лебега}}{\Rightarrow} f\chi_A \in R(\bar{I}_2)$

2) Рассм. произв. р-е бруса $\bar{I}$ и р-я брусов $\bar{I}_1$ и $\bar{I}_2$ вида

$P(\bar{I}_j) = P(\bar{I}) \cup P(\bar{I}_j \setminus \mathring{\bar{I}})$, $j = 1,2$ с $d(P(\bar{I}_j)) \leqslant d(P)$

Заметим, что $f\chi_A|_{\bar{I}_2 \setminus \bar{I}} = f\chi_A|_{\bar{I}_1 \setminus \bar{I}} = 0$

Поэтому, выбирая метки $\xi / \xi_k \in \bar{I}_k$

$\Rightarrow \sigma(f\chi_A, P(\bar{I}_2), \xi) = \sigma(f\chi_A, P(\bar{I}), \xi') = \sigma(f\chi_A, P(\bar{I}_1), \xi'') \to \int f\chi_A dx$

$d(P) \to 0$ $\bar{I}_1$

$d(P) \to 0$ $\int\limits_{\bar{I}_2} f\chi_A dx$

$\Rightarrow$ (1) ◀

Замечание A-огр и $f \in R(A) \overset{\text{б.2.}}{\not\Rightarrow} A$-измеримо

н-р, $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $A := \mathbb{Q} \cap [0;1]$

Тогда $f\chi_A \equiv 0$ на $[0,1] \Rightarrow f\chi_A \in R[0,1] \Rightarrow f \in R(A)$, причём $\int\limits_A f\,dx = 0$. Но A не измеримо, т.к. $\partial A = [0,1]$

12 Критерий Лебега $\exists I \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset I$, A-измеримо, $f \in B(A)$

Тогда $f \in R(A) \Leftrightarrow \mu(E(f)) = 0$, где $E(f) := \{x \in A \mid f \notin C(x)\}$

▶ Заметим, что $E(f) \overset{(3)}{\subset} E(f\chi_A) \overset{(4)}{\subset} E(f) \cup \partial A$

$\Rightarrow$ $\exists f \in R(A) \Rightarrow f\chi_A \in R(I) \overset{\text{Кр. Л.}}{\Rightarrow} \mu((E(f\chi_A)) \cap I) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \mu(E(f)) = 0$

$\Leftarrow$ $\exists \mu(E(f)) = 0$. Заметим, что $\mu(\partial A) = 0$, т.к. A-измеримо

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \mu(E(f\chi_A)) = 0 \overset{\text{Кр. Л.}}{\Rightarrow} f\chi_A \in R(I) \Rightarrow f \in R(A)$ ◀

Пункт 2. Свойства интегралов

Лемма $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

▷ Если $A \cap B = \emptyset$, то утв. очевидно

Поэтому считаем, что $A \cap B \neq \emptyset$

1) Пусть $x \in A \cup B$. Тогда $\chi_{A \cup B}(x) = 1$

- если $x \in A \setminus B$, то $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B} = 1$, если $x \in B \setminus A$ - аналогично
  ($\chi_A = 1$, $\chi_B = 0$, $\chi_{A \cap B} = 0$)
- если $x \in A \cap B$, то $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B} = 1$
  ($\chi_A = 1$, $\chi_B = 1$, $\chi_{A \cap B} = 1$)

2) Пусть $x \in C(A \cup B) = CA \cap CB$. Тогда $\chi_{A \cup B} = 0$.

И, кроме того, $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) = 0$ ($\chi_A = 0$, $\chi_B = 0$, $\chi_{A \cap B} = 0$) ◁

Лекция 11
01/04 д.о.

Следствие $A, B \subset I$, A, B-измеримы, $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow A \cup B$-измеримо, причём $|A \cup B| = |A| + |B|$

▷ 1) $A \cup B$-измеримо, д-но $\overset{\text{Кр. изм.}}{\Rightarrow}$ $\chi_A, \chi_B, \chi_{A \cup B} \in R(I)$

2) $A \cap B = \emptyset \overset{\text{лемма}}{\Rightarrow} \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, поэтому

$$|A \cup B| = \int\limits_I \chi_{A \cup B}\,dx = \int\limits_I \chi_A\,dx + \int\limits_I \chi_B\,dx = |A| + |B|$$ ◁

Предв. замечание $f,g\in R(\bar I)\Rightarrow \alpha f+\beta g\in R(\bar I)$ и

$$\int_{\bar I}(\alpha f+\beta g)(x)dx=\alpha\int_{\bar I}f(x)dx+\beta\int_{\bar I}g(x)dx,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

▷ Переход к $\lim\limits_{d(P)\to 0}$ в интегральных суммах ◁

—1 Линейность интеграла $A\subset\bar I$, $f,g\in R(A)\Rightarrow \alpha f+\beta g\in R(A)$ $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, причём $\int\limits_A[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int\limits_A f dx+\beta\int\limits_A g dx$ (1)

▶ По усл., $f,g\in R(A)\Rightarrow f\chi_A, g\chi_A\in R(\bar I)$ (пр. замеч.) $\Rightarrow \alpha f\chi_A+\beta g\chi_A\in R(\bar I)$, причём

$f\chi_A:=\begin{cases}f(x), x\in A,\\ 0, x\notin A\end{cases}$

$$\int_{\bar I}[\alpha f\chi_A+\beta g\chi_B]dx=\alpha\int_{\bar I}f\chi_A dx+\beta\int_{\bar I}g\chi_A dx\Rightarrow(1)$$

$\int_{\bar I}[\alpha f\chi_A+\beta g\chi_B]dx=\int_A(\alpha f+\beta g)dx$; $\alpha\int_{\bar I}f\chi_A dx=\alpha\int_A f dx$; $\beta\int_{\bar I}g\chi_A dx=\beta\int_A g dx$ ◀

Замечание —1 верна для конечного числа ф-ций

—2 $A\subset\bar I$, $B\subset A$, $\mu(B)=0$, $f\in R(A)$, $f\equiv 0$ на $A\setminus B$ (почти всюду) $\Rightarrow\int\limits_A f dx=0$

▶ По усл., $f\in R(A)\Rightarrow f\chi_A\in R(\bar I)\Rightarrow\exists\lim\limits_{d(P)\to 0}\sigma(f\chi_A,P(\bar I,\xi))=$

$$=\lim_{d(P)\to 0}\sum_{k=1}^{N}f\chi_A(\underbrace{\xi_k}_{\in\bar I_k})\cdot|\bar I_k|$$

Но $\mu(\bar I_k)\neq 0\Rightarrow B\cap\bar I_k\subset\subset\bar I_k$ $\forall k$, т.к. $\mu(B)=0$

$\Rightarrow\exists\xi_k\in\bar I_k: f(\xi_k)=0\Rightarrow$ для выбранных меток $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_N)$,

$\sigma(f\chi_A,P(\bar I,\xi))=0\underset{\text{к }\lim\limits_{d(P)\to 0}}{\Longrightarrow}\int\limits_{\bar I}f\chi_A dx=\int\limits_A f dx=0$ ◀

Следствие A-огр., $B\subset A$, $\mu(B)=0$, $f,g\in R(A)$, $f\equiv g$ на $A\setminus B$

$$\Rightarrow\int_A f dx=\int_A g dx$$

Замечание $A\subset\bar I$, $B\subset A$, $\mu(B)=0$, $f\in R(A)$, $f\equiv g$ на $A\setminus B$ $\overset{6.2.}{\not\Rightarrow} g\in R(A)$

Н-р, $A=[0,1]$, $f\equiv 1\Rightarrow f\in R[0,1]$

$g(x):=\begin{cases}0, x\in\mathbb{Q},\\ 1, x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $B:=\mathbb{Q}\cap[0,1]\Rightarrow\mu(B)=0$, при этом $f\equiv g\equiv 1$ на $A\setminus B$. Но $g\notin R[0,1]$

§13 Интегрируемость произведения

$A \subset \bar{I}$, $f, g \in R(A) \Rightarrow f \cdot g \in R(A)$

▶ Надо д-ть, что $f g \chi_A \in R(\bar{I})$

1) Имеем: $F := f\chi_A \in R(I)$ и $G := g\chi_A \in R(\bar{I})$, по усл., причём

$f g \chi_A = f g \chi_A^2 = (f\chi_A)(g\chi_A) = F \cdot G$

Поэтому дост. д-ть, что $F \cdot G \in R(\bar{I})$

2) $F, G \in R(\bar{I}) \Rightarrow F, G \in B(\bar{I}) \Rightarrow F \cdot G \in B(\bar{I})$

3) Пусть $x \in \bar{I}$ / $F \in C(x)$, $G \in C(x) \Rightarrow F \cdot G \in C(x) \Rightarrow E(F \cdot G) \subset E(F) \cup E(G)$

Но $\mu(E(F)) = \mu(E(G)) = 0$ (по §4 Кр. Лебега, для бруса, т.к. $F, G \in R(\bar{I}) \cap B(\bar{I})$)

$\Rightarrow \mu(E(F) \cup E(G)) = 0 \Rightarrow \mu(E(F \cdot G)) = 0 \Rightarrow$ по §4 Кр. Лебега $F \cdot G \in R(\bar{I})$ т.к. $F \cdot G \in B(\bar{I})$ ◀

§14 Аддитивность интеграла

$\exists A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$, $A_k \subset \bar{I}$, $A_k \cap A_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$, $f \in R(A_k)$, $\forall k \Rightarrow f \in R(A)$, причём

$$\int_A f\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{A_k} f\,dx \quad (2)$$

▶ 1) Имеем: $f\chi_{A_k} \in R(\bar{I})$ и $\chi_A = \sum_{k=1}^{m} \chi_{A_k} \Rightarrow f\chi_A = \sum_{k=1}^{m} f\chi_{A_k} \Rightarrow f \in R(A)$

($A_k \cap A_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$)

2) причём $\int_{\bar{I}} f\chi_A\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{\bar{I}} f\chi_{A_k}\,dx \Rightarrow \int_A f\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{A_k} f\,dx \Rightarrow (2)$ ◀

§15 Интеграл по подмножеству

$A \subset \bar{I}$, $B \subset A$, B-измеримо, $f \in R(A) \Rightarrow f \in R(B)$

▶ Надо д-ть, что $f\chi_B \in R(\bar{I})$

Но $\chi_B = \chi_A \cdot \chi_B \Rightarrow f\chi_B = \underbrace{(f\chi_A)}_{\in R(\bar{I}),\ \text{по усл.}} \underbrace{\chi_B}_{\in R(\bar{I}),\ \text{т.к. } B \text{ изм.}} \in R(\bar{I}) \Rightarrow f \in R(B)$ ◀

Задача. §15 в т. неверна, если B не измеримо.

Следствие $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$, $A_k \subset \bar{I}$, $A_k \cap A_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$, A_k-измеримо $\forall k = \overline{1,m}$

$f \in R(A) \Rightarrow f \in R(A_k)\ \forall k$ и верно (2)

Пункт 3. Оценки интеграла

⊣1 $A \subset \bar{I}$, $f \in R(A)$, $f \geq 0$ на $A \Rightarrow \int\limits_A f\,dx \geq 0$

▶ $f \in R(A) \Rightarrow \exists \int\limits_A f\,dx = \int\limits_{\bar{I}} f\chi_A\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} \underbrace{\sigma(f\chi_A, P(\bar{I}, \xi))}_{\geq 0} \geq 0$ ◀

Следствие 1) $A \subset \bar{I}$, $f, g \in R(A)$, $f \leq g$ на $A \Rightarrow \int\limits_A f\,dx \leq \int\limits_A g\,dx$

2) $A \subset \bar{I}$, A-измеримо, $f \in R(A)$, $m := \inf\limits_A f$, $M := \sup\limits_A f$

$\Rightarrow m|A| \leq \int\limits_A f(x)\,dx \leq M|A|$

3) $A, B \subset \bar{I}$, A, B-измеримы, $A \subset B \Rightarrow |A| \leq |B|$

⊣2 $A \subset \bar{I}$, A-измеримо, $f \in R(A) \Rightarrow |f| \in R(A)$, причём $\left|\int\limits_A f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_A |f(x)|\,dx$ (1) (2)

▶ 1) Д-м (1): Имеем: $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)|$

$\Rightarrow \{(f \in C(x)) \Rightarrow (|f| \in C(x))\} \Rightarrow E(|f|) \subset E(f)$

Но $\mu(E(f)) = 0$ (т.к. $f \in R(A)$, A-измеримо) $\Rightarrow \mu(E(|f|)) = 0$

$\Rightarrow$ снова по ⊣Кр. Лебега (т.к. A-измеримо, $|f| \in B(A)$) $\Rightarrow |f| \in R(A)$

2) Д-м (2): Имеем: $-|f| \leq f \leq |f|$ на A $\overset{⊣1}{\Rightarrow}$ (2) ◀

Следствия 1) $\exists M := \sup\limits_A |f|$ и выполнены усл. ⊣2

$\Rightarrow \left|\int\limits_A f\,dx\right| \leq \int\limits_A |f|\,dx \leq M \int\limits_A 1\,dx = M \int\limits_{\bar{I}} \chi_A\,dx = M|A|$

