

Вычислительная сложность градуированных модальных логик

Евгений Евгеньевич Золин

старший научный сотрудник,
кафедра математической логики и теории алгоритмов,
механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Юбилейные «Ломоносовские чтения», посвященные
260-летию МГУ им. М. В. Ломоносова, 26 декабря 2014 г.

План

- 1 Модальная логика
 - Локальная и глобальная выполнимость
 - Вычислительная сложность

План

- 1 Модальная логика
 - Локальная и глобальная выполнимость
 - Вычислительная сложность
- 2 Градуированная модальная логика
 - Синтаксис и семантика
 - Аксиоматика (для справки)
 - Вычислительная сложность

План

- 1 Модальная логика
 - Локальная и глобальная выполнимость
 - Вычислительная сложность
- 2 Градуированная модальная логика
 - Синтаксис и семантика
 - Аксиоматика (для справки)
 - Вычислительная сложность
- 3 Градуированная временная логика
 - Синтаксис и семантика
 - Основной результат: неразрешимость **GR1K4**
 - Сложность фрагментов

План

- 1 Модальная логика
 - Локальная и глобальная выполнимость
 - Вычислительная сложность
- 2 Градуированная модальная логика
 - Синтаксис и семантика
 - Аксиоматика (для справки)
 - Вычислительная сложность
- 3 Градуированная временная логика
 - Синтаксис и семантика
 - Основной результат: неразрешимость **GrIK4**
 - Сложность фрагментов
- 4 Связь с представлением знаний

План

- 1 Модальная логика
 - Локальная и глобальная выполнимость
 - Вычислительная сложность
- 2 Градуированная модальная логика
 - Синтаксис и семантика
 - Аксиоматика (для справки)
 - Вычислительная сложность
- 3 Градуированная временная логика
 - Синтаксис и семантика
 - Основной результат: неразрешимость **GR1K4**
 - Сложность фрагментов
- 4 Связь с представлением знаний
- 5 Заключение и открытые вопросы

Модальная логика: синтаксис, семантика, аксиомы

- Синтаксис обычных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond A$$

Обозначение: $\Box A = \neg \diamond \neg A$.

Модальная логика: синтаксис, семантика, аксиомы

- Синтаксис обычных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond A$$

Обозначение: $\Box A = \neg \diamond \neg A$.

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$, где
 - $W \neq \emptyset$ — непустое множество «точек» или «миров»
 - $R \subseteq W \times W$ — двуместное отношение «достижимости»
 - оценка — двуместное отношение: $w \models p$

Модальная логика: синтаксис, семантика, аксиомы

- Синтаксис обычных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \Diamond A$$

Обозначение: $\Box A = \neg \Diamond \neg A$.

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \vDash)$, где
 - $W \neq \emptyset$ — непустое множество «точек» или «миров»
 - $R \subseteq W \times W$ — двуместное отношение «достижимости»
 - оценка — двуместное отношение: $w \vDash p$

$$w \vDash \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad \exists x: wRx \text{ и } x \vDash A$$

Аксиоматика «традиционных» модальных логик

Минимальная нормальная модальная логика **K**:

Аксиомы:

- классические пропозициональные тавтологии
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Правила: modus ponens $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, necessitation $\frac{A}{\Box A}$

Аксиоматика «традиционных» модальных логик

Минимальная нормальная модальная логика **K**:

Аксиомы:

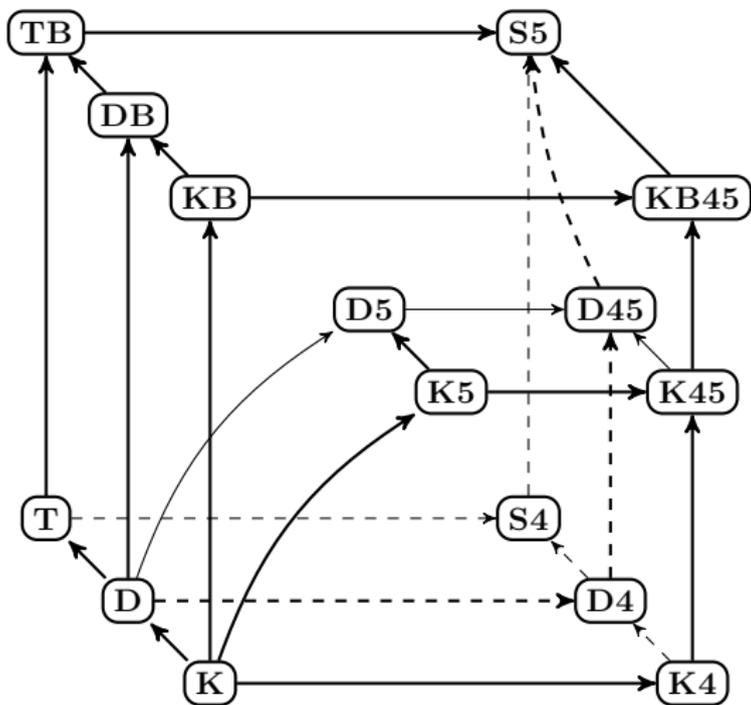
- классические пропозициональные тавтологии
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Правила: modus ponens $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, necessitation $\frac{A}{\Box A}$

«Традиционные» классы шкал Крипке:

(D)	<i>сериальность</i>	$\Box A \rightarrow \Diamond A$	$\forall x \exists y (xRy)$
(T)	<i>рефлексивность</i>	$\Box A \rightarrow A$	$\forall x (xRx)$
(B)	<i>симметричность</i>	$A \rightarrow \Box \Diamond A$	$\forall xy (xRy \Rightarrow yRx)$
(4)	<i>транзитивность</i>	$\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$	$\forall xyz (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
(5)	<i>евклидовость</i>	$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	$\forall xyz (xRy \wedge xRz \Rightarrow yRz)$

Куб из 15 «традиционных» логик между K и S5



Локальная и глобальная выполнимость формул

Модальная формула A называется

- **(локально) выполнимой**, если $\exists M \exists w: M, w \models A$
- **глобально выполнимой**, если $\exists M: M \models A$

Локальная и глобальная выполнимость формул

Модальная формула A называется

- **(локально) выполнимой**, если $\exists M \exists w: M, w \models A$
- **глобально выполнимой**, если $\exists M: M \models A$

Аналогично определяется выполнимость в классе шкал.

Локальная и глобальная выполнимость формул

Модальная формула A называется

- **(локально) выполнимой**, если $\exists M \exists w: M, w \models A$
- **глобально выполнимой**, если $\exists M: M \models A$

Аналогично определяется выполнимость в классе шкал.

