

# *Введение в геометрию Лобачевского*

*для студентов I–III курса*  
читает проф. Макаров В.С.

План курса: история попыток доказательства V постулата; аксиоматика геометрии; синтетическое изложение основ геометрии Лобачевского, гиперболическая тригонометрия; интерпретации; элементы дискретной геометрии пространства Лобачевского, связь с квадратичными формами.

Занятия проводятся

по средам в 18.30 в ауд. 13-27,

по пятницам в 16.45 в ауд. 12-08

## *Обращение к потенциальному слушателю!*

Курс посвящен достаточно подробному синтетическому изложению геометрии Лобачевского в аспекте проблем дискретной геометрии. Несколько вольно можно сказать, что дискретная геометрия изучает системы, состоящие из дискретно расположенных геометрических фигур (например, из систем точек, систем окружностей данного радиуса, систем равных многогранников).

Тематика проблем дискретной геометрии широка и разнообразна. Исходя своими корнями из глубокой древности (разбиения плоскости равными правильными многоугольниками, вывод правильных и полуправильных многогранников), она все дальше и дальше смотрит в будущее, все глубже и глубже внедряется в различные разделы современной математики.

К основным проблемам дискретной геометрии евклидова пространства обычно [1] относятся:

1. Проблема плотнейших упаковок равных шаров в пространстве (например, каким образом наиболее плотно упаковать шары в данном объеме, или: как надо экономно сажать картошку, чтобы кусты не мешали друг другу).

2. Проблема редчайших покрытий равными шарами пространства (как, например, экономно расположить на одинаковых геостационарных орбитах заданное количество спутников для наиболее быстрой помощи терпящему аварию космическому кораблю, или: как экономно расположить в данной области заданное число интерполяционных точек при табулировании функции).

3. Проблема перечисления всех параллелоэдров (многогранников, «выполняющих» пространство в параллельном положении; при  $n=2$  таковыми «параллелоэдрами» являются лишь параллелограмм и шестиугольник с попарно параллельными сторонами).

4. Проблема перечисления всех видов симметрии кристаллов (иначе: перечисление всех групп движений эвклидова пространства, имеющих компактную фундаментальную область). При  $n = 3$  их оказалось 230 (выведены Е.С.Федоровым).

Аналогичные проблемы возникают и в других пространствах постоянной кривизны – на сфере  $S^n$  и в пространстве  $L^n$ . Но если основные проблемы дискретной геометрии эвклидова пространства связывают ее с геометрией чисел, с математической кристаллографией, с теорией интерполирования функций, с теорией групп, то проблемы дискретной геометрии пространства Лобачевского уходят корнями в классификацию многообразий постоянной отрицательной кривизны, изучение их геометрии и топологии, в глубокие вопросы современной алгебры, теории автоморфных функций, теории вероятностей (на сколько это направление «плодотворно» можно судить, например, по числу филдсофских лауреатов: Маргулис, Терстон,... и лауреата, первого и единственного, премии имени Абеля: М.Громов).

Однако, чтобы добраться до вершин приходится начинать с азов. Естественно, что излагать в первом, (третьем) семестре теорию кристаллографических групп несколько затруднительно, не говоря уже о вопросах алгебраической топологии, теории функций, теории меры и т.п. А вот рассказать историю возникновения геометрии Лобачевского на базе попыток доказательства пятого постулата Эвклида, развернуть на этой основе все строение этой геометрии, дать основные понятия аксиоматического метода изложения, рассмотреть основные модели (интерпретации) геометрии Лобачевского – это, во-первых, вполне доступно пониманию даже школьника, это, во-вторых, широко раздвигает пределы знаний студента, его интеллектуального горизонта, это, в-третьих, дает нужный фундамент для последующего изучения проблем дискретной геометрии пространств постоянной кривизны. Кроме того, в ходе изложения материала есть возможность заострять внимание студентов на особенностях в решениях задач дискретной геометрии в различных пространствах постоянной кривизны (например решение вопроса о разбиении равными правильными многоугольниками плоскости Эвклида, двумерной сферы и плоскости Лобачевского).

В качестве первого знакомства студента с проблемами дискретной геометрии можно рекомендовать, например,

1. С.С.Рышков, Р.Г.Барыкинский, Я.В.Кучериненко «Решение основных задач дискретной геометрии в случае плоскости», МГУ 2000г.,

2. Н.П.Долбилин «Правильные системы» (Введение в математическую кристаллографию) Знание, М. 1978г.,

3. Н.П.Долбилин «Жемчужины теории многогранников» МЦНМО М. 2000г.,

4. К Роджерс «Укладки и покрытия» Мир М. 1968г.

5. Л.Ф.Тот «Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве» Гос Изд Физ-Мат Лит М. 1958г.

6. H.S.M.Coxeter Regular polytopes. London 1948.

При изложении геометрии Лобачевского лектор рассчитывает пользоваться книгами В.Ф.Кагана и Я.Л.Трайнина по основаниям геометрии.