2) $A \subset \bar{I}$, $|A| = 0$, $f \in B(A) \Rightarrow f \in R(A)$, причём $\int\limits_A f(x)\,dx = 0$ (3)

▷ • $|A| = 0 \Rightarrow v(A) = 0 \Rightarrow v(\bar{A}) = 0$, в части $v(\partial A) = 0 \Rightarrow A$-измеримо

• Имеем: $E(f) \subset A \Rightarrow \mu(E(f)) = 0 \overset{⊣\text{Кр. Лебега}}{\Rightarrow} f \in R(A)$

• $\left|\int\limits_A f\,dx\right| \leq M|A| = 0 \Rightarrow$ (3) ◁

⊣3 $A \subset \mathring{\bar{I}}$, $f \geq 0$ на A, $f \in R(A)$, причём $\int\limits_A f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$, $B := \{x \in A \mid f(x) > 0\}$

▶ 1) Пусть $F := f\chi_A$. Тогда $B = \{x \in \mathring{\bar{I}} \mid F > 0\}$

По усл., $F \in R(\bar{I})$, F-огр. (т.к. $f \in R(A)$) $\overset{⊣\text{Кр. Лебега}}{\Rightarrow} \mu(E(F) \cap \bar{I}) = 0$

Лекция 12
06/04д.о

$\Rightarrow \mu(E(F)\cap \mathring{\bar{I}}) = 0$. Дост. д-ть, что $B \subset E(F)\cap \mathring{\bar{I}}$ или $CB \supset C(E(F)\cap \mathring{\bar{I}}) = C(E(F)) \cup C(\bar{I})$ (4)

2) Пусть $x \in C(E(F)) \cup C(\bar{I})$

а) если $x \in C(\bar{I}) \Rightarrow x \notin \mathring{\bar{I}} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \notin B \Rightarrow$ (4)

б) если $x \notin E(F)$. Д-м, что $x \notin B$:

сис: $\exists x \in B \Rightarrow F(x) = f(x)\cdot 1 =: c > 0$, $x \in \mathring{\bar{I}} \Rightarrow \exists$ брус $\bar{I}_1(x) \subset \mathring{\bar{I}}$, причём

$\bar{I}_1(x) \ni x$ / $F \geqslant \frac{c}{2}$ на $\bar{I}_1(x) \Rightarrow$ но по усл. $0 = \int\limits_A f dx = \int\limits_{\bar{I}} f\chi_A dx = \int\limits_{\bar{I}} F(x) dx =$

[Ч-ААД. Ф-ЛА]

$= \int\limits_{\bar{I}_1(x)} F dx + \int\limits_{\bar{I}\setminus\bar{I}_1(x)} F dx > 0$ $\quad \perp \Rightarrow x \notin B$

$\bar{I}_1(x)$: $\geqslant \frac{c}{2}|\bar{I}_1(x)|$; $\bar{I}\setminus\bar{I}_1(x)$: $\geqslant 0$ — т.к. $f \geqslant 0$ на A $\Rightarrow f\chi_A \geqslant 0$ на $\bar{I}\setminus\bar{I}_1(x)$

Следствия 1) $f \in R(\bar{I})$, $f > 0$ на $\bar{I} \Rightarrow \int\limits_{\bar{I}} f dx > 0$

В с.д., [Ч-З] $\Rightarrow \int\limits_{\bar{I}} f(x) dx \geqslant 0$. Д-м, что $\int\limits_{\bar{I}} f(x) dx \neq 0$

сис: $\exists \int\limits_{\bar{I}} f dx = 0$ [Ч-З] $\Rightarrow \mu(\bar{I}) = 0$ $\perp$, $\mu(\bar{I}) \neq 0$ $(f|_{\bar{I}} > 0)$

2) $A \subset \bar{I}$, A-измеримо и открыто, $f \geqslant 0$ на A, $f \in C(A)$, $f \in R(A)$, причём $\int\limits_A f dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ на A

▷ сис: $\exists x \in A$ / $f(x) > 0 \Rightarrow$ т.к. A-открыто, $\exists \bar{I}_1(x)$ / $x \in \mathring{\bar{I}}_1(x) \subset A$

Тогда $f \in R(I_1) \cap R(A\setminus\bar{I}_1)$ [Ч-ААД. Ф-ЛА] $\Rightarrow 0 = \int\limits_A f dx = \int\limits_{\bar{I}_1(x)} f dx + \int\limits_{A\setminus\bar{I}_1(x)} f dx > 0$ $\perp$ △

$\bar{I}_1(x)$: > 0; $A\setminus\bar{I}_1(x)$: $\geqslant 0$, $f \geqslant 0$ по усл.

3) A-измеримо, открыто, $f \in C(A)$, $\int\limits_{\bar{I}} f dx = 0$ $\forall \bar{I} \subset A \Rightarrow f \equiv 0$ в A

▷ сис: $\exists x \in A$ / $f(x) \neq 0$, б.о.о., $f(x) > 0$.

Но $f \in C(x)$ по усл. $\Rightarrow \exists \bar{I}_1(x) \subset A$ / $f \geqslant \frac{c}{2}$ на $\bar{I}_1$

$\Rightarrow \int\limits_{\bar{I}_1} f(x) dx \geqslant \frac{c}{2}|\bar{I}_1| > 0$ $\perp$ ◁

§3: Теорема Фубини для бруса

Ч-Фубини для бруса Пусть $x \in \bar{I}^m \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \bar{I}^n \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{I} := \bar{I}^m \times \bar{I}^n$ - брусы, $f \in R(\bar{I})$, $J_A(x) := J_A(f(x,\cdot))$, $J_B := J_B(f(x,\cdot))$, $x \in \bar{I}^m$

ТОГДА $J_H, J_B \in R(\overline{I}^m)$, ПРИЧЁМ $J := \int\limits_{\overline{I}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\overline{I}^m} J_H(f(x,\cdot))\,dx$ (1)

И $J := \int\limits_{\overline{I}} J_B(f(x,\cdot))\,dx = \int\limits_{\overline{I}} J_B(x)\,dx$ (2)

▶ Ф-ли (1), а (2) д-ся АНАЛОГИЧНО.

1) ПУСТЬ $P := P^m \times P^n$ – ПРОИЗВ. РАЗБ-Е БРУСА $\overline{I}$, ГДЕ P^m И P^n – Р-Я БРУСОВ $\overline{I}^m$ И $\overline{I}^n$

$$\overline{I}^m = \bigcup_{i=1}^{N_m} \overline{I}_i^m, \quad \overline{I}^n = \bigcup_{j=1}^{N_n} \overline{I}_j^n, \quad \overline{I} = \bigcup_{i=1}^{N_m}\bigcup_{j=1}^{N_n} \overline{I}_i^m \times \overline{I}_j^n$$

Обозн: $m_{ij} := \inf\limits_{\overline{I}_i^m \times \overline{I}_j^n} f$, $m_j(x) := \inf\limits_{\overline{I}_j^n} f(x,\cdot)$, $M_{ij} := \sup\limits_{\overline{I}_i^m \times \overline{I}_j^n} f$, $M_j(x) := \sup\limits_{\overline{I}_j^n} f(x,\cdot)$

Заметим, что $f \in R(\overline{I}) \Rightarrow \exists \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P,f) = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(P,f) = J$ (по усл.)

Имеем: $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{N_m}\sum\limits_{j=1}^{N_n} m_{ij} |\overline{I}_i^m \times \overline{I}_j^n| \le \sum\limits_{i=1}^{N_m} \inf\limits_{x\in\overline{I}_i^m} \Big(\sum\limits_{j=1}^{N_n} m_j(x)|\overline{I}_j^n|\Big)|\overline{I}_i^m| \le$

Заметим, что $m_{ij} \le m_j(x),\ \forall x \in \overline{I}_i^m \Rightarrow m_{ij} \le \inf\limits_{x\in\overline{I}_i^m} m_j(x)$ (3) Лекция 13 13/04 д.о.

Аналогично, $M_{ij} \ge M_j(x),\ \forall x \in \overline{I}_i^m \Rightarrow M_{ij} \ge \sup\limits_{x\in\overline{I}_i^m} M_j(x)$ (4)

Кроме того, по усл-ю, $f \in R(\overline{I}) \Rightarrow \exists \lim\limits_{d(P)\to 0} S(P,f) = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(P,f) = J$ (5)

Имеем: $s(f,P) \to J$, $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{N_m}\sum\limits_{j=1}^{N_n} m_{ij}|\overline{I}_i^m \times \overline{I}_j^n| \le \sum\limits_{i=1}^{N_m} \inf\limits_{x\in\overline{I}_i^m}\Big(\sum\limits_{j=1}^{N_n} m_j(x)|\overline{I}_j^n|\Big)\cdot|\overline{I}_i^m| \le$

$\le \sum\limits_{i=1}^{N_m}\Big[\inf\limits_{x\in\overline{I}_i^m} J_H(x)\Big]\cdot|\overline{I}_i^m| = s(J_H) \le$ (по (3)) $\sum\limits_{i=1}^{N_m}\Big[\sup\limits_{x\in\overline{I}_i^m} J_H(x)\Big]\cdot|\overline{I}_i^m| = S(J_H) \le$

$\le \sum\limits_{i=1}^{N_m}\Big[\sup\limits_{x\in\overline{I}_i^m} J_B(x)\Big]\cdot|\overline{I}_i^m| \le \sum\limits_{i=1}^{N_m} \sup\limits_{x\in\overline{I}_i^m}\Big(\sum\limits_{j=1}^{N_n} M_j(x)|\overline{I}_j^n|\Big)|\overline{I}_i^m| \le$ (по (4))

$\le \sum\limits_{i=1}^{N_m}\sum\limits_{j=1}^{N_n} M_{ij}|\overline{I}_j^n \times \overline{I}_i^m| = S(f,P) \to J$ (6)

2) Из (6) $\Rightarrow 0 \le \Omega(J_H) = S(J_H) - s(J_H) \le S(f,P) - s(f,P) = \Omega(f,P) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0$ (т.к. $f \in R(\overline{I})$)

$\Rightarrow \Omega(J_H, P_i) \xrightarrow[d(P)\to 0]{} 0 \Rightarrow J_H \in R(\overline{I}^m)$

3) Кроме того, переход в (6) к $\lim\limits_{d(P)\to 0}$ даёт: $J \leftarrow s(f,P) \le s(J_H) \le S(J_H) \le S(f,P) \to J$

$\Rightarrow \int\limits_{\overline{I}^m} J_H(x)\,dx = \lim\limits_{d(P)\to 0} S(J_H) = \lim\limits_{d(P)\to 0} s(J_H) = J \Rightarrow$ (1), (2) АНАЛОГИЧНО ◀

$$\int_{\bar I} f(x,y)\,dx\,dy \overset{?}{=} \int_{\bar I^m} dx \int_{\bar I^n} f(x,y)\,dy \qquad (8)$$

Следствие] выполнены условия [—|] $\Rightarrow \exists\, J(x) := \int_{\bar I^n} f(x,y)\,dy$ почти всюду в $\bar I^m$ (9)

▷ 1) Пусть $B := \{x \in \bar I^m \,/\, J_B(x) > J_H(x)\}$

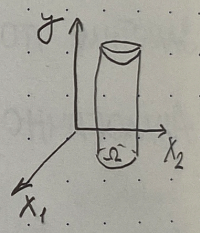
Имеем: (из [—|]) $J_H, J_B \in R(\bar I^m)$ (заметим, что $J_B - J_H \geqslant 0$ на $\bar I^m$), и, кроме того, $\int_{\bar I^m} (J_B - J_H)(x)\,dx = 0 \overset{\text{§2,п.3, [—3]}}{\Rightarrow} \mu(B) = 0$

2) Пусть $x \in \bar I^m \setminus B$. Тогда $J_B(x) = J_H(x) \overset{\text{[—кр. Дарбу]}}{\Rightarrow} \exists J(x) = \int_{\bar I^n} f(x,y)\,dy \Rightarrow (9)$ △

Замечание 1) $f \in R(\bar I)$ и $\exists \int_{\bar I^n} f(x,y)\,dy$, $\forall x \in \bar I^m \setminus B$, где $|B| = 0 \Rightarrow (8)$

2) $f \in R(\bar I) \overset{\text{б.г.}}{\not\Rightarrow} (8)$, Камынин, стр. 319

[—| Фубини для цилиндроидов



$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω - ограничено и измеримо,

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x),\ x \in \mathring{\Omega}\}$, $\varphi_i \in C(\bar\Omega)$, $i = 1,2$

и пусть $f \in C(\bar A) \Rightarrow f \in R(\bar A)$, причём

$$\int_{\bar A} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\bar\Omega} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (10)$$

▶ 1) Д-м, что A - измеримо в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $f \in R(A)$

Имеем: $\exists [c,d] \,/\, c \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant d$, $\forall x \in \bar\Omega \Rightarrow \partial A \subset \{\underbrace{\Gamma(\varphi_1, \Omega) \cup \Gamma(\varphi_2, \Omega)}_{\text{крышки}} \cup \underbrace{(\partial\Omega \times [c,d])}_{\mu(\cdot)=0}\}$ — [—|Сарда]