- **общезначима**, если $\forall M \forall w: M, w \models A$

Локальная и глобальная выполнимость формул

Модальная формула A называется

- **(локально) выполнимой**, если $\exists M \exists w: M, w \models A$
- **глобально выполнимой**, если $\exists M: M \models A$

Аналогично определяется выполнимость в классе шкал.

- **общезначима**, если $\forall M \forall w: M, w \models A$

Двойственность: A общезначима $\iff \neg A$ не выполнима

Локальная и глобальная выполнимость формул

Модальная формула A называется

- **(локально) выполнимой**, если $\exists M \exists w: M, w \models A$
- **глобально выполнимой**, если $\exists M: M \models A$

Аналогично определяется выполнимость в классе шкал.

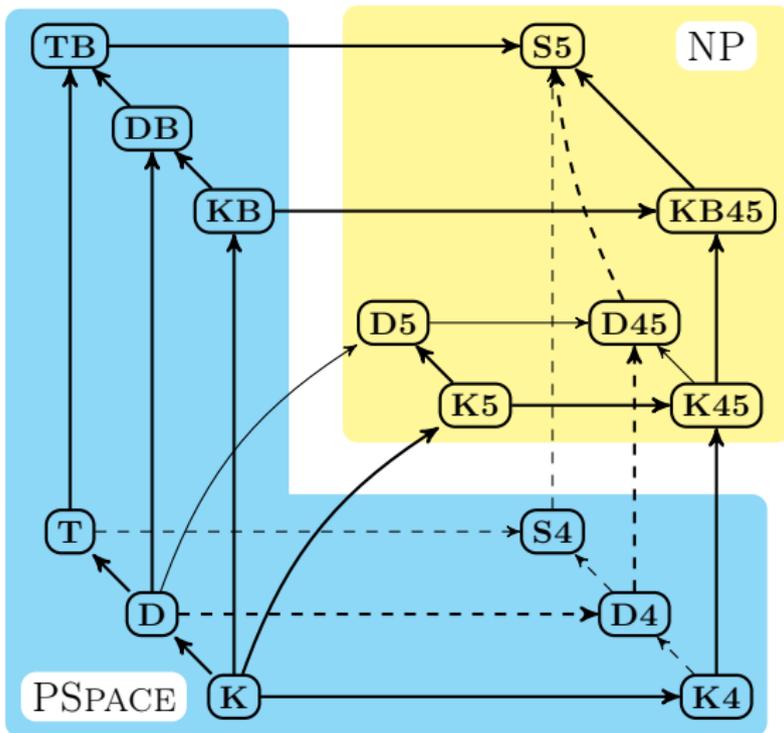
- **общезначима**, если $\forall M \forall w: M, w \models A$

Двойственность: A общезначима $\iff \neg A$ не выполнима

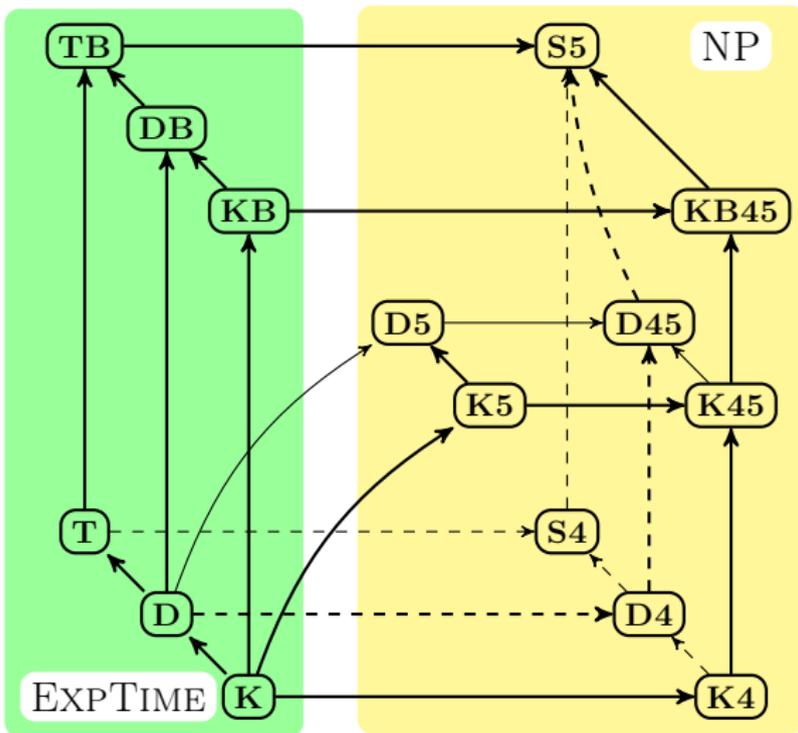
Глобальная SAT бывает как сложнее, так и проще локальной:

	Локальная SAT	Глобальная SAT
K	PSPACE-полна	EXPTIME-полна
S4	PSPACE-полна	NP-полна

Сложность модальных логик: локальная выполнимость

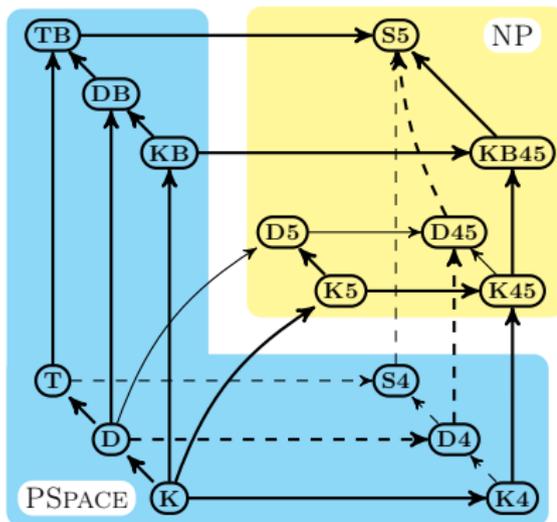


Сложность модальных логик: глобальная выполнимость

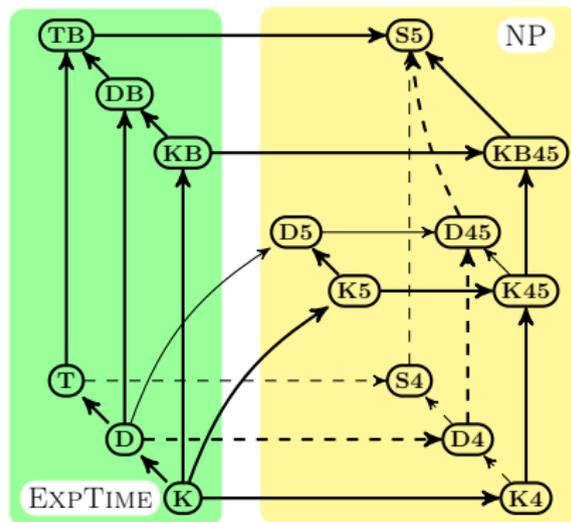


Сложность модальных логик: сравнение

локальная выполнимость



глобальная выполнимость



Градуированная модальная логика (GML)

