

Динамика твердого тела на деформируемой плоскости с сухим трением

профессор Д.В. Трещев, доцент А.А. Зобова

кафедра теоретической механики и мехатроники,
механико-математический факультет,
МГУ имени М.В.Ломоносова

Ломоносовские чтения, посвященные 260-летию со дня
основания Московского университета,
декабрь 2014 года

План доклада

1. Краткий обзор литературы.
2. Обзор результатов сотрудников кафедры по смежным задачам.
3. Решение задачи о движении шара по вязко-упругой плоскости.
 - 3.1 Постановка задачи.
 - 3.2 Предположения.
 - 3.3 Схема исследования.
 - 3.4 Результаты исследования.
4. Результаты исследований задач о движении тел по поверхностям с трением.

Краткий обзор литературы I

1. Эрисман (1954), Контенсу (1962) [1, 2]. Замена точечного контакта на плоский круговой. Сила и момент трения – результат интегрирования классического сухого трения Кулона в каждой инфинитезимальной области пятна. Нормальные напряжения – решение статической задачи Герца:

$$\sigma_0 = \frac{3N}{2\pi\varepsilon^2\rho_0^2} \sqrt{1-r^2}$$

2. В.А. Самсонов (Вестник МГУ, 1981)[3]. Динамический увод с прямолинейной траектории.
3. В.Ф. Журавлев (ПММ, 1998)[4]. Представление в виде элементарных функций. Аппроксимации Паде.

Краткий обзор литературы II

4. А.П. Иванов (ПММ, 2009)[5]. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела (шайба).

Обзор результатов сотрудников кафедры по смежным задачам I

1. В.Г. Вильке, И.И.Косенко, Е.Б. Александров (Журнал вычислительной математики и матем. физики, 2008, НД, 2009)[18, 19]. Распространение модели Контенсу на тела общего вида (контакт по Герцу)
2. А.В. Карапетян (ПММ, 2009,2010) [6, 7, 8]. Пятно контакта – сферический сегмент. Момент трения качения обеспечивает полную диссипацию.

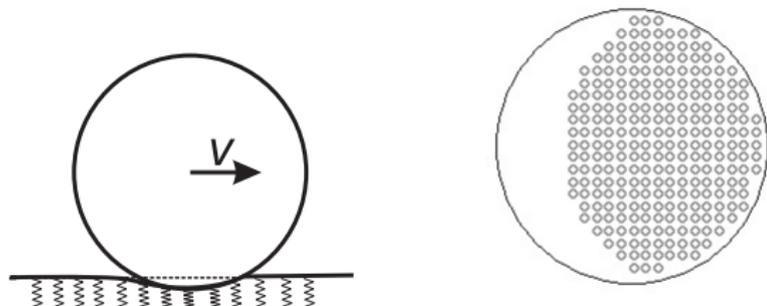
Обзор результатов сотрудников кафедры по смежным задачам II

3. А.В. Карапетян, А.В. Русинова (ПММ, 2011,2013) [9, 10, 11]. Движение диска по наклонной шероховатой плоскости. А.В. Русинова награждена медалью Российской академии наук для студентов высших учебных заведений в области проблем машиностроения, механики и процессов управления.
4. М.А. Муницына, А.В. Карапетян (ПММ 2012,2014, НД 2012) [12, 13, 14]. Динамика эллипсоида на плоскости с трением: зависимость трения от ориентации тела.
5. Т.В. Сальникова, Д.В. Трещев, Галлямов С.Р. (НД 2012)[15]. Динамика диска на горизонтальной плоскости: анализ симметрий, подробный качественный анализ.

Обзор результатов сотрудников кафедры по смежным задачам III

6. А. С. Кулешов, Д. В. Трещев, Т. Б. Иванова, О. С. Наймушина (НД 2011) [16]. Динамика цилиндра на шероховатой прямой.
7. А.А. Зобова, Д.В. Трещев (Труды МИАН, 2013) [17]. Динамика шара на шероховатой плоскости.
8. В.Г.Вильке, Д.С. Мигунова (ПММ, 2011) [20]. Представление опорной плоскости в виде множества стрижней, испытывающий изгибные деформации.
9. Д.В. Трещев (ArXiv, 2013) [21]. Контакт тела с поверхностью со случайным распределением неровностей.