Проверим, что $\mu(\partial\Omega \times [c,d]) = 0$:

по усл., $\mu(\partial\Omega) = 0 \Rightarrow |\partial\Omega| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \{\bar I^n_k,\ k = \overline{1,\ell}\} \,/\, \partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} \bar I^n_k$,

$\sum_1^{\ell} |\bar I^n_k| < \frac{\varepsilon}{d-c} \Rightarrow \partial\Omega \times [c,d] \subset \sum_{k=1}^{\ell} \underbrace{(\bar I^n_k \times [c,d])}_{=:\,\bar I^{n+1}_k}$, причём $\sum_{k=1}^{\ell} |\bar I^{n+1}_k| < \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon$

$\Rightarrow v(\partial\Omega \times [c,d]) = 0 \Rightarrow \mu(\partial\Omega \times [c,d]) = 0 \Rightarrow \mu(\partial A) = 0 \Rightarrow A$ - измеримо

$\overset{\text{[—кр. Лебега]}}{\Rightarrow} f \in R(A)$

2) Положим $A(x) := \begin{cases} y \in \mathbb{R} \,/\, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), & \text{если } x \in \bar\Omega, \\ \varnothing, & \text{если } x \notin \bar\Omega \end{cases}$

Тогда $\chi_A(x,y) = \chi_{\bar\Omega}(x)\cdot\chi_{A(x)}(y)$ (11)

Пусть $\Omega \subset \bar I^m$. Тогда по Фубини для брусов $\Rightarrow \int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\bar I^n\times[c,d]} \chi_A f(x,y)\,dx\,dy =$

$\overset{\text{зам. 1}}{=}\overset{(11)}{=} \int\limits_{\bar I^m} \chi_{\bar\Omega}(x)\,dx \underbrace{\int\limits_c^d \chi_{A(x)}(y)\cdot f(x,y)\,dy}_{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy} = \int\limits_{\bar\Omega} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \Rightarrow$ (10) ◀

Лекция 14
15/04 д.о.

§4: Замена переменных в кратном интеграле

Напоминание Пусть $\Omega_t \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$, $\psi: \Omega_x \to \mathbb{R}^k$, причём $\varphi \in D(t^\circ)$, $t^\circ \in \Omega_t$; $\psi \in D(x^\circ)$, $x^\circ = \varphi(t^\circ) \in \Omega_x$

$\Rightarrow \psi\circ\varphi \in D(t^\circ)$ и справедливо $(\psi\circ\varphi)'(t^\circ) = \psi'(x^\circ)\varphi'(t^\circ)$, где

$$\psi' := D\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\psi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{k\times n}, \quad \varphi' := D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Утв. Пусть $\Omega_t, \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ - диффеоморфизм

$\Rightarrow |\varphi'(t)| := \det\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \Omega_t$

▷ $(\varphi^{-1}\circ\varphi)(E) = E$ - единичная матрица $\Rightarrow 1 = |(\varphi^{-1}\circ\varphi)'(t)| =$

$(\varphi^{-1}\circ\varphi)(t) = t$, $t \in \Omega_t$ $= |(\varphi^{-1})'(\varphi(t))|\cdot|\varphi'(t)|$ ◁

Пункт 1 Замена переменной в одномерном интеграле Римана

1 из сем. II Пусть $\varphi \in D[\alpha,\beta]$, $\varphi' \in R[\alpha,\beta]$, $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$, $\varphi \nearrow (\searrow)$ на $[\alpha,\beta]$, причём $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ ($\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$), $f \in R[a,b] \Rightarrow (f\circ\varphi)\cdot\varphi' \in R[\alpha,\beta]$, справедливо также

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \quad \left(= \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right) \quad (1)$$

2 Пусть $\bar I_t, \bar I_x \subset \mathbb{R}$, $\varphi: \bar I_t \to \bar I_x$ - диффеоморфизм, $f \in R(\bar I_x)$

$\Rightarrow (f\circ\varphi)|\varphi'| \in R(\bar I_t)$, причём $\int\limits_{\bar I_x} f(x)\,dx = \int\limits_{\bar I_t} (f\circ\varphi)|\varphi'(t)|\,dt$ (2)

▶ $\forall$ усл. [—11] выполнены, причём $\varphi' > 0\ (<0)$ на $\overline{I}_t \Rightarrow \varphi \uparrow\uparrow (\downarrow\downarrow)$ на $\overline{I}_t$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot|\varphi'(t)|dt = \begin{cases} \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)dt, & \text{если } \varphi \uparrow\uparrow \\ -\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi'(t)dt, & \text{если } \varphi \downarrow\downarrow \end{cases}$$ ◀

[—12'] Верно для нижних $\int$-лов, Зорич-II, стр. 168

Лемма Ω_t, Ω_x – открытые, огр. $\subset \mathbb{R}^n$

$\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – диффеоморфизм

Тогда: 1) $A \subset \Omega_t$, $\mu(A)=0 \Rightarrow \mu(\varphi(A))=0$

2) $A \subset \overline{A} \subset \Omega_t$, $|A|=0 \Rightarrow |\varphi(A)|=0$

3) A-измеримо, $A \subset \overline{A} \subset \Omega_t \Rightarrow \varphi(A)$ – измеримо

▷ 1) Верно (Д-но раньше, т.к. $\varphi \in C^1$, а она вообще диффеоморфизм)

2) $\exists\ |A|=0$, $\overline{A} \subset \Omega_t \Rightarrow |\overline{A}|=0 \Rightarrow \mu(\overline{A})=0 \Rightarrow \mu(\varphi(\overline{A}))=0$ (в силу 1))

Но $\overline{A}$ – огр, замкнуто в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A}$ – компакт $\Rightarrow \varphi(\overline{A})$ – компакт $\Rightarrow |\varphi(\overline{A})|=0$

$\Rightarrow |\varphi(A)|=0$

3) $A \subset \overline{A} \subset \Omega_t$, A-измеримо $\Rightarrow |\partial A|=0$. Но $\varphi: \overline{A} \to \varphi(\overline{A})$,

$\varphi(\partial A) = \partial(\varphi(A))$, т.к. $\varphi(\mathring{A}) = (\varphi(A))^\circ$; $\overset{2)}{\Rightarrow} |\partial(\varphi(A))|=0$ ◁

Опр Пусть $\Omega_t, \Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ – открытые множества.

Отображение $\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ называется **простейшим диффеоморфизмом**, если:

1) φ – диффеоморфизм

2) $\varphi_1(t) = t_1$

$\vdots$

$\varphi_{k-1}(t) = t_{k-1}$

$\varphi_k : t \in \Omega_t \to \varphi_k(t) \in \Omega_x$

$\varphi_{k+1}(t) = t_{k+1}$

$\vdots$

$\varphi_n(t) = t_n$

Замечание В случае этого Опр, $\det D\varphi(t) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_k}$

Пункт 2. Замена переменной в случае простейшего диффеоморфизма

Лемма 1 Пусть B_t - открытый шар в $\mathbb{R}^n$, Ω_x - откр., огр., $\subset \mathbb{R}^n$

$\varphi: B_t \to \Omega_x$ - простейший диффеом., $f \in R(\Omega_x)$

Тогда $(f\circ\varphi)\,|\det D\varphi| \in R(B_t)$, причём $\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{B_t} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|(t)dt$ (1)

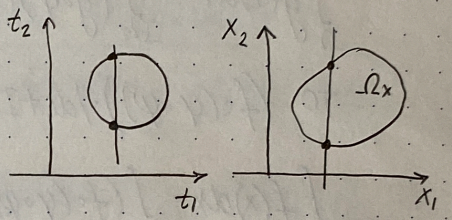
▶ Б.о.о., считаем, что $k=n$.

1) Имеем: $D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1} & \dots & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix} \Rightarrow \det D\varphi = \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n}$

2) Обозн.: $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $t' = (t_1, \dots, t_{n-1})$

Положим $\Omega_{x_n}(\bar{x}') := \{(x', x_n) \in \Omega_x \,/\, x' = \bar{x}'\}$ — заморожено

$B_{t_n}(\bar{t}') := \{(t', t_n) \in B_t \,/\, t' = \bar{t}'\}$



Это - одномерные сечения Ω_x и B_t прямыми, $\| x_n$ и t_n соотв.

Заметим, что $\Omega_{x_n}(\bar{x}') = \varphi(B_{t_n}(\bar{t}'))$

3) Ω_x - огр. $\Rightarrow$ $\exists$ брус $\bar{I}_x \supset \Omega_x$, $\bar{I}_x = \bar{I}^{n-1} \times \bar{I}_{x_n}$

B_t - огр. $\Rightarrow$ $\exists$ брус $\bar{I}_t \supset B_t$, $\bar{I}_t = \bar{I}^{n-1} \times \bar{I}_{t_n}$

Тогда $\int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{\bar{I}_x} f\cdot\chi_{\Omega_x}(x)dx = \int\limits_{\bar{I}^{n-1}} dx' \underbrace{\int\limits_{\bar{I}_{x_n}} f(x', x_n)\,\chi_{\Omega_x}(x', x_n)dx_n}_{\text{нижний инт-л Дарбу}} =$ (Фубини)

$= \int\limits_{\bar{I}^{n-1}} dx' \underbrace{\int\limits_{\bar{\Omega}_{x_n}(x')} f(x', x_n)\,\chi_{\Omega_x}(x', x_n)dx_n}_{\text{нижний инт-л}} = \int\limits_{\bar{I}^{n-1}} dt' \underbrace{\int\limits_{\bar{\Omega}_{x_n}(t')\text{-отрезок}} f(t', x_n)\,\chi_{\Omega_x}(t', x_n)dx_n}_{\text{нижний инт-л}} =$

$= \int\limits_{\bar{I}^{n-1}} dt' \int\limits_{\bar{B}_{t_n}(t')} f(t', \varphi_n(t', t_n))\cdot\chi_{\Omega_t}(t', \varphi_n(t', t_n))\cdot\left|\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n}[t', t_n)\right| dt_n =$

$= \int\limits_{\bar{I}^{n-1}} dt' \int\limits_{\bar{I}_{t_n}} f(..)\,\chi_{\Omega_t}(..)\cdot\left|\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_n}(..)\right| dt_n \overset{\text{Фубини}}{=} \int\limits_{\bar{I}_t} (f\circ\varphi)\cdot|D\varphi|(t)\,\chi_{\Omega_t}(t)dt =$

$= \int\limits_{\Omega_t} (f\circ\varphi)\,|D\varphi|(t)\,dt$ ◀

Пункт 3. Замена переменной для финитной функции

Лекция 15 **Лемма 1** $\Omega_\tau, \Omega_t, \Omega_x$ – открытые, огр. мн-ва в $\mathbb{R}^n$

20/04 д.о. Даны отобр-я $\psi: \Omega_\tau \to \Omega_t$, $\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – два диффеом-ма

Тогда если

1) $\forall f \in R(\Omega_x)$, $(f\circ\varphi)\cdot|\det D\varphi| \in R(\Omega_t)$, причём

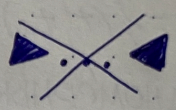
$$\int_{\Omega_x} f\,dx = \int_{\Omega_t} (f\circ\varphi)(t)\,|\det D\varphi(t)|\,dt$$

2) $\forall g \in R(\Omega_t)$, $(g\circ\psi)|\det D\psi| \in R(\Omega_\tau)$, причём

$$\int_{\Omega} g(t)\,dt = \int_{\Omega_\tau} (g\circ\psi)(\tau)\,|\det D\psi(\tau)|\,d\tau,$$

то $(f\circ(\varphi\circ\psi))\cdot|\det D(\varphi\circ\psi)| \in R(\Omega_\tau)$, причём

$$\int_{\Omega_x} f(x)\,dx = \int_{\Omega_\tau} (f\circ(\varphi\circ\psi))(t)\cdot|\det D(\varphi\circ\psi)(\tau)|\,d\tau$$



Зорич стр. 171

Опр. Пусть $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω-откр. в $\mathbb{R}^n$, $A := \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$

Тогда: 1) f – финитна $\overset{\text{def}}{\iff} \bar{A} \subset \Omega$ $(\Rightarrow \bar{A} \subset\subset \Omega)$

2) Множество A называется носителем функции f и обозн. $\bar{A} =: \operatorname{supp} f$

Лемма 2 Пусть Ω_t, Ω_x – открытые, огр. мн-ва в $\mathbb{R}^n$

$\varphi: \Omega_t \to \Omega_x$ – диффеом., $f \in R(\Omega_x)$, f – финитна

$\Rightarrow g := (f\circ\varphi)\cdot|\det D\varphi| \in R(\Omega_t)$

▷ Пусть $\bar{I}_t \supset \Omega_t$. Дост. д-ть, что $\mu(E(g\cdot\chi_{\Omega_t}; \bar{I}_t)) = 0$ (1)

1) Положим $K_x := \operatorname{supp} f \subset \Omega_x$ и $K_t := \operatorname{supp} g$

(компакт. (замкн. и огр.))