- Синтаксис *градуированных* модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

Градуированная модальная логика (GML)

- Синтаксис *градуированных* модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$, истинность формулы:

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

Градуированная модальная логика (GML)

- Синтаксис градуированных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$, истинность формулы:

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

Обозначения: $\boxed{\diamond A := \diamond^{\geq 1} A}$

Градуированная модальная логика (GML)

- Синтаксис градуированных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$, истинность формулы:

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

Обозначения: $\boxed{\diamond A := \diamond^{\geq 1} A}$ $\boxed{\diamond^=n A := \diamond^{\geq n} A \wedge \neg \diamond^{\geq n+1} A}$

Градуированная модальная логика (GML)

- Синтаксис градуированных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$, истинность формулы:

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

Обозначения: $\Box A := \diamond^{\geq 1} \neg A$ $\diamond^{=n} A := \diamond^{\geq n} A \wedge \neg \diamond^{\geq n+1} A$

- GML появилась в работе
Kit Fine, "In so many possible worlds" (1972)

Градуированная модальная логика (GML)

- Синтаксис градуированных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$, истинность формулы:

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

Обозначения: $\boxed{\diamond A := \diamond^{\geq 1} A}$ $\boxed{\diamond^{=n} A := \diamond^{\geq n} A \wedge \neg \diamond^{\geq n+1} A}$

- GML появилась в работе
Kit Fine, "In so many possible worlds" (1972)
- Широко и глубоко исследовались в серии работ
Fattorosi-Barnaba, de Caro, Cerrato, et. al.
"Graded Modalities I, II, III, IV, V, VI, VII" (1985–1999)

Градуированная модальная логика (GML)

- Синтаксис градуированных модальных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$, истинность формулы:

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

Обозначения: $\boxed{\diamond A := \diamond^{\geq 1} A}$ $\boxed{\diamond^=n A := \diamond^{\geq n} A \wedge \neg \diamond^{\geq n+1} A}$

- GML появилась в работе
Kit Fine, “*In so many possible worlds*” (1972)
- Широко и глубоко исследовались в серии работ
Fattorosi-Barnaba, de Caro, Cerrato, et. al.
“*Graded Modalities I, II, III, IV, V, VI, VII*” (1985–1999)
- van der Hoek (определимость, фильтрация для GML, 1992)
Maarten de Rijke (бисимуляция для GML, 2000)
Stephan Tobies (PSpace алгоритм для GML, 2001)

Аксиоматика градуированных логик

Минимальная градуированная модальная логика **GrK**:

Аксиомы:

- классические пропозициональные тавтологии
- $\Diamond^{\geq n+1}A \rightarrow \Diamond^{\geq n}A$
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond^{\geq n}A \rightarrow \Diamond^{\geq n}B)$
- $\neg\Diamond(A \wedge B) \wedge \Diamond^=nA \wedge \Diamond^=mB \rightarrow \Diamond^=n+m(A \vee B)$

Правила: modus ponens $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, necessitation $\frac{A}{\Box A}$

Аксиоматика градуированных логик

Минимальная градуированная модальная логика **GrK**:

Аксиомы:

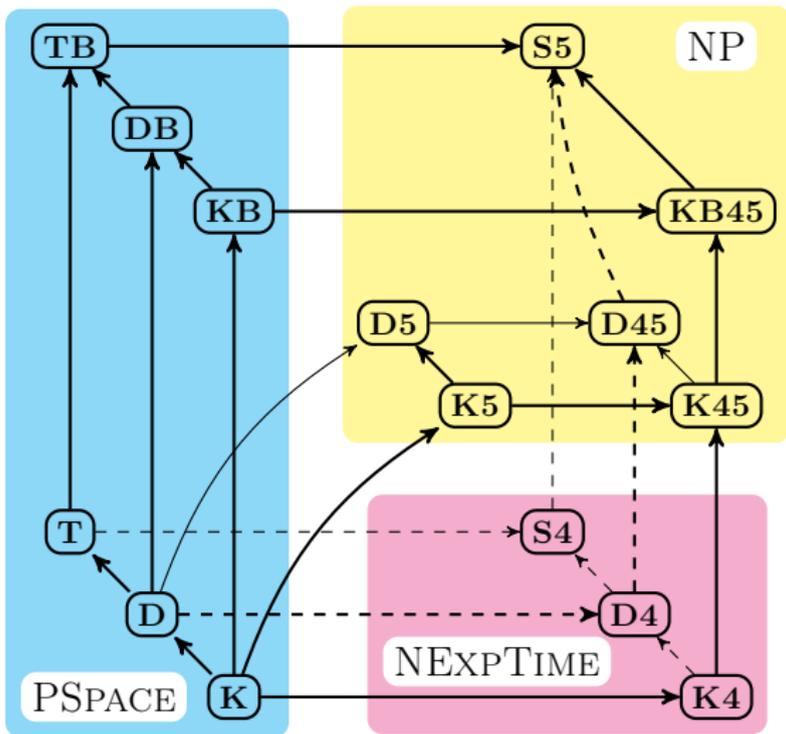
- классические пропозициональные тавтологии
- $\Diamond^{\geq n+1}A \rightarrow \Diamond^{\geq n}A$
- $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond^{\geq n}A \rightarrow \Diamond^{\geq n}B)$
- $\neg\Diamond(A \wedge B) \wedge \Diamond^=nA \wedge \Diamond^=mB \rightarrow \Diamond^=n+m(A \vee B)$

Правила: modus ponens $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$, necessitation $\frac{A}{\Box A}$

Дополнительные аксиомы:

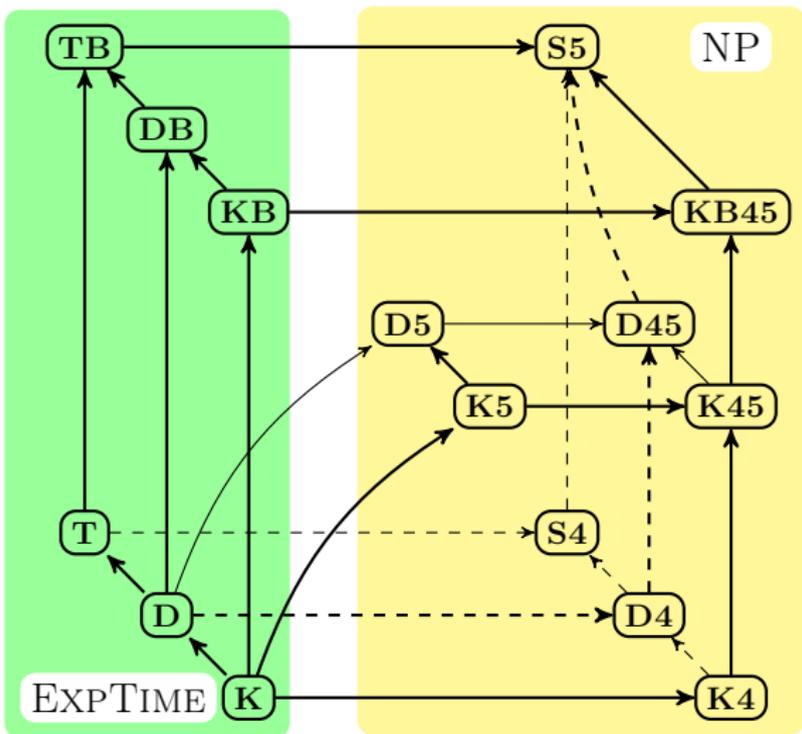
	Аксиома ML	Аксиома GML
(D) <i>сериальность</i>	$\Diamond \top$	$\Diamond \top$
(T) <i>рефлексивность</i>	$A \rightarrow \Diamond A$	$A \rightarrow \Diamond A$
(B) <i>симметричность</i>	$A \rightarrow \Box \Diamond A$	$A \rightarrow \Box \Diamond A$
(4) <i>транзитивность</i>	$\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$	$\Diamond \Diamond^{\geq n}A \rightarrow \Diamond^{\geq n}A$
(5) <i>евклидовость</i>	$\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	$\Diamond^{\geq n}A \rightarrow \Box \Diamond^{\geq n}A$

Сложность градуированных логик: локальная выполн-ть



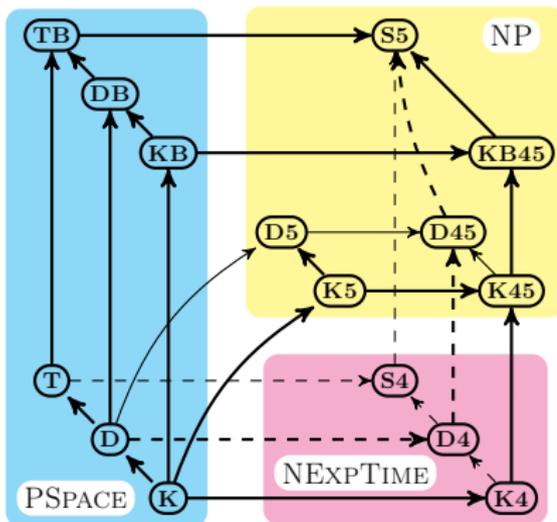
(Ian Pratt-Hartmann, Евгений Казаков, 2009)

Сложность градуированных логик: глобальная выполн-ть

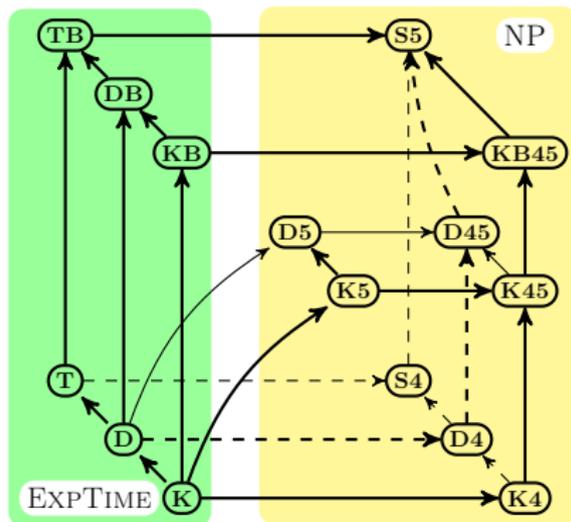


Сложность градуированных логик: сравнение

локальная выполнимость



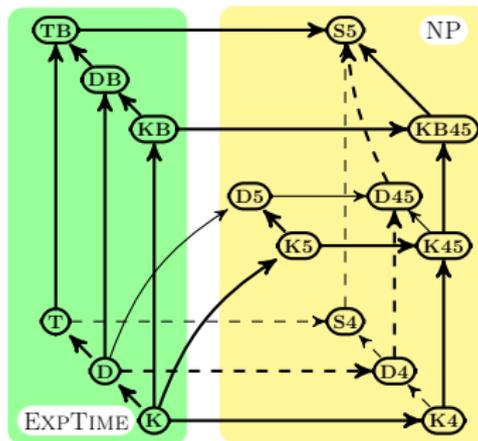
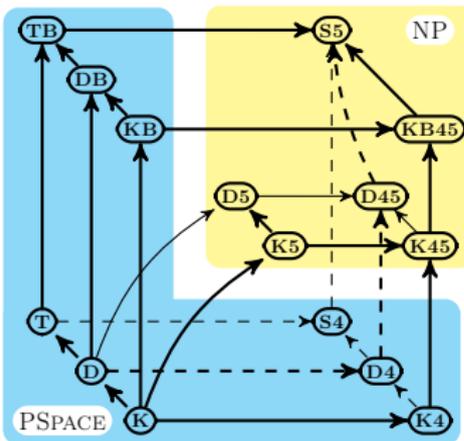
глобальная выполнимость



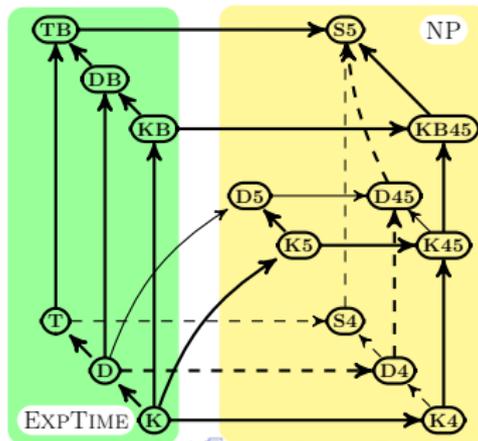
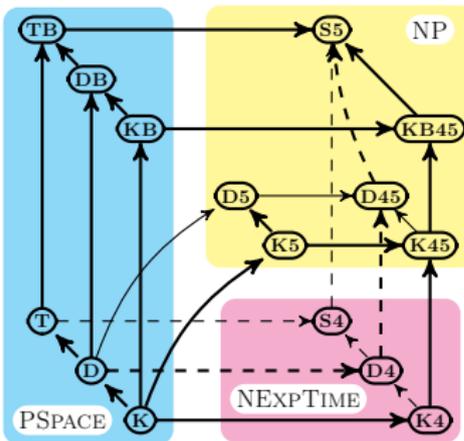
локальная выполнимость

глобальная выполнимость

ML:



GML:



Градуированная временная логика

- Синтаксис *градуированных* временных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \Box^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

Градуированная временная логика

- Синтаксис *градуированных* временных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \heartsuit^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$,

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

$$w \models \heartsuit^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: xRw \text{ и } x \models A$$

Градуированная временная логика

- Синтаксис *градуированных* временных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \diamondleftarrow^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$,

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

$$w \models \diamondleftarrow^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: xRw \text{ и } x \models A$$

- Логика всех **транзитивных** шкал в этом языке: **GRIK4**

Градуированная временная логика

- Синтаксис *градуированных* временных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \Box^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$,

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

$$w \models \Box^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: xRw \text{ и } x \models A$$

- Логика всех **транзитивных** шкал в этом языке: **GRK4**
- В отличие от **K4**, нет полноты относительно деревьев (*tree model property*): $\diamond(p \wedge \Box q) \wedge \Box(\neg p \wedge \Box q) \wedge \Box^{\leq 1} q$ выполнима, но не на древовидных моделях.

Градуированная временная логика

- Синтаксис *градуированных* временных формул:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \diamondleftarrow^{\geq n} A, \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Семантика Крипке: $M = (W, R, \models)$,

$$w \models \diamond^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: wRx \text{ и } x \models A$$

$$w \models \diamondleftarrow^{\geq n} A \quad \Leftrightarrow \quad \exists^{\geq n} x: xRw \text{ и } x \models A$$

- Логика всех **транзитивных** шкал в этом языке: **GRK4**
- В отличие от **K4**, нет полноты относительно деревьев (*tree model property*): $\diamond(p \wedge \diamond q) \wedge \diamond(\neg p \wedge \diamond q) \wedge \diamond^{\leq 1} q$ выполнима, но не на древовидных моделях.
- В отличие от **GRK4**, нет полноты относительно конечных шкал (*finite model property*): $\neg p \wedge \Box(\diamond p \wedge \diamondleftarrow^{\leq 1} \top)$ выполнима, но не на конечных моделях, где $\Box A = A \wedge \Box A$.

Основной результат: неразрешимость $\text{GrI}K4$

Theorem (Е.Е. Золин)

Для любой логики $K4 \subseteq L \subseteq S4$, в логике $\text{GrI}L$ неразрешимы:

- проблема локальной выполнимости и (2011)
- проблема глобальной выполнимости (2007)

Основной результат: неразрешимость $GrIK4$

Theorem (Е.Е. Золин)

Для любой логики $K4 \subseteq L \subseteq S4$, в логике $Gr I L$ неразрешимы:

- проблема локальной выполнимости и (2011)
- проблема глобальной выполнимости (2007)

Связь между локальной и глобальной выполнимостью:

A локально выполнима $\iff \diamond_{new} A$ глобально выполнима

Основной результат: неразрешимость $\text{GrI}K4$

Theorem (Е.Е. Золин)

Для любой логики $K4 \subseteq L \subseteq S4$, в логике $\text{GrI}L$ неразрешимы:

- проблема локальной выполнимости и (2011)
- проблема глобальной выполнимости (2007)

Связь между локальной и глобальной выполнимостью:

A локально выполнима $\iff \diamond_{\text{new}} A$ глобально выполнима

- Значит, локальная выполнимость в логике L сводится к глобальной выполнимости в логике $K \oplus L$

Основной результат: неразрешимость $\text{GrI}K4$

Theorem (Е.Е. Золин)

Для любой логики $K4 \subseteq L \subseteq S4$, в логике $\text{GrI}L$ неразрешимы:

- проблема локальной выполнимости и (2011)
- проблема глобальной выполнимости (2007)

Связь между локальной и глобальной выполнимостью:

A локально выполнима $\iff \diamond_{\text{new}} A$ глобально выполнима

- Значит, локальная выполнимость в логике L сводится к глобальной выполнимости в логике $K \oplus L$
- **Теорема (Wolter, 1998)** Если глобальная выполнимость в L_1 и L_2 разрешима, то она разрешима и в $L_1 \oplus L_2$.

Основной результат: неразрешимость $\text{GrI}K4$

Theorem (Е.Е. Золин)

Для любой логики $K4 \subseteq L \subseteq S4$, в логике Gr I L неразрешимы:

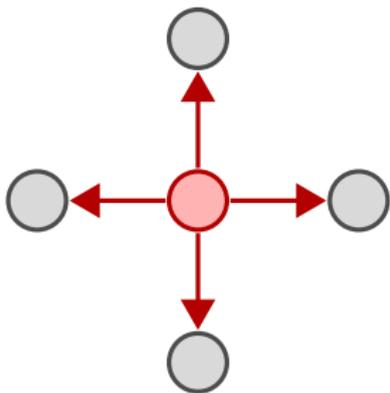
- проблема локальной выполнимости и (2011)
- проблема глобальной выполнимости (2007)

Связь между локальной и глобальной выполнимостью:

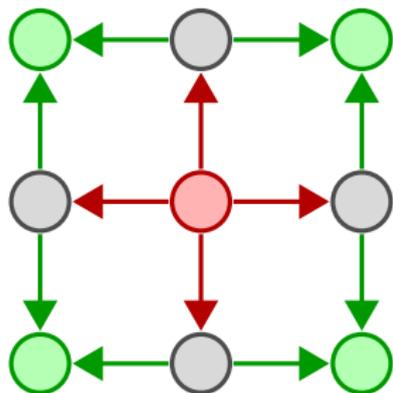
A локально выполнима $\iff \diamond_{\text{new}} A$ глобально выполнима

- Значит, локальная выполнимость в логике L сводится к глобальной выполнимости в логике $K \oplus L$
- **Теорема (Wolter, 1998)** Если глобальная выполнимость в L_1 и L_2 разрешима, то она разрешима и в $L_1 \oplus L_2$.
- Поэтому результат 2011 г. усиливает результат 2007 г.