Д-м, что $K_t = \varphi^{-1}(K_x)$ (2)

Всё д., $A_x := \{x \in \Omega_x \mid f(x) \neq 0\}$, $A_t := \{t \in \Omega_t \mid g(t) \neq 0\}$

Тогда: $t \in A_t \iff g(t) \neq 0 \iff (f\circ\varphi)(t) = f(\varphi(t)) \neq 0 \iff \varphi(t) \in A_x \iff$

$t \in \varphi^{-1}(A_x) \Rightarrow$ (2).

2) (2) $\Rightarrow K_t \subset \Omega_t \Rightarrow K_t \subset\subset \Omega_t$. Поэтому для $\bar{I}_t \supset \Omega_t$ имеем:

$$E(g\chi_{\Omega_t}, \underline{I}_t) = E(g, K_t) \overset{(2)}{=} \varphi^{-1}(E(f, K_x)) = \varphi^{-1}(E(f\chi_{\Omega_x}, \underline{I}_x))$$

$\Rightarrow$ т.к. $\mu(E(f\chi_{\Omega_x}, \underline{I}_x)) = 0$ ($f \in R(\Omega_x)$), $\mu(\varphi^{-1}(E(f\chi_{\Omega_x}, \underline{I}_x))) = 0$ где $\underline{I}_x \supset \Omega_x$ $\Rightarrow$ (1) ◁

Лемма 3 (разложение диффеоморфизма в композицию простейших)

Пусть Ω - откр в $\mathbb{R}^n$, $\varphi: \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ - диффеоморфизм

$\Rightarrow \forall x \in \Omega \ \exists B(x, \delta(x)) \subset \Omega$ / $\varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_m$ в $B(x, \delta(x))$

Зорич I стр 589

Замена переменной для финитной функции

Пусть выполнены усл Леммы 2 $\Rightarrow \int\limits_{\Omega_x} f(x)dx = \int\limits_{\Omega_t} g(t)dt$ (3)

▶ 1) Пусть $K_t := \operatorname{supp} g \overset{(2)}{\Rightarrow} K_t$ - компакт, $K_t \subset\subset \Omega_t$

Имеем $\overset{\text{Лемма 3}}{\Rightarrow} \forall t \in K_t \ \exists B(t, \delta(t)) \subset \Omega_t$ / $\varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_m$ в $B(t, \delta(t))$

Тогда $K_t \subset \bigcup\limits_{t \in K_t} B\left(t, \frac{\delta(t)}{2}\right) \Rightarrow$ т.к. K_t - компакт, $\exists$ конечное п/покр

$\left\{B_e := B\left(t_e, \frac{\delta(t_e)}{2}\right), e = \overline{1,L}\right\}$ / $K_t \subset \bigcup\limits_{e=1}^{L} B_e$. Положим $\delta := \min\limits_{e=\overline{1,L}} \frac{\delta(t_e)}{2}$

Рассм произв брус $\underline{I}$ / $\underline{I} \cap K_t \neq 0$, $d(\underline{I}) < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

Тогда утв., что $\underline{I} \subset B_{e_k}$ для некоторого $e_k \in \{1, \dots, L\}$ (4)

Возьмем, пусть $t^\circ \in \underline{I} \cap K_t \cap B_{e_k}$ для некоторого e_k

и пусть $t \in \underline{I}$ - произв. $\Rightarrow |t - t^\circ| = \sqrt{(t_1 - t_1^\circ)^2 + \dots} \leq \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots} \leq$

$\leq d(\underline{I})\sqrt{n} < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} \leq \frac{\delta_{e_k}}{2} \Rightarrow |t - t_e| < \delta_{e_k} \Rightarrow t \in B_{e_k} \Rightarrow$ (4)

2) Пусть $\underline{I}_t \supset \Omega_t$, P - произв. разб. $\underline{I}_t$ с $d(P) < \min\left\{\frac{\delta}{\sqrt{n}}, d\right\}$, где

$d := \rho(K_t, \partial\Omega_t) = \min\limits_{\substack{t_1 \in K_t \\ t_2 \in \partial\Omega_t}} |t_1 - t_2|$

Имеем: $\underline{I}_t = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \underline{I}_k \Rightarrow$ по Лемме 2 $\exists \int\limits_{\Omega_i} g(t)dt = \int\limits_{\underline{I}_t} g\chi_{\Omega_t} dt =$

$= \sum\limits_{s=1}^{S} \int\limits_{\underline{I}_{k_s}} g\chi_{\Omega_t} dt$, где $\underline{I}_{k_s} \cap K_t \neq \emptyset$

Но $\underset{\text{измер.}}{I_{ks}} \subset \Omega_t \Rightarrow \varphi(I_{ks})$ - измеримо и $\subset \Omega_x$

Положим $A := \bigcup_{s=1}^{S} \varphi(I_{ks})$ - измеримо, компакт; причём

$K_x := \underbrace{\operatorname{supp} f}_{=\varphi(K_t) \text{ по д-ву леммы 2}} \subset A \subset\subset \Omega_x$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_x} f\,dx = \int_{I_x \supset \Omega_x} f \chi_{\Omega_x}\,dx = \int_A f \chi_{\Omega_x}\,dx + \int_{I_x \setminus A} \overset{0}{\ldots}\,dx = \sum_{s=1}^{S} \int_{\varphi(I_{ks})} f \cdot \chi_{\Omega_x}\,dx =$$

$$\overset{\text{лемма 3}}{=} \sum_{s=1}^{S} \int_{I_{ks}} g\,dt = \int_{\Omega_t} g(t)\,dt \quad \blacksquare$$

Лекция 16
27/04 д.о.

Пункт 4 Замена переменной в общем случае

⊣ Пусть D_t, D_x - откр., огр., измеримые м-ва в $\mathbb{R}^n$

$\varphi: D_t \to D_x$ - диффеоморфизм, $\Omega_t \subset \overline{\Omega}_t \subset D_t$, $\Omega_x \subset \overline{\Omega}_x \subset D_x$

Ω_t и Ω_x - измеримы, $f \in R(\Omega_x) \Rightarrow (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi| \in R(\Omega_t)$,

причём $\int_{\Omega_x} f(x)\,dx = \int_{\Omega_t} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|(t)\,dt$

▶ Имеем: $\int_{\Omega_x} f\,dx = \int_{\Omega_x} f\chi_{\Omega_x}\,dx = \int_{D_x} \underbrace{f\chi_{\Omega_x}}_{\text{финитна в } D_x}\,dx - \underbrace{\int_{D_x\setminus\Omega_x} (..)\,dx}_{=0} \overset{\dashv,\ \text{п.3}}{=}$

$$= \int_{D_t} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\,\chi_{\Omega_t}\,dt = \Big(\int_{\Omega_t} + \int_{\underbrace{D_t\setminus\Omega_t}_{=0}}\Big)(f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\,\chi_{\Omega_t}\,dt = \int (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\,dt \quad \blacksquare$$

(!) Пренебр. мн-ва: полярн. с.к., сф. — Зорич, стр. 174

§5: Несобственные кратные интегралы

Опр. 1 Пусть G - открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Система $\{K_\ell, \ell \in \mathbb{N}\}$ называется **исчерпывающей системой компактных мн-в** для G („исчерпание" G), если:

1) K_ℓ - компакт, $\forall \ell$;
2) $K_\ell \subset \mathring{K}_{\ell+1} \subset K_{\ell+1}$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$
3) $G = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathring{K}_\ell$

Замечание $\forall G \subset \mathbb{R}^n$ / G-открыто, $\exists$ исчерпание (компактами)

$G = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_\ell$, где $K_\ell := \{x \in G \,/\, \rho(x, \partial G) \geq \frac{1}{\ell},\ |x| \leq \ell\}$

Лемма Пусть $\{K_\ell\}$ - исчерпание для G (откр.) и $K \subset G$, K - компакт

$\Rightarrow \exists \ell_0 \,/\, K \subset \overset{\circ}{K}_{\ell_0} \subset K_{\ell_0}$

$\triangleright$ $K \subset G = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_\ell$ ($\cup$ откр. мн-ва) $\Rightarrow \{\overset{\circ}{K}_\ell,\ \ell \in \mathbb{N}\}$ - откр. покр. K. $\Rightarrow \exists$ п/покр $K \subset \bigcup_{m=1}^{M} \overset{\circ}{K}_{\ell_m}$,

причём $\overset{\circ}{K}_{\ell_1} \subset \overset{\circ}{K}_{\ell_2} \subset \ldots \subset \overset{\circ}{K}_{\ell_m} \Rightarrow K \subset K_{\ell_m}$, так что $\ell_0 = \ell_m$ $\triangleleft$

Напоминание f локально огр. на G ($f \in B_{loc}(G)$) $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall A \subset G,\ f \in B(A)$ ($A(x)$)

Опр 2 $\exists f: G \to \mathbb{R}$, G-откр., $f \in B_{loc}(G)$, $\mu(E(f, G)) = 0$

Тогда f - интегрируема (в несобств. см.) на $G \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall$ исчерпывающей системы измеримых компактов $\{K_\ell\}$ для G

$\exists \lim_{\ell \to \infty} \int_{K_\ell} f(x)\,dx =: \int_G f(x)\,dx$, где $\lim$ не зависит от выбора $\{K_\ell\}$.

Замечание 1) Опр 2 корректно, т.к. $f \in R(K_\ell)$ $\forall \ell$ (f - непр. почти всюду на K_ℓ, K_ℓ - измеримо), $f \in B(K_\ell)$

$f \in B(K_\ell)$ - в с.у., $\forall x \in K_\ell$ $\exists$ откр. $A(x) \,/\, f \in B(A(x))$

Тогда $K_\ell \subset \bigcup_{x \in K_\ell} A(x) \Rightarrow \exists$ п/покр. $K_\ell \subset \bigcup_{k=1}^{N} A(x_k)$ $\overset{\text{+кр. Лебега}}{\Rightarrow}$ $f \in R(K_\ell)$

2) $\exists f \geq 0$ на $G \Rightarrow \underbrace{\int_G f\,dx}_{\text{если } \exists} = \sup_\ell \int_{K_\ell} f\,dx$

В с.у., $d_\ell := \int_{K_\ell} f\,dx$, $\ell \in \mathbb{N}$. Имеем: $d_\ell \uparrow$, $\exists \lim_{\ell \to \infty} d_\ell = \sup_{\ell \in \mathbb{N}} d_\ell$ (+Вейер)

3) $\exists G$-откр., огр., измеримо, $f \in B(G)$, $\mu(E(f)) = 0$ (f непр. п.в. на G)

Тогда по +кр. Лебега $f \in R(G) \Rightarrow \exists \lim_{\ell \to \infty} \int_{K_\ell} f\,dx = \int_G f\,dx$ $\forall$ исчерпания измеримыми комп. $\{K_\ell\} \subset G$

$\triangleright\!\!\not\!\!\triangleleft$ см. Зорич, стр. 181

+1 Достаточное усл. интегрируемости в несобственном см.

$\exists f: G \to \mathbb{R}$, G-откр., $f \in B_{loc}(G)$, $\mu(E(f, G)) = 0$,

$\exists \{\hat{K}_\ell, \ell \in \mathbb{N}\}$ – исчерпание измеримыми комп. / $\exists \lim\limits_{\ell\to\infty} \int\limits_{\hat{K}_\ell} |f|\,dx =: J \in \mathbb{R}$

Тогда: 1) $|f|$ интегр. на G в несобств. см., причём $\int\limits_G |f|\,dx = J$

2) $\exists \lim\limits_{\ell\to\infty} \int\limits_{K_\ell} f\,dx =: \int\limits_G f\,dx$, где $\lim$ не зависит от выбора $\{K_\ell\}$, т.е. f интегр. в несобств. см. на G

▶ 1) $\exists \{K_s\}$ – произв. исчерпание $\overset{\text{изм}}{\text{комп.}}$ для G

$\overset{\text{лемма}}{\Longrightarrow} \exists \ell(s)\ \forall s \in \mathbb{N} / K_s \subset \hat{K}_{\ell(s)} \Rightarrow \beta_s := \int\limits_{K_s} |f|\,dx \leqslant \int\limits_{\hat{K}_{\ell(s)}} |f|\,dx \leqslant \sup\limits_{\ell} \int\limits_{\hat{K}_\ell} |f|\,dx = J \quad \forall s \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sup\limits_s \beta_s = \sup\limits_s \int\limits_{K_s} |f|\,dx \leqslant J$, $\beta_s \uparrow \overset{\text{Вейер.}}{\Longrightarrow} J \geqslant \sup\limits_{K_s} \int |f|\,dx$ ($\Rightarrow \beta_s$ – огр)

Аналогично, $J = \sup\limits_\ell \int\limits_{\hat{K}_\ell} |f|\,dx \leqslant \sup\limits_s \int\limits_{K_s} |f|\,dx$ (Вейер.)

В итоге: $J \leqslant \sup\limits_s \int\limits_{K_s} |f|\,dx \leqslant J$. Но $\{K_s\}$ – произв. исч. изм. комп.