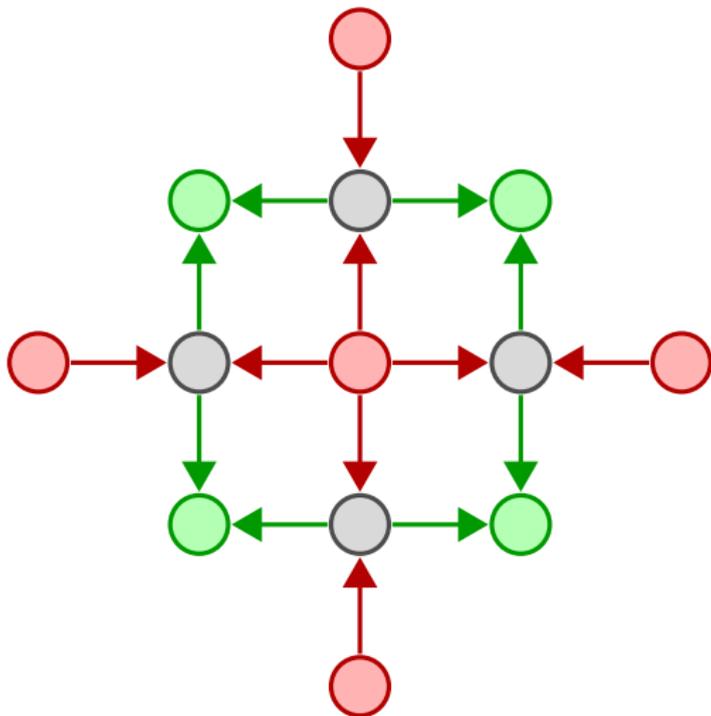
The roads we take, the grids we tile...



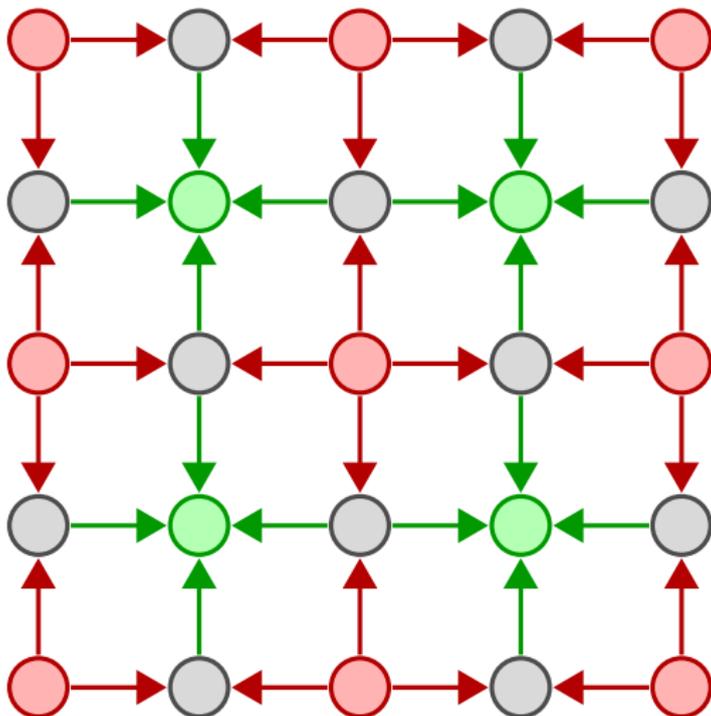
The roads we take, the grids we tile...



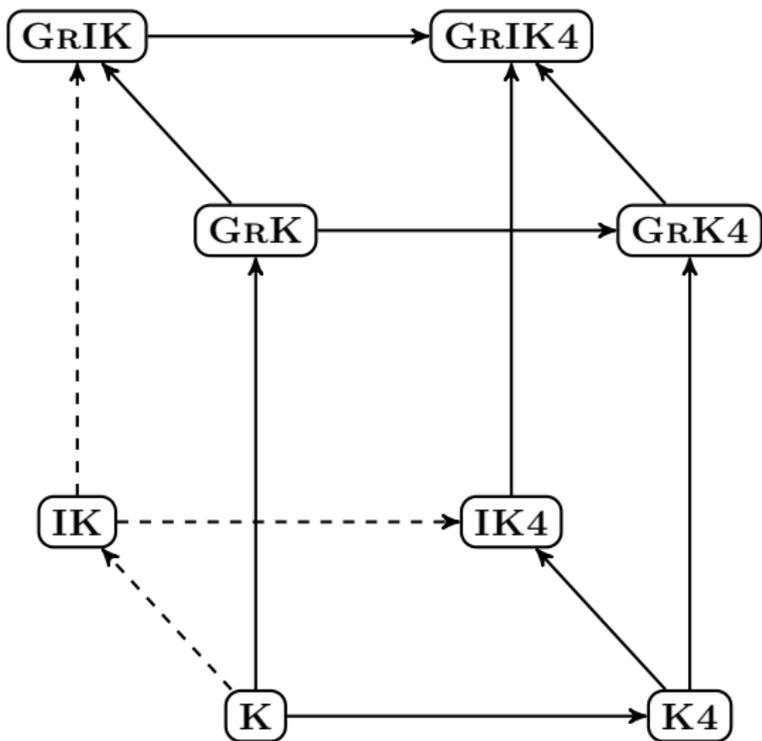
The roads we take, the grids we tile...



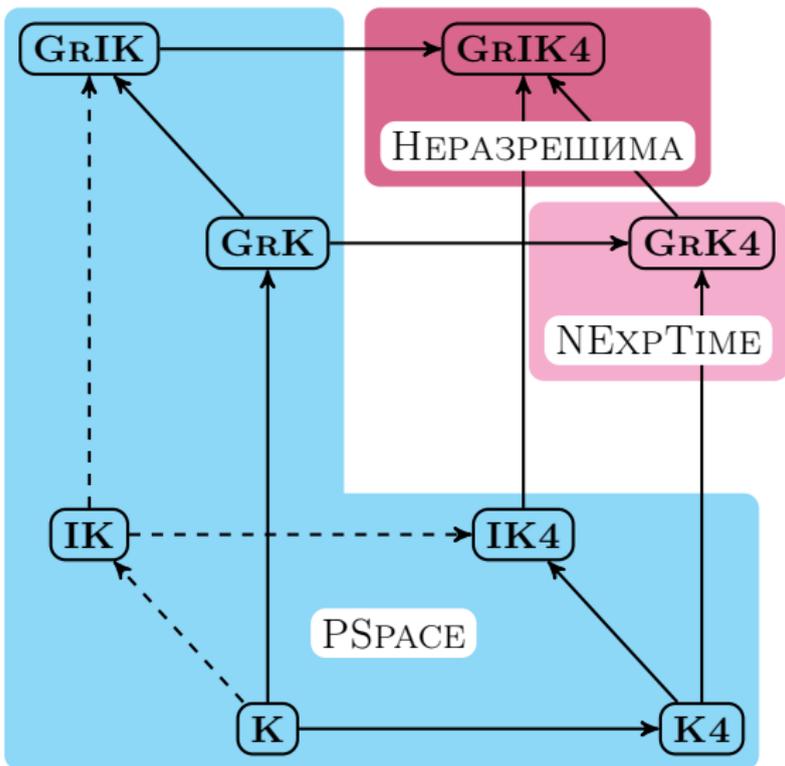
The roads we take, the grids we tile...



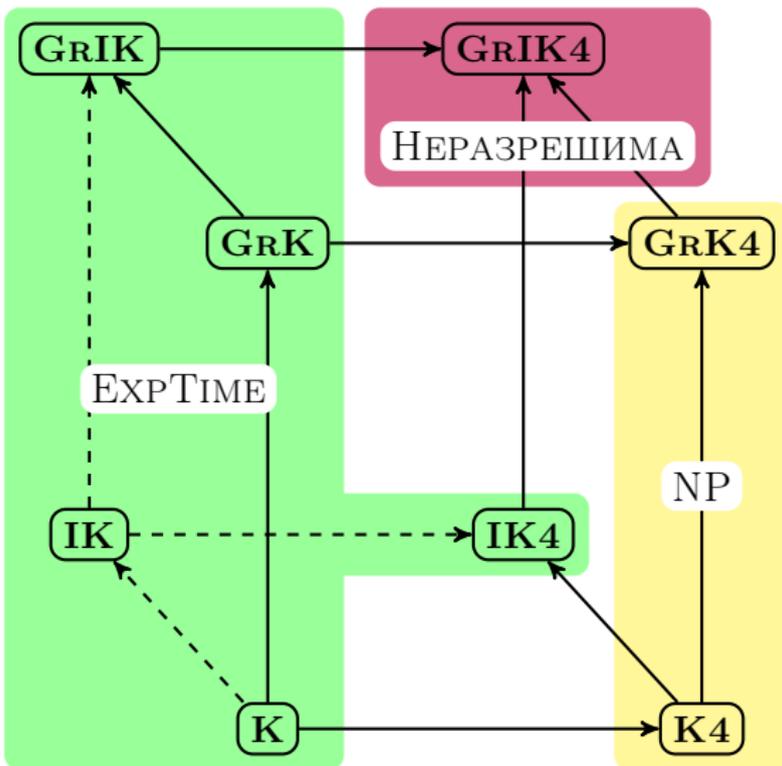
Фрагменты логики GRIK4



Сложность фрагментов GRIK4: локальная выполнимость

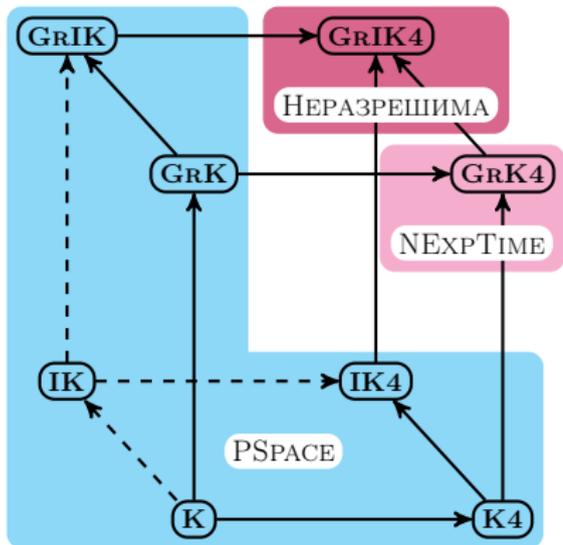


Сложность фрагментов **GrIK4**: глобальная выполнимость

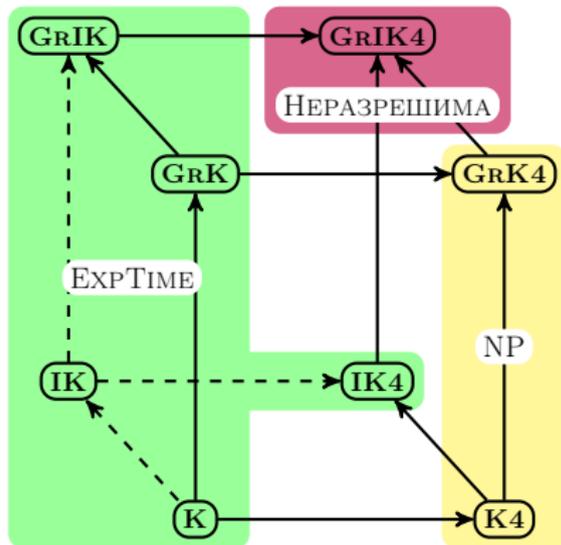


Сложность фрагментов **GrIK4**: сравнение

локальная выполнимость



глобальная выполнимость



Связь с представлением знаний

- Для представления знаний используют [Description Logics](#)
- ML и DL говорят на одном языке (!), об одних структурах — моделях Крипке (!!), но имеют разную “парадигму”:

Связь с представлением знаний

- Для представления знаний используют **Description Logics**
- ML и DL говорят на одном языке (!), об одних структурах — моделях Крипке (!!), но имеют разную “парадигму”:
ML (модальная логика):
 - **точки** — возможные миры, состояния выч. системы, ...
 - **отношение** — достижимость на мирах, переходы из состояния в состояние в процессе вычисления, ...
 - **пропозициональные переменные** — утверждения, истинные в том или ином мире / состоянии.

Связь с представлением знаний

- Для представления знаний используют **Description Logics**
- ML и DL говорят на одном языке (!), об одних структурах — моделях Крипке (!!), но имеют разную “парадигму”:
ML (модальная логика):
 - **точки** — возможные миры, состояния выч. системы, ...
 - **отношение** — достижимость на мирах, переходы из состояния в состояние в процессе вычисления, ...
 - **пропозициональные переменные** — утверждения, истинные в том или ином мире / состоянии.
- DL (дескрипционная логика):
 - **точки** — это объекты (люди, организации, должности, гены, клетки, органы, проекты, самолеты)
 - **отношения** — двуместные отношения на объектах:
 - человек x является ребенком (R) человека y
 - сотрудник x работает в (S) организации y
 - **пропозициональные переменные** — одноместные свойства объектов: Человек(x), Университет(x), Сердце(x) ...