$= \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_{K_s} |f|\,dx$

$\Rightarrow J = \int\limits_G |f|\,dx$

2) Положим $f_1 := |f|$, $f_2 := |f| - f$. Тогда $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \geqslant 0$

Имеем: • $\overset{\text{усл}}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{\ell\to\infty} \int\limits_{\hat{K}_\ell} f_1\,dx = J$

• $0 \leqslant f_2 \leqslant 2|f| \Rightarrow 0 \leqslant \int\limits_{\hat{K}_\ell} f_2\,dx \leqslant 2J \Rightarrow \exists \lim\limits_{\ell\to\infty} \int\limits_{K_\ell} f_2 = J^*$

Пусть $\{K_s\}$ – произв. исч. измер. комп. G.

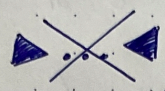
Тогда $\int\limits_{K_s} f\,dx = \underbrace{\int\limits_{K_s} f_1}_{\to J} - \underbrace{\int\limits_{K_s} f_2}_{\to J^*} \overset{1)}{\Rightarrow} \exists \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_{K_s} f\,dx = J - J^*$ $\forall$ исч. изм. комп. $\{K_s\}$

$\Rightarrow \exists \int\limits_G f\,dx$

Следствие Пусть $n=1$, $f \geqslant 0$ на $[a; +\infty)$,

$\exists \int\limits_a^{+\infty} f\,dx$ в см. семестра II $\Rightarrow \exists \int\limits_a^{+\infty} f\,dx$ в см. Опр. 2

$\boxed{\dashv 12}$ $\exists f: \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{G}$ - откр, $f \in B_{loc}(\mathbb{G})$, $\mu(E(f,\mathbb{G}))=0$, причём $\forall \{K_s\}$ - исч. изм. комп-ми для $\mathbb{G}$ $\exists \lim\limits_{s\to\infty} \int\limits_{K_s} f\,dx =: \int\limits_{\mathbb{G}} f\,dx$

$\Rightarrow \exists \int\limits_{\mathbb{G}} |f|\,dx$  Камынин, Прил. 1

Замечание Пусть $n=1$, $\exists \int\limits_a^{+\infty} f\,dx$ в см. семестра II $\overset{в.г.}{\not\Rightarrow}$ $\exists \int\limits_a^{+\infty} f\,dx$ в см. Опр. 2

Мажорантный пр-к, замена переменных - Зорич.

Лекция 17
29/04 д.о.

Замечание (к замене переменных)

$\boxed{\dashv 10 \text{ замене переменных в кр. } \int\text{-ле}}$ $\Rightarrow$ объём мн-ва A, $|A| := \int\limits_A \chi_A\,dx$ не зависит от выбора с.к.

Часть 6

Криволинейные и поверхностные интегралы

Глава 1 Криволинейные интегралы

§1: Криволинейный интеграл I рода

Пункт 1 Определение

Напоминание Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ - непрер, простая кривая на пл-ти: $\Gamma := \{x=\varphi(t), y=\psi(t), t_0 \le t \le T\}$, где $\varphi, \psi \in C[t_0, T]$ и, кроме того, $(t_1 \ne t_2) \Rightarrow (\varphi(t_1), \psi(t_1)) \ne (\varphi(t_2), \psi(t_2))$, кроме, м.б., если $t_1 = t_0$ и $t_2 = T$

Длина кривой $(s_\Gamma) := \sup P_L$, где P_L - периметр вписанной в Γ ломаной L.

Γ - спрямляемая, если $s_\Gamma < \infty$

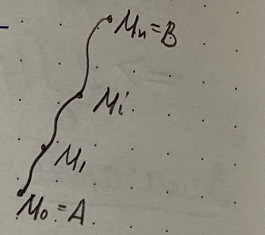
Дост. усл. спрямляемости: $\varphi, \psi \in C^1[t_0, T]$, то (1)

Γ - спрямляемая, причём $s_\Gamma = \int\limits_{t_0}^{T} \underbrace{\sqrt{|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2}\,dt}_{ds}$

Лемма Кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ - спрямляема $\Rightarrow S_\Gamma = 0$ (мера Жордана Г) „объём"

▷ Разобьём Г точками $M_0 = A, M_1, \dots, M_n = B$,

так что $s(M_{i-1}, M_i) = \frac{l}{n}$, $i = \overline{1,n}$, где $l = s_\Gamma$ - длина Г

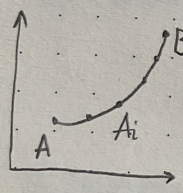


Тогда $\forall M \in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, $i = \overline{1,n}$, $\rho(M, M_i) \le \frac{l}{n}$

$\Rightarrow M \in K_i \Rightarrow \Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, причём $\sum_{i=1}^{n} |K_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{4l^2}{n^2} = \frac{4l^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow S_\Gamma = 0$ ◁

Следствие $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω - огр., $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых кривых $\Rightarrow \Omega$ - измеримо по Жордану (при $n=2$ - „квадрируема")

Опр. На пл-ти $\mathbb{R}^2$ с прямоуг. с.к. xOy рассм. спрямляемую кривую $\Gamma = \{(x = \varphi(t), y = \psi(t), t_0 \le t \le T\}$, где $\varphi, \psi \in C[t_0, T]$. Пусть $A := (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $B := (\varphi(T), \psi(T))$. Пусть задана $f : \overset{\frown}{AB} \to \mathbb{R}$



1) Выберем на $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ точки $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$

Пусть $P = \{A_k, k = \overline{0,n}\}$ - соотв. **разбиение** дуги $\overset{\frown}{AB}$

Обозн. $l_{\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}} =: \Delta s_k$ - длина дуги $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$

2) $\forall k = \overline{1,n}$ фикс. произвольно точку $M_k = M_k(x_k, y_k) \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, и полагаем $M := \{M_k, k = \overline{1,n}\}$. Тогда (P, M) - **размеченное разбиение** дуги $\overset{\frown}{AB}$

3) **Интегральная сумма** вдоль кривой $\overset{\frown}{AB}$, соотв. разм. разб. (P, M) : $\sigma(P, M) := \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \Delta s_k$

Опр. Пусть $\exists \lim_{d(P)\to 0} \sigma(P, M) =: I \in \mathbb{R}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ |\sigma(P,M) - I| < \varepsilon$ $\forall (P, M)$ с $d(P) < \delta$.

Тогда I называется **криволинейным интегралом I рода** вдоль кривой (дуги) $\overset{\frown}{AB}$. Обозн.: $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,dl\,s$

(если $A = B$, то пишут $I = \oint_{\overset{\frown}{AB}} f\,dl\,s$)

Замечание Инт-л I рода не зависит от напр. обхода кривой: $\int_{\overset{\frown}{AB}} f\,dl\,s = \int_{\overset{\frown}{BA}} f\,dl\,s$

(П) Функция $\rho: M \in \overset{\frown}{AB} \to \rho(M) \in \mathbb{R}$ задает плотность распределения массы вдоль кривой $\overset{\frown}{AB}$

$\forall$ разб $P = (A_0, \dots, A_n)$ дуги $\overset{\frown}{AB}$ полагаем $m(\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}) =: m_k \approx \rho(M_k)\Delta S_k$, где $M_k \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$

Тогда $m(\overset{\frown}{AB}) =: m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} m_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(M_k)\Delta S_k$

Погрешность такого равенства тем меньше, чем "мельче" разб P, т.е. чем меньше $d(P)$ $\Rightarrow$ естественно опр-ть массу дуги $\overset{\frown}{AB}$

$$m := \lim_{d(P)} \sum_{k=1}^{n} \rho(M_k)\Delta S_k = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(M)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x,y)\,ds$$

Аналогично вводится опр. криволинейного интеграла вдоль пространственной кривой (в $\mathbb{R}^3$) (непр, простой дуги)

$\Gamma := \{ x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t_0 \le t \le T \} = \overset{\frown}{AB}$

Пусть дана $f: \overset{\frown}{AB} \to \mathbb{R}$

Разб $P = \{A_0, \dots, A_n\}$ кривой $\overset{\frown}{AB}$, выбираем $M = \{M_1, \dots, M_n\}$, где $M_k \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$. Составим инт сумму $\sigma(P,M) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta S_k$, где $\Delta S_k = S_{\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}}$

$d := \max \Delta S_k$. Тогда $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,ds := \lim\limits_{d \to 0} \sigma(f,P,M)$ (если $\lim \exists$)

(П) Масса простой, непр, спрямляемой кривой AB:

$$m := \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(M)\,ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \rho(x,y,z)\,ds$$

Пункт 2 Вычисление криволинейного интеграла I рода

Пусть $\overset{\frown}{AB} \subset \mathbb{R}^2$ - простая, непр, спрямляемая кривая, $A \ne B$

$\varphi, \psi \in C^1[t_0, T]$, причём $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \ne 0$ (точка неособая)

Введем **натуральный параметр** кривой s - длин дуги $\overset{\frown}{AM}$, $M \in \overset{\frown}{AB}$, $0 \le s \le s_{\overset{\frown}{AB}}$. Заметим $s \uparrow\uparrow$

Тогда $\sigma(f,P,M)=\sum_{k=1}^{n} f(\underbrace{x_k,y_k}_{M_k})\Delta S_k=\sum_{k=1}^{n} f(x(\tilde{s}_k),y(\tilde{s}_k))\Delta S_k \longrightarrow$

$$\xrightarrow[d(P)\to 0]{} \underbrace{\int_0^{s_{\breve{AB}}} f(x(s),y(s))\,ds}_{=:I_1} = \underbrace{\int_{\breve{AB}} f\,ds}_{I_2} \qquad (1)$$

если этот lim $\exists$.

$\boxed{\text{—|}}$ Пусть $\breve{AB}$ – простая, непр., спрямляемая без особых точек, и $f\in C(\breve{AB}) \Rightarrow \exists \int_{\breve{AB}} f\,ds$

$\cancel{s\uparrow\uparrow}$

Итак, криволин. $\int$-л I рода сводится к опр. $\int$-лу ф-лой (1).

Но (1) не очень удобна, т.к. для параметризации кривой надо выбирать натуральный пар-р.

Пусть $\breve{AB}$ задана параметрически:

$$\breve{AB} := \begin{cases} x=x(t)=x(t(s)), \\ y=y(t)=y(t(s)) \end{cases} t_0\le t\le T \qquad (x,y\in C^1[t_0,T])$$

$s\uparrow\uparrow$

$(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$

$\Rightarrow \breve{AB}$ – спрямляемая, и для неё определён нат. параметр s.

$\begin{cases} x=x(s)=x(s(t)), \\ y=y(s)=y(s(t)) \end{cases}$ Заметим, что $s(t)=\int_0^t \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

$\exists\, s'(t)=\sqrt{\dots}$, $ds(t)=\sqrt{\dots}\,d$

Сделаем в (1) замену переменных $t=t(s)$

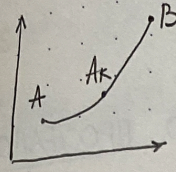
$$\Rightarrow \int_0^{s_{\breve{AB}}} f(x(s(t)),y(s(t)))\,ds = \int_{t_0}^{T} \hat{f}(x(t),y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Конечные точки A,B м.б. особыми, или $(x')^2+(y')^2=+\infty$

Лекция 18
04/05 д.о.

§2: Криволинейный интеграл II рода

Пункт 1 Определения



На плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной с.к. xOy рассм. спрямляемую, непрер., простую кривую $\overset{\frown}{AB}$

Пусть $\hat{P} = \{A_k, k=\overline{0,n}, A_0=A, A_n=B\}$ - произв. разб. дуги $\overset{\frown}{AB}$

$d(\hat{P}) := \max \underbrace{\Delta S_k}_{\text{длина дуги } \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}}$

и пусть $M = M_k(\underbrace{x_k, y_k}_{A_k}), k=\overline{1,n}$ - метка дуги $\overset{\frown}{AB}$

Составляем интегральную сумму $\sigma_1(P, \hat{P}, M) := \sum_1^n P(M_k)\Delta x_k$, где

$P: \overset{\frown}{AB} \to \mathbb{R}$ - функция

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

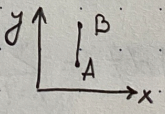
Опр. 1 Пусть $\exists \lim\limits_{d(\hat{P})\to 0} \sigma_1(P, \hat{P}, M) =: I_1$. Тогда I_1 называется **криволинейным интегралом II рода** (вдоль $\overset{\frown}{AB}$) от функции P по переменной x.

Обозн: $I_1 =: \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx$

Замечание 1) I_1 зависит от направления обхода дуги $\overset{\frown}{AB}$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx.$$

2) Если $\overset{\frown}{AB} \parallel Oy \Rightarrow I_1 = 0$



Пусть теперь $Q: \overset{\frown}{AB} \to \mathbb{R}$. Составляем инт. сумму

$\sigma_2(Q, \hat{P}, M) := \sum_1^n Q(M_k)\Delta y_k$, где $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$

Опр. 2 1) Пусть $\exists \lim\limits_{d(P)\to 0} \sigma_2(Q, \hat{P}, M) =: I_2$. Тогда I_2 называется **криволинейным интегралом II рода** (вдоль $\overset{\frown}{AB}$) от функции Q по переменной y.

Обозн. $I_2 =: \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q dy$

2) Сумма $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy := \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q dy$ наз. **криволин. инт. II рода** (вдоль AB) **общего вида**

Замечание $\int\limits_{\vec{BA}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\vec{AB}} P\,dx + Q\,dy$

Аналогично определяется криволин. $\int$-л II рода по пространств. кривой: $\int\limits_{\vec{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

Пункт 2. Вычисление интеграла II рода

Пусть задана кривая $\vec{AB} = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_0, T]$ – простая, непрер. кривая, причём $A = (x(t_0), y(t_0))$, $B = (x(T), y(T))$

Т $x, y \in C^1[t_0, T]$, $\vec{AB}$ – без особых точек; функции $P, Q \in C(\vec{AB})$

$\Rightarrow \exists \int\limits_{\vec{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{t_0}^{T} \{P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\}\,dt$

▶ Достаточно рассм. $\int\limits_{\vec{AB}} P(x, y)\,dx$; 1) Пусть $\hat{P} = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ – произв. разб. $\vec{AB}$, причём $A_k = (x(t_k), y(t_k))$, $t_n = T$.

Имеем: $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Выберем разметку $M = \{M_k \in \widetilde{A_{k-1}A_k}, k = \overline{1,n}\}$, где $M_k(x(\tau_k), y(\tau_k))$, $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$, $k = \overline{1,n}$.

Тогда: $\sigma_1(P, \hat{P}, M) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k))\,\underbrace{[x(t_k) - x(t_{k-1})]}_{=\Delta x_k} \overset{x \in C^1[t_0,T]}{=}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} P(x(\tau_k), y(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)\,dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(\tau_k), y(\tau_k))\,x'(t)\,dt$

2) Рассм. инт-л $J := \int\limits_{t_0}^{T} P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$

Имеем: $\sigma_1(P, \hat{P}, M) - J = \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [P(x(\tau_k), y(\tau_k)) - P(x(t), y(t))]\,x'(t)\,dt}_{=: \Delta}$

3) Оценим Δ: положим $F(t) := P(x(t), y(t))$

Тогда F – равн. непр. на $[t_0, T]$ (т.к. непр. на отрезке)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 /\ |F(t') - F(t'')| < \varepsilon$, $\forall t', t'' \in [t_0, T]$ при $|t' - t''| < \delta$ (1)

Пусть $s(t)$ – ф-ция длины дуги $\vec{AB}$, отсчитываемая от A – натур. пар-р.

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left[(x'(\lambda))^2+(y'(\lambda))^2\right]^{1/2}d\lambda,\quad t\in[t_0,T]$$

Имеем: $s\in C^1[t_0,T]$, $s\uparrow\uparrow \Rightarrow \exists$ обр. ф-ция $t=t(s)$, $s\in[0,L]$, где L – длина дуги $\breve{AB}$,

причём $t\in C^1[t_0,T]$.

Тогда $|t_k-t_{k-1}|=|t'(\bar{s}_k)|\,\Delta s_k \le K\Delta s_k \le K\,d(\hat{P})$, для некоторой постоянной K.
(точка, $\in[s_{k-1},s_k]$)

4) Пусть $\varepsilon>0$ произв., $\delta(\varepsilon)=\delta$ из (1). Пусть $d(\hat{P})<\frac{\delta}{K} \Rightarrow |t_k-t_{k-1}|<\delta$
$\Rightarrow |F(\tau_k)-F(t)|<\varepsilon$ для $t,\tau_k\in[t_{k-1},t_k]$ из (1).

5) Наконец, заметим, что $\exists C>0$ / $|x'(t)|\le C$, $\forall t\in[t_0,T]$.

В итоге, $|\Delta|\le\sum_{k=1}^{n}\varepsilon\cdot C\,(t_k-t_{k-1})=\varepsilon\cdot C\sum_{1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon C[T-t_0]$

$\Rightarrow \sigma_1\to J$ при $d(\hat{P})\to 0$ ◀

Замечание 1) Дост. считать что $(x'(t))^2+(y'(t))^2>0$ на $(0,T)$,
$x',y'\in C(0,T)\cap B(0,T)$

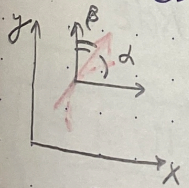
2) В ⊣ предполагалось, что параметризация кривой соотв. направлению обхода $\breve{AB}$, т.е. $A=(x(t_0),y(t_0))$, $B=(x(T),y(T))$

3) ⊣ переносится на случай пространственной кривой

4) ⊣ переносится на случай кусочно-непрерывной кривой, т.е. когда $x'(t),y'(t)$ – кус. непр.

Следствие (связь между ∫-лами I и II рода)

Пусть выполнены усл. ⊣ для $\breve{AB}$ и $t=s$ – натур. пар-р, $s\in[0,L]$.



Тогда $\begin{cases}x'(s)=\cos\alpha,\\ y'(s)=\cos\beta\end{cases}$, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора касательной прямой к $\breve{AB}=\Gamma$.

Тогда $\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=\int_0^L\left[P(x(s),y(s))\underbrace{x'(s)}_{\cos\alpha(s)}+Q(x(s),y(s))\underbrace{y'(s)}_{\cos\beta(s)}\right]ds=$

$\overset{8.1,\text{п.}2,\ \dashv}{=}\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds$ – инт-л I рода

Пункт 3 Свойства криволинейного интеграла II рода

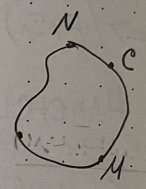
① $\int\limits_{\overrightarrow{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\overrightarrow{BA}} P\,dx + Q\,dy$

② Линейность

③ Аддитивность: $\overset{\frown}{AB}$ разбита, $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, $\exists \int\limits_{\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}} (..)$, тогда

$$\exists \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (...) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}}$$

④ $\int$-л II рода не зависит от выбора начальной точки



$$\int\limits_{AMCN} = \int\limits_{AMC} + \int\limits_{CNA} = \int\limits_{CNA} + \int\limits_{AMC} = \int\limits_{CNAM}$$

⑤ $\overset{\frown}{AB}$ – простая, непр., спрямляемая, $A=(x(t_0), y(t_0)), B=(x(T), y(T))$

$$\Rightarrow \int\limits_{\overrightarrow{AB}} dx = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} 1\cdot dx \overset{\text{см. б)}}{=} x(T)-x(t_0); \quad \int\limits_{\overrightarrow{AB}} dy = y(T)-y(t_0)$$

Пункт 4 Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Опр. Пусть D – область в $\mathbb{R}^3$ (открытое, связное мн-во) функции $P, Q, R \in C(D)$. Тогда говорят, что $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ (1) **не зависит от пути интегрирования**, если $\forall A, B \in D$, $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$, соединяющих т. A и B (имеющих общее начало A и конец B), $\int\limits_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

Лекция 19
11/05 д.о.

—О независимости кратного $\int$-ла от пути $\int$-я

D – область в $\mathbb{R}^3$, $P, Q, R \in C(D)$ (Γ – обозн. кус.-гл. кривая $\subset D$)

Тогда $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от пути интегрирования

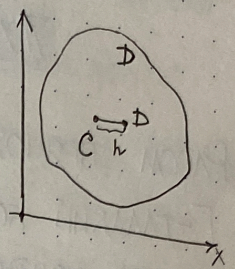
$\Leftrightarrow \exists$ ф-ция $U: D \to \mathbb{R}$ / $U \in D(D)$, $dU = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

⇒ Пусть $\int_\Gamma \dots$ не зависит от пути $\int$-я.

Фикс произв точку $A \in D$

и полагаем, $\forall C \in D$, $U(C) := \int_{\breve{AC}} P dx + Q dy + R dz$

Дост д-ть, что $\exists \frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial U}{\partial z} = R$



Рассм $\frac{\partial U}{\partial x}$, остальные - аналогично

Пусть $C = (x,y,z) \in D$ - произв ; $\exists$ шар $B(C,h) \subset D$ (D - открыто)

Рассм $\Delta U := U(x+h,y,z) - U(x,y,z) = \int_{\breve{CD}} P dx + \underbrace{Q dy + R dz}_{=0} = \int_x^{x+h} P(\xi,y,z) d\xi =$

по среднем

$= P(x+\Theta h, y, z) \cdot h$

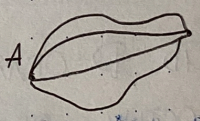
Поэтому $\frac{\Delta U}{h} = P(x+\Theta h, y, z) \to P(x,y,z)$ при $h \to 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial U}{\partial x}(C) = P(C)$

⇐ Пусть $\exists U \,/\, P dx + Q dy + R dz = dU$

Рассм $\int$-л $I := \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz$, где $\Gamma = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [t_0, T]$, $\Gamma = \breve{AB}$

кус-гл. кривая

Имеем $I = \int_{t_0}^{T} \{ \underbrace{P}_{\frac{\partial U}{\partial x}} x'(t) + \underbrace{Q}_{\frac{\partial U}{\partial y}} y'(t) + \underbrace{R}_{\frac{\partial U}{\partial z}} z'(t) \} dt$ (если $\exists$ не на всем $[t_0,T]$, то берём сумму)



Положим $V(t) := U(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [t_0, T]$

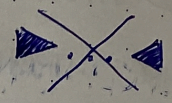
Тогда $I = \int_{t_0}^{T} \left(\frac{dV}{dt} \right) dt = V(T) - V(t_0) = U(B) - U(A)$ - выражение, кот не зависит от Γ

$\Gamma = \breve{AB}$, $t = t_0$, $t = T$

§12 Об аппроксимации криволинейного $\int$-ла

- $\Gamma = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$, $x, y \in C^1[t_0, T]$
- $P = \{ t_i, i = \overline{0,n} \}$ - разб $[t_0, T]$, Λ_P - соотв. ломаная, вписанная в Γ
- $\Gamma, \Lambda_P \subset K$ - компакт

• $P, Q \in C(K) \Rightarrow \lim\limits_{d(P)\to 0} \int\limits_{\Delta_P} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$



Пункт 5 Формула Грина

О.В. Бесов
Лекции по мат. анализу
Физматлит, 2014, стр. 318

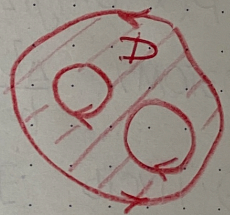
Рассм. прямоуг. с.к. xOy, D-обл. в $\mathbb{R}^2$

Γ - гладкий контур $\Leftrightarrow \Gamma = \{x = x(t),\ y = y(t),\ t_0 \le t \le T\}$, $x, y \in C^1[t_0, T]$

Γ - кус.-гл. контур $\Leftrightarrow \{t_1, \dots, t_m\}$ / $x, y \in C^1[t_{k-1}, t_k]$, $x'_+(t_k) \overset{\text{в.г.}}{\neq} x'_-(t_k)$

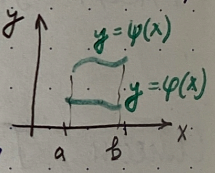
$x, y \in C[t_0, T]$

Тогда Γ - положит. ориентирована $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ при соотв. обходе Γ, отн. D прилежащая к Γ часть D остаётся слева.



Опр. $\exists D$ - область в $\mathbb{R}^2$

1) D - **простая отн. Oy** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}$, где $\varphi, \psi \in C[a,b]$, φ', ψ' - кус. непр. на $[a,b]$



2) D - **простая отн. Ox** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / c < y < d,\ \varphi(y) < x < \psi(y)\}$

3) D - **простая** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (D - простая отн. Oy) $\vee$ (D - простая отн. Ox)

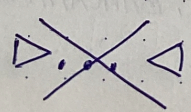
Пусть D - область в $\mathbb{R}^2$. D - **разрезана** на конечное число простых областей $\{D_m\}_{m=1}^{M} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 1) $\bigcup\limits_{1}^{M} D_m \subset D$

2) $D_m \cap D_k = \emptyset$, если $m \neq k$

3) $\bigcup\limits_{1}^{M} \overline{D}_m = \overline{D}$

4) мн-во $(\partial D_m \cap \partial D_k) \cap D = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{точка}, \\ \text{промежуток} \end{cases}$ $m \neq k$

Лемма $\exists D$ - огр. обл. в $\mathbb{R}^2$, $\partial D = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i$, Γ_i - простой кус. гл. контур, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset_{i \neq j} \Rightarrow D$ м.б. разрезана на конечное число простых областей



Пишем ∂D^+ – положит. ориент. граница D.