Как записывают понятия и утверждения в DL

- люди, имеющие ребенка, являющегося студентом:
 $\text{Human} \wedge \exists \text{hasChild. Student}$

Как записывают понятия и утверждения в DL

- люди, имеющие ребенка, являющегося студентом:

$\text{Human} \wedge \exists \text{hasChild}.\text{Student}$

$H \wedge \diamond_c S$

Как записывают понятия и утверждения в DL

- люди, имеющие ребенка, являющегося студентом:

$\text{Human} \wedge \exists \text{hasChild}.\text{Student}$

$H \wedge \diamond_c S$

- женщины, имеющие ≥ 2 сыновей либо ≤ 3 дочерей:

$\text{Woman} \wedge (\exists^{\geq 2} \text{hasChild}.\text{Male} \vee \exists^{\leq 3} \text{hasChild}.\text{Female})$

Как записывают понятия и утверждения в DL

- люди, имеющие ребенка, являющегося студентом:

$\text{Human} \wedge \exists \text{hasChild}.\text{Student}$

$H \wedge \diamond_c S$

- женщины, имеющие ≥ 2 сыновей либо ≤ 3 дочерей:

$\text{Woman} \wedge (\exists^{\geq 2} \text{hasChild}.\text{Male} \vee \exists^{\leq 3} \text{hasChild}.\text{Female})$

$W \wedge (\diamond_c^{\geq 2} M \vee \diamond_c^{\leq 3} F)$

Как записывают понятия и утверждения в DL

- люди, имеющие ребенка, являющегося студентом:

$\text{Human} \wedge \exists \text{hasChild}.\text{Student}$

$H \wedge \diamond_c S$

- женщины, имеющие ≥ 2 сыновей либо ≤ 3 дочерей:

$\text{Woman} \wedge (\exists^{\geq 2} \text{hasChild}.\text{Male} \vee \exists^{\leq 3} \text{hasChild}.\text{Female})$

$W \wedge (\diamond_c^{\geq 2} M \vee \diamond_c^{\leq 3} F)$

- женщины, у которых родитель — профессор, все студенты которого холосты:

$\text{Woman} \wedge \exists \text{hasChild}^-. (\text{Professor} \wedge \forall \text{hasStudent}.\neg \text{Married})$

Как записывают понятия и утверждения в DL

- люди, имеющие ребенка, являющегося студентом:

$Human \wedge \exists \text{hasChild}.Student$

$H \wedge \diamond_c S$

- женщины, имеющие ≥ 2 сыновей либо ≤ 3 дочерей:

$Woman \wedge (\exists^{\geq 2} \text{hasChild}.Male \vee \exists^{\leq 3} \text{hasChild}.Female)$

$W \wedge (\diamond_c^{\geq 2} M \vee \diamond_c^{\leq 3} F)$

- женщины, у которых родитель — профессор, все студенты которого холосты:

$Woman \wedge \exists \text{hasChild}^-. (Professor \wedge \forall \text{hasStudent}. \neg Married)$

$W \wedge \diamond_c (P \wedge \square_s \neg M)$

Как записывают понятия и утверждения в DL

- люди, имеющие ребенка, являющегося студентом:

$\text{Human} \wedge \exists \text{hasChild}.\text{Student}$

$H \wedge \diamond_c S$

- женщины, имеющие ≥ 2 сыновей либо ≤ 3 дочерей:

$\text{Woman} \wedge (\exists^{\geq 2} \text{hasChild}.\text{Male} \vee \exists^{\leq 3} \text{hasChild}.\text{Female})$

$W \wedge (\diamond_c^{\geq 2} M \vee \diamond_c^{\leq 3} F)$

- женщины, у которых родитель — профессор, все студенты которого холосты:

$\text{Woman} \wedge \exists \text{hasChild}^-. (\text{Professor} \wedge \forall \text{hasStudent}.\neg \text{Married})$

$W \wedge \diamond_c (P \wedge \square_s \neg M)$

- Утверждение:** Ребенок всякого человека — человек:

$\text{Human} \sqsubseteq \forall \text{hasChild}.\text{Human}$

$H \rightarrow \square_c H$

- Но это **глобальное** утверждение: $\forall x (\text{Human}(x) \rightarrow \dots)$

M считается моделью данного утверждения, если эта модальная формула истинна во всех точках модели M

\Rightarrow требуется понятие **глобальной выполнимости**

Заключение и открытые вопросы

- **Решенные вопросы:**
 - Установлена неразрешимость **GrIK4** и **GrIS4**
 - Найдена сложность их (некоторых) фрагментов

Заключение и открытые вопросы

- **Решенные вопросы:**
 - Установлена неразрешимость **GrIK4** и **GrIS4**
 - Найдена сложность их (некоторых) фрагментов
- **Открытые вопросы:**
 - Разрешимость логики транзитивных шкал в языке:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \diamond A \quad \text{для всех } n \geq 1$$

Заключение и открытые вопросы

- **Решенные вопросы:**

- Установлена неразрешимость **GrIK4** и **GrIS4**
- Найдена сложность их (некоторых) фрагментов

- **Открытые вопросы:**

- Разрешимость логики транзитивных шкал в языке:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \diamond A \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Разрешимость логики трёх транзитивных модальностей:
 $F = (W, R_1, R_2, S)$, где все три отношения транзитивны и
 $R_1 \subseteq S$ и $R_2 \subseteq S$, — в языке: $\diamond_1^{\geq n} A \mid \diamond_2^{\geq n} A \mid \diamond^{\geq n} A$

Заключение и открытые вопросы

- **Решенные вопросы:**

- Установлена неразрешимость **GrIK4** и **GrIS4**
- Найдена сложность их (некоторых) фрагментов

- **Открытые вопросы:**

- Разрешимость логики транзитивных шкал в языке:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \diamond A \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Разрешимость логики трёх транзитивных модальностей:
 $F = (W, R_1, R_2, S)$, где все три отношения транзитивны и
 $R_1 \subseteq S$ и $R_2 \subseteq S$, — в языке: $\diamond_1^{\geq n} A \mid \diamond_2^{\geq n} A \mid \diamond^{\geq n} A$

- Если обратить включения: $R_k \supseteq S$, то логика **неразрешима!**

Заключение и открытые вопросы

- **Решенные вопросы:**

- Установлена неразрешимость **GrIK4** и **GrIS4**
- Найдена сложность их (некоторых) фрагментов

- **Открытые вопросы:**

- Разрешимость логики транзитивных шкал в языке:

$$p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \diamond^{\geq n} A \mid \diamond A \quad \text{для всех } n \geq 1$$

- Разрешимость логики трёх транзитивных модальностей:
 $F = (W, R_1, R_2, S)$, где все три отношения транзитивны и
 $R_1 \subseteq S$ и $R_2 \subseteq S$, — в языке: $\diamond_1^{\geq n} A \mid \diamond_2^{\geq n} A \mid \diamond^{\geq n} A$

- Если обратить включения: $R_k \supseteq S$, то логика **неразрешима!**

Спасибо!