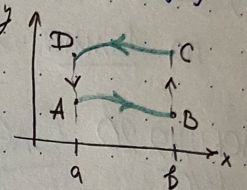
ФОРМУЛА ГРИНА

① Контур – замкнутая кривая

D-область огр в $\mathbb{R}^2$, $\partial D = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i$, где Γ_i – простой кус. гл. контур, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \; i \neq j$, $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(\bar{D}) \Rightarrow \int\limits_{\partial D^+} P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$ (1)

1) D – пр. обл. отн. Oy, т.е. $D = \{(x,y) / a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(y)\}$

Дост. д-ть, что $-\int\limits_{\partial D^+} P dx = \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ (2)



Имеем: $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \overset{\text{Фуб. для цилинд}}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) dy = \int\limits_a^b \{P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\} dx =$

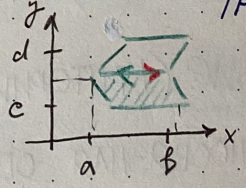
$= -\int\limits_{\overrightarrow{CD}} P dx - \int\limits_{\overrightarrow{AB}} P dx = -\int\limits_{\partial D^+} P dx \Rightarrow (2)$

2) D – пр. обл. отн. Ox, причём кривые

$\Gamma_1 := \{x = \varphi(y), c \le y \le d\}$, $\Gamma_2 := \{c \le y \le d, x = \psi(y)\}$ – ломаные

Тогда $\exists$ разбиение $\{c_i, i = \overline{0,k}\}$ отрезка $[c,d]$, индуцирует представление $\bar{D} = \bigcup_{i=1}^{k} \bar{D}_i$, где $D_i = \{c_{i-1} \le y < c_i, \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$ – трапеция

Тогда D_i – простая отн. Oy



$\overset{1)}{\Rightarrow} \iint\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int\limits_{\partial D_i^+} P dx, \; i = \overline{1,k}$

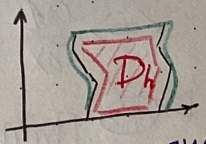
Складываем эти равенства $\Rightarrow \iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int\limits_{\partial D^+} P dx$

3) D – пр. отн. Ox, причём $\exists h_0 / \psi - \varphi \ge 3h_0$ на $[c,d]$

$D_h := \{(x,y) \in D / c < y < d, \varphi(y) + h < x < \psi(y) - h\} \subset D$

$\Gamma_{1,h} := \{x = \varphi(y) + h, c \le y \le d\}$

$\Gamma_{2,h} := \{x = \psi(y) - h, c \le y \le d\}$, $h \in (0, h_0)$



$\Lambda_{1,h}(\hat{P})$ – ломаные, впис. в $\Gamma_{1,h}$, $\Gamma_{2,h}$ соотв.

$\Lambda_{2,h}(\hat{P})$

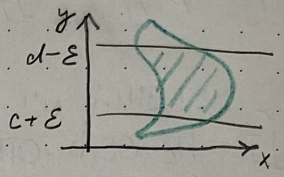
$\Lambda_{1,h}$ и $\Lambda_{2,h} \subset D$ (именно поэтому мы отступали)

$\overset{2)}{\Longrightarrow} \iint\limits_{\underbrace{D_h'(\hat{P})}_{\text{ломаная гр.}}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_{\partial P_h'(\hat{P})} P\,dx \overset{\text{к } \lim\limits_{d(\hat{P})\to 0}}{\Longrightarrow} \iint\limits_{D_h} \ldots = \int\limits_{\partial D_h} \overset{\text{к } \lim\limits_{h\to 0}}{\Longrightarrow} \ldots \boxed{\dashv 2}$ п.4 $\Longrightarrow$ ~~$\triangleright \ldots \triangleleft$~~ $\Longrightarrow (2)$

— Зорич, стр. 181

4) $\exists D$ — пр. отн. Ox : обрезаем

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ldots \Longrightarrow (2)$



5) Общий случай

по Лемме можем разрезать на простые $\Longrightarrow (2)$ ◀

Лекция 20 13/05 д.о.

Следствия 1) Пусть D удовл. усл. $\boxed{\dashv \text{Формула Грина}}$

Площадь • $S_D = \iint\limits_D 1\,dxdy = \int\limits_{\partial D^+} 0 + x\,dy = \int\limits_{\partial D^+} x\,dy$ Н-р, $Q = x$, $P = 0$

$\iint\limits_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=1} dxdy \Longrightarrow 1$

• Н-р, $Q = 0$, $P = -y \Longrightarrow -\int\limits_{\partial D^+} y\,dx = S_D$

Сл-но, в частности, $S_D = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D^+} x\,dy - y\,dx$

Опр. $\exists D$ — область в $\mathbb{R}^2$. Тогда D — **односвязная область** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ огр. области $G \subset \mathbb{R}^2$, где ∂G — простой кусочно-гладкий контур, справедлива импликация: $\{(\partial G \subset D) \Rightarrow (G \subset D)\}$

(!) С дырками — не подходит

Следствие (Критерий полного дифференциала)

$\exists D$ — односвязная обл. в $\mathbb{R}^2$,

$P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(D)$. Тогда дифф. форма (выражение)

$P\,dx + Q\,dy$ явл. полным дифф-лом некоторой ф-ции $U: D \to \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\triangleright$ ($\Rightarrow$) Пусть $\exists U: D \to \mathbb{R} \,/\, P\,dx + Q\,dy = dU$

сіс: $\exists M_0 \in D \,/\, \left(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}}_{\in C(D)} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y}}_{\in C(D)}\right)\Big|_{M_0} \neq 0$. Для опр-ти, $\underline{>0}$.

Тогда $\exists$ шар $B(M_0,\varepsilon) \;/\; \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{B(M_0,\varepsilon)} > 0 \overset{\text{св-ва}}{\Rightarrow} \iint\limits_{B(M_0,\varepsilon)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy > 0$

$\overset{\text{ф-ле Грина}}{\Rightarrow} I := \int\limits_{S^+(M_0,\varepsilon)} \underbrace{P\,dx+Q\,dy}_{dU} > 0 \overset{\text{п.4 III, }\Leftarrow}{\Rightarrow} I = U(A)-U(A)=0$ ⊥

(сфера)

$\Leftarrow$ Пусть $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_D = 0 \overset{\text{ф-ла Грина}}{\Rightarrow} \forall$ кус.-гл. кривой Γ_1, огранич. обл. $D_1 \subset D$,

$\int\limits_{\Gamma_1} P\,dx+Q\,dy = 0 \overset{\text{п.4 II}}{\Rightarrow} \exists U \;/\; P\,dx+Q\,dy = dU$ △

Глава 2 Поверхностные интегралы

§1: Поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$

Пункт 1 Задание поверхности в пространстве

① Поверхность Γ в пр-ве задана как график некоторой непр. фции

- $z=f(x,y),\ (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$
- $x=f(y,z),\ (y,z)\in D\subset\mathbb{R}^2$
- $y=f(x,z),\ (x,z)\in D\subset\mathbb{R}^2$

В этих случаях говорят, что пов-ть задана явно

Н-р, $z=x^2+y^2$, $D=\mathbb{R}^2$ (параболоид)

② Поверхность Γ задана ур-ем, которое не разрешается отн никакой из переменных $F(x,y,z)=0$.

В этом случае говорят, что пов-ть задана неявно

Н-р, $x^2+y^2+z^2=R^2$ - сфера

③ Поверхность Γ задана с помощью параметров

$$\Gamma:\begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v)\end{cases},\ (u,v)\in\bar{D}\subset\mathbb{R}^2,\ \text{где } x,y,z\in C(\bar{D}) \quad (1)$$

В этом случае говорят, что Γ задана параметрически

Н-р, $\begin{cases} x=R\cos u\cos v,\\ y=R\sin u\cos v,\\ z=R\sin v\end{cases}$ $0\le u\le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2}$ - сфера

! Дальше мы рассматриваем задание (1) т.к. каждой точке $M(x,y,z)$ соотв её радиус-вектор $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$,

то ур-я (1) м.б. переписаны в виде $\bar{r} = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}$

Далее предполагаем всюду поверхность $\Phi (= \Gamma)$ задана в виде (1), и выполнены условия:

а) D - огр. обл. в $\mathbb{R}^2$, причём ∂D - простой, кус.-гл. контур;

б) $x, y, z \in C^1(\bar{D})$;

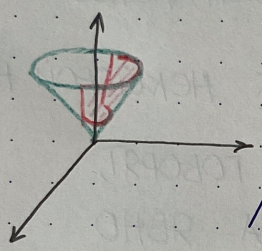
с) Отображение $F: D \to (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \Phi$ инъективно

• Если усл. с) верно в $\bar{D}$, то поверхность Φ наз. **простой**.

В этом случае говорят, что м-во $\{(x(u,v); y(u,v), z(u,v))\} \in \Phi / (u,v) \in \partial D$ образует **край** поверхности.

Поверхность, не имеющая края, наз. поверхностью **без края**

(1)



$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = u \end{cases} \quad D = \{a \le u \le b,\ 0 \le v \le \pi\}$$

M - **внутренняя точка** поверхности $\Phi \overset{def}{\iff} M \notin$ краю Φ

Пункт 2. Гладкая поверхность

Опр. 1 Поверхность Φ называется **гладкой**, если $\forall$ внутр. точки $M \in \Phi$ $\exists$ окр. $O(M) \subset \mathbb{R}^3$ / $\Phi \cap O(M)$ м.б. задано явно (из п. 1), причём $f \in C^1(\bar{G})$

Во всех внутр. т. $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$; $z = f(x,y)$ $\exists$ касат. пл-ть, а именно, плоскость $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$.

А также единичный вектор нормали $\vec{n} := \dfrac{\left(\overset{+}{(-)} f_x'(x_0, y_0), \overset{+}{(-)} f_y'(x_0, y_0), \overset{+}{(-)} 1\right)}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}$

Пусть поверхность Φ задана параметрически:

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in \bar{D} \text{ с усл. а)-с)} \quad (1)$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$ называется **регулярной** (неособой), если

векторы $\bar{r}'_u := x'_u(u_0,v_0)\bar{i} + y'_u(u_0,v_0)\bar{j} + z'_u(u_0,v_0)\bar{k}$,

$\bar{r}'_v := x'_v(u_0,v_0)\bar{i} + y'_v(u_0,v_0)\bar{j} + z'_v(u_0,v_0)\bar{k}$ не явл. коллинеарными (можно натянуть пл-ть)

$\bar{r}'_u = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix}$, $\bar{r}'_v = \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix}$ Матрица Якоби для (1) имеет вид: $\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$

M_0 - регулярная $\Leftrightarrow$ ранг матрицы Якоби равен 2.

В этом случае говорят, что Φ невырожденная в т. M_0.

Иначе, $M_0 \in \Phi$ - особая

Замечание Поверхность (1) с усл a)-c), не имеющая особых точек, является гладкой ▷◁ Зорич, II, стр 196.

Лекция 21
18/05 д.о.

Опр 2 Пусть поверхность Φ задана ур-ями (1) с усл a)-c), M_0 - регулярная точка Φ, внутр точка Φ

$M_0 = \bar{r}(u_0,v_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$

Плоскость, проходящая через т. M_0, параллельно векторам $\bar{r}'_u(u_0,v_0)$, $\bar{r}'_v(u_0,v_0)$ называется касательной плоскостью к поверхности Φ в точке M_0

Замечание M_0 - регулярная $\Rightarrow \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \neq (0,0,0)$

Опр 2 $\Rightarrow$ ур-е кас. пл-ти имеет вид: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$

В частном случае явного задания Φ: $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x,y) \end{cases}$

Имеем: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z - z_0 - f'_x(x-x_0) - f'_y(y-y_0) = 0$

Опр 3 Пусть поверхность Φ и т. $M_0 \in \Phi$ удовл. усл Опр 2. Тогда прямая, проходящая через т. M_0 и $\perp$ касат. пл-ти, назыв-ся нормалью к Φ в т. M_0.

$\Rightarrow$ единичный вектор нормали: $\vec{n} := \pm \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}$

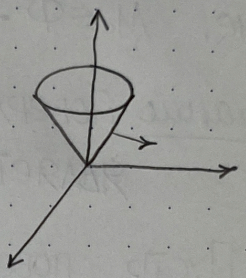
Положим $A := \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B := \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$, $C := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ – коорд. векторного пр-я

Тогда $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\cos\alpha = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

В частном случае явного задания поверхности: $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{pmatrix} \Rightarrow A = -f'_x,\ B = -f'_y,\ C = 1$

$\cos\gamma = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(П) Конус $x^2+y^2-z^2=0$, $z \geq 0$ $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u,\ u \geq 0 \end{cases}$



$\begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = -u\cos v = -x;$
$B = -u\sin v = -y;$
$C = u = z \geq 0$

$A(0,0,0) = B(0,0,0) = C(0,0,0) = 0.$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\pm x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta = \frac{\pm y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

Но $z^2 = x^2+y^2$, $z \geq 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\pm x}{z\sqrt{2}}$, $\cos\beta = \frac{\pm y}{z\sqrt{2}}$ $\cos\gamma = \frac{\mp z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\mp z}{z\sqrt{2}}$

$\cos\gamma = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}}$

Пункт 3. Ориентация гладкой поверхности

(*) Пусть Φ задана уравнениями (1) с усл. a)-c) и не имеет особых точек ($\Rightarrow$ гладкая)

$\Rightarrow$ единичный вектор нормали $\frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} = \vec{n}$, $\vec{n} = \vec{n}(u,v)$

$\Rightarrow \vec{n}(u,v)$ – непр. вектор-функция на D. Аналогично $(-\vec{n})$

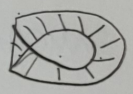
Опр. Всякое непрерывное поле единичных нормалей пов-ти Φ называется **ориентацией** (стороной) пов-ти Φ.

Т.е. выбор стороны поверхности означает выбор направления единичного вектора нормали.

Если в $\forall$ точке поверхности можно выбрать ед. вектор

нормали так, что получается вектор-ф-ция $\vec{n}(M)$, $M \in \Phi$, непр на Φ, то такая поверхность называется **двусторонней**.
Иначе Φ называется **односторонней**

(п) 1. (*) - двусторонняя
2. Лист Мебиуса - односторонняя



Пункт 4. Площадь поверхности

Опр. Пусть Φ - поверхность (1) с усл. а)-с), без особых точек.
Тогда площадь пов-ти Φ, $S = S_\Phi := \iint\limits_{\bar{D}} |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| \, du\,dv$

Замечание Опр. верно для кус.-гладких Φ.

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$$

$$E := |\bar{r}'_u|^2 = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$$
$$G := |\bar{r}'_v|^2 = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$$
$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = (\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_v)$$

Тогда $|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|^2 = EG - F^2 \Rightarrow$ $S = \iint\limits_{\bar{D}} \underbrace{\sqrt{EG - F^2}}_{\text{"эл-т площ. пов-ти"}} du\,dv$

(п) $\Phi = \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x,y) \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{pmatrix} \Rightarrow$ $E = 1 + (f'_x)^2$
$G = 1 + (f'_y)^2 \Rightarrow \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}$
$F = f'_x f'_y$

§2: Поверхностные интегралы I и II рода

Пункт 1. Преобразование параметров гладкой поверхности

Пусть задана пов-ть $\Phi = \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in \bar{D}$ с усл. а)-с) (1)
без особых точек

Лекция 22
25/05 д.о.

Рассм. замену параметров:
$F: (u_1, v_1) \in \bar{D}_1 \to (u = u(u_1, v_1),\ v = v(u_1, v_1)) \in \bar{D}$, где (2)
D_1 - измеримая область в $\mathbb{R}^2$

Пусть $\tilde{\Phi} \{\bar{\rho} = \bar{\rho}(u_1, v_1),\ (u_1, v_1) \in \bar{D}_1\}$, где $\bar{\rho}(u_1, v_1) := \bar{r}(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$

Замена (2) допустима $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ 1) F - диффеоморфизм, причём $D_1 \leftrightarrow D$ ($\Rightarrow \partial D_1 \leftrightarrow \partial D$)

2) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \neq 0$ на D_1 $\left(\Rightarrow \frac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} \neq 0 \text{ на } D\right)$

Пусть (2) - допустимая замена.

Имеем $\bar{r}'_{u_1} = \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial u_1} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial u_1}$, $\bar{r}'_{v_1} = \bar{r}'_u \frac{\partial u}{\partial v_1} + \bar{r}'_v \frac{\partial v}{\partial v_1}$ $\quad \left|\begin{matrix} u_{u_1} & u_{v_1} \\ v_{u_1} & v_{v_1} \end{matrix}\right|$

$$\Rightarrow \bar{r}'_{u_1} \times \bar{r}'_{v_1} = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} - \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1} \right) = \bar{r}'_u \times \bar{r}'_v \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \right| \Rightarrow \bar{r}'_{u_1} \times \bar{r}'_{v_1} \neq 0$$

$\neq 0$

Поэтому: 1) Параметрическое задание Φ с а)-с) и неособыми точками переходит в $\tilde{\Phi}$ с а)-с) и неособ. т-ми.

2) Касательная плоскость и нормаль тоже.

Пункт 2 Поверхностный интеграл I рода

Пусть задана поверхность Φ с усл (1) из п.1

Опр Пусть $f: \Phi \to \mathbb{R}$, $f \in R(\tilde{D})$. Тогда интеграл

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)\,dS := \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\,du\,dv \quad (\text{если } \exists) \quad (1)$$

называется поверхностным $\int$-лом I рода от ф-ции f пов-ти Φ

Замечания 1) $\iint\limits_{\Phi} f\,dS$ не меняется при допустимой замене пар-ов.

▷ Рассм допустимую замену параметров из п.1

Тогда (через замену переменных в двойном $\int$-ле):

$$\iint\limits_{D_1} f(x(u(u_1,v_1), v(u_1,v_1)), y(\dots), z(\dots)) \cdot |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v| \cdot \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}\right| du_1\,dv_1 =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\,du\,dv \quad \triangle$$

2) Поверхностный интеграл I рода не зависит от выбора стороны поверхности

3) Поверхностный интеграл по кусочно-гладкой пов-ти $S = \bigcup\limits_{k=1}^{K} S_k$ определяется как сумма $\int$-лов по S_k $(k = \overline{1,K})$

ПУНКТ 3. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

Пусть задана гладкая поверхность Φ с усл. (1) из п.1. Тогда Φ - двусторонняя поверхность. Выберем одну из сторон поверхности Φ (с помощью единичного вектора $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$)

Опр. Пусть $P, Q, R : \Phi \to \mathbb{R}$. Тогда интеграл

$$\iint\limits_{\Phi} \{P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\}\,dS \qquad (1)$$

называется **поверхностным интегралом II рода** от вектор-функции $\vec{a} := (P, Q, R)$ по ориентированной пов-ти $\Phi^{\vec{n}}$

Замечания. 1) Формула (1) переписывается в виде

(с векторным полем $\vec{a}$) $\iint\limits_{\Phi} (\vec{a}, \vec{n})\,dS$ - „поток вектор-ф-ции $\vec{a}$ через поверхность Φ в направлении $\vec{n}$"

2) (1) меняет знак при замене $\vec{n}$ на $(-\vec{n})$, т.е. ориентации (зависит от стороны поверхности Φ)

3) (1) не меняется при допустимой замене параметров, сохраняющей сторону поверхности

4) По кусочно-гладкой поверхности $\int$-л II рода определяется как сумма $\int$-лов по соотв. „кускам" поверхности

Говорим, что Φ **положительно ориентирована**, если выбираем $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$. Тогда обозн. $\Phi^{\vec{n}} = \Phi^+$

В этом случае используем обозн. $\iint\limits_{\Phi^+} P(x,y,z)\,dydz + Q(..)\,dzdx + R(..)\,dxdy := \iint\limits_{\Phi} (\vec{a}, \vec{n})\,dS$

$\overset{\text{п.2}}{\Longrightarrow} \iint\limits_{\Phi^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$

$= \iint\limits_{D} [P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\cdot A + Q(...)\,B + R(...)\,C]\,du\,dv$, где

$$A := \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B := \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Пункт 4. Формула Стокса

Пусть поверхность Φ - простая пов-ть, а именно

$\Phi := \begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v) \end{cases}$, $(u,v)\in\bar{D}$, (a)-c) - усл.), без особых точек, причём Φ - поверхность с краем

Общ. край $\partial\Phi := \{ x(u,v), y(u,v), z(u,v)\in\Phi \,/\, (u,v)\in\partial D \}$

Тогда $\partial\Phi$ - кусочно-гладкий контур (т.к. ∂D - кус.-гл. контур), если параметризация $\partial\Phi$ порождена параметризацией контура ∂D

Опр. Пусть контур ∂D ориентирован положительно отн. $D\subset\mathbb{R}^2$. Его ориентация индуцирует **ориентацию края** $\partial\Phi\subset\mathbb{R}^3$. Эта ориентация называется **согласованной** с ориентацией поверхности, которая определяется вектором $\vec{n} := \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}$. Противоположная ориентация наз. согласованной с $(-\vec{n})$.

Замечание Ориентация $\partial\Phi$ согласована с ориентацией Φ по правилу штопора

Фихтенгольц, III стр. 620

Формула Стокса

Пусть поверхность Φ задана с усл. (1) с a)-c), гладкая, причём $\partial D =: L$ - гладкий контур, и $x,y,z\in C^2(\bar{D})$

Пусть G - область в $\mathbb{R}^3$ / $\Phi\subset G$, и $P,Q,R\in C^1(G)$.

Тогда, если ориентации поверхности Φ и контура $\Gamma := \partial\Phi$ согласованы, то

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Phi \{ (Q'_x - P'_y)\cos\gamma + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (R'_y - Q'_z)\cos\alpha \}\, dS \qquad (2)$$

▶ Дост. д-ть, что $\oint_\Gamma P\,dx = \iint_\Phi (P'_z\cos\beta - P'_y\cos\gamma)\,dS$ (3)

Пусть $\partial D =: L = \begin{cases} u=u(t), \\ v=v(t) \end{cases}$, $t_0\le t\le T$, $u,v\in C^1[t_0,T]$

Тогда для $\Gamma := \partial\Phi$ $\oint_\Gamma P\,dx = \int_{t_0}^{T} P(x(u(t),v(t)), y(..), z(..))\, x'_t\, dt =$

$$= \int_{t_0}^{T} P(\dots)\left(x'_u(u,v)\,u'_t + x'_v(u,v)\,v'_t\right)dt = \int_{\gamma} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot$$
$$\cdot\left[x'_u(u,v)\,du + x'_v(u,v)\,dv\right] =$$

Ф-ЛА ГРИНА
$$= \iint_D \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\}du\,dv =$$

$$= \iint_D \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right)du\,dv =$$

$$= \iint_D \left\{\frac{\partial P}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial P}{\partial y}(-c) + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot B\right\}du\,dv = \iint_D \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right)\cdot|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,du\,dv}{|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|} =$$

$$= \iint_\Phi \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds \Rightarrow (3) \quad \blacktriangleleft$$

Замечания 1) ФОРМУЛА СТОКСА ВЕРНА ДЛЯ $x,y,z\in C^1(\bar{D})$ (АППРОКС. ГЛ. КРИВОЙ)

2) ВЕРНО И ДЛЯ КУС.-ГЛ. ПОВЕРХНОСТЕЙ

3) (2) М.Б. ПЕРЕПИСАНА В ВИДЕ $\oint_\Gamma(\vec{a},d\vec{r}) = \iint_\Phi(\operatorname{rot}\vec{a},\vec{n})\,ds$, ТО ЕСТЬ ПОТОК ВИХРЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ $\vec{a}=(P,Q,R)$ РАВЕН (СПРАВА / СЛЕВА) ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ $\vec{a}$ ПО КРАЮ Γ ПОВ-ТИ Φ

4) ФОРМУЛА СТОКСА $\Rightarrow$ ФОРМУЛА ГРИНА

5) (2) М.Б. ПЕРЕПИСАНА В ВИДЕ

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Phi (Q_x - P_y)\,dx\,dy + (P_z - R_x)\,dz\,dx + (R_y - Q_z)\,dy\,dz$$

Пункт 5 Формула Гаусса-Остроградского

Пусть G-обл. в $\mathbb{R}^3$. Говорим, что G-простая отн. оси z, если
$G = \{\varphi_1(x,y) < z < \varphi_2(x,y), (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2\}$, ($\varphi_1,\varphi_2\in C^1(D_m)\cap C(\bar{D}_m)$; D — ОГР. ОБЛ., ∂D — ПР., КУС.-ГЛ. КОНТУР), — // — отн. Ox, — // — отн. Oy.

Говорим, что G-ДОПУСТИМАЯ ОБЛАСТЬ, если G М.Б. РАЗБЕЛЕНА НА КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ОБЛАСТЕЙ, ПРОСТЫХ ОТН. Oz, ИЛИ Ox, ИЛИ Oy.

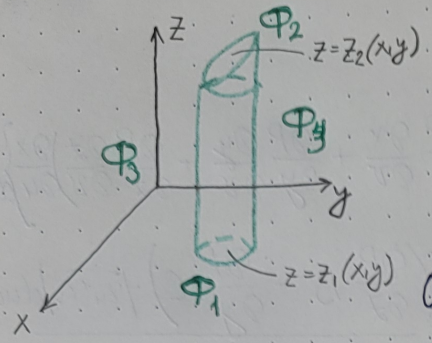
⊣ ФОРМУЛА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО

Пусть G-ДОПУСТИМАЯ ОБЛ. В $\mathbb{R}^3$, $P,Q,R\in C^1(G)$

$$\Rightarrow \iint_\Phi (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \text{ ГДЕ} \quad (1)$$

$\Phi = \partial G$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – <u>внешняя</u> нормаль к Φ

▶ В силу ААД-ти $\int$-лов, дост. д-ть для обл. G, простой отн. Oz



Надо д-ть формулу:

$$\iiint\limits_{V=G} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Phi} R\cos\gamma\,dS \quad (2)$$

Ф-ла для цилиндр.

Имеем: $\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \{R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\}\,dx\,dy = \iint\limits_{\Phi_2} R\cos\gamma\,dS + \iint\limits_{\Phi_1} R\cos\gamma\,dS + \underbrace{\iint\limits_{\Phi_3} R\cos\gamma\,dS}_{=0} =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} R\cos\gamma\,dS = \iint\limits_{\Phi_{внешн.}} R\,dx\,dy \Rightarrow (2)$$

<u>Замечание</u> 1) Верно для огр. обл. G с кус.-гл. ∂G

2) (1) м.б. записана в виде

$$\iint\limits_{\partial G=\Phi} (\vec{a}, \vec{n})\,dS = \iiint\limits_{G} (\operatorname{div}\vec{a})\,dx\,dy\,dz$$