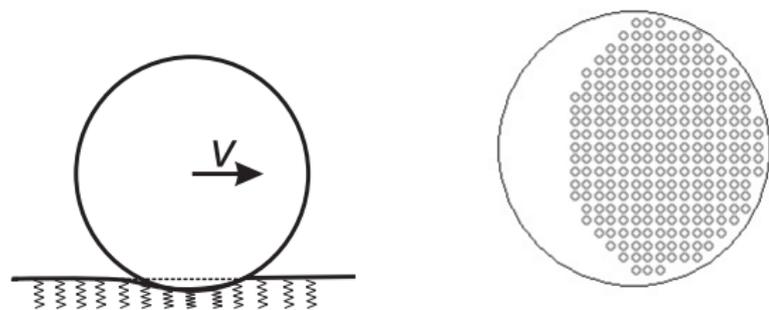
Задача о движении шара по вязко-упругой плоскости [17] I



- ▶ Восстанавливающая сила – закон Кельвина-Фойгта

$$f_z = \begin{cases} -kz - \nu \dot{z}, & \text{если } -kz - \nu \dot{z} > 0, \\ 0, & \text{если } -kz - \nu \dot{z} \leq 0, \end{cases} \quad k > 0, \nu > 0$$

Задача о движении шара по вязко-упругой плоскости [17] II



- ▶ Распределение нормальных давлений

$$\hat{f}_z = \frac{1 - r^2}{2} + \hat{\varepsilon} \frac{r \hat{v} \cos \beta}{\rho_0} + \frac{\hat{\varepsilon} \hat{u}}{\rho_0^2},$$

Задача о движении шара по вязко-упругой плоскости [17] III

Малые параметры:

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{mg}{ka^3}}, \quad \hat{\varepsilon} = \nu \sqrt[4]{\frac{ag}{mk^3}}$$

Предположения. I

1. Безразмерные параметры задачи

$\varepsilon = \left(\frac{mg}{ka^3}\right)^{1/4} \ll 1$, $\kappa = \frac{a^{3/2}v^3g^{1/2}}{k^2m} \sim 1$ (при этом имеем $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon\kappa)^{1/3} \ll 1$). Механический смысл: глубина продавливания шаром плоскости в положении равновесия мала по сравнению с радиусом шара.

2. Пусть в начальный момент выполнено

$$\frac{1}{2} \frac{v_z^2}{\varepsilon^2 ag} + \frac{\pi s^3}{3\varepsilon^6} - \frac{s}{\varepsilon^2} < -c,$$

где c – малая положительная постоянная. Механический смысл: начальное вертикальное отклонение шара от положения равновесия и начальная вертикальная компонента скорости центра масс невелики (тем самым обеспечивается отсутствие отрыва шара от плоскости все время движения).

Предположения. II

- $u|_{t=0} \sim \sqrt{ag}, \omega_{h,z}|_{t=0} \sim \sqrt{g/a}$ — начальная горизонтальная скорость центра масс и угловая скорость шара не слишком велики и не слишком малы по величине. Кроме этого, не уменьшая общности, предположим, что в начальный момент $\omega_z > 0$.
- В начальный момент скорость скольжения $v_s = \sqrt{u^2 - 2au\omega_h \sin \gamma + a^2\omega_h^2} \sim \sqrt{ag}$

Схема исследования.

$$\begin{aligned} f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_z \mathbf{e}_z &= n\mathbf{n} - \lambda n \mathbf{v}^{\parallel} / |\mathbf{v}^{\parallel}| \\ F_z &= \iint_I f_z d\Sigma, \quad F_1 = \iint_I f_1 d\Sigma, \quad F_2 = \iint_I f_2 d\Sigma, \\ \mathbf{M} &= \iint_I [\boldsymbol{\rho}_P \times (f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_z \mathbf{e}_z)] d\Sigma \end{aligned}$$

Все движение шара по плоскости разбивается на этапы, для каждого из которых схема исследования такова:

- ▶ Начало этапа движения: разложить $\mathbf{v}^{\parallel} / |\mathbf{v}^{\parallel}|$ по степеням параметра ε ; выявить существенные слагаемые, определить необходимую точность. Точность аппроксимации зависит от фазовых переменных.
- ▶ Найти плотности сил n , f_1 , f_2 . Вычислить интегралы для сил и моментов.
- ▶ Интегрировать уравнения движения до тех пор, пока точность аппроксимации достаточна.

Начало движения I

Распределение скоростей:

$$\mathbf{v}^{\parallel}/|\mathbf{v}^{\parallel}| = \mathbf{e}_s + O(\varepsilon/\hat{v}_s),$$

Сила реакции плоскости:

$$\hat{F}_z = \pi \hat{s} (\hat{s} + 2\varepsilon \hat{u}) - 2\varepsilon^2 K_1 + O(\varepsilon^3), \quad \hat{s} = \varepsilon^{-2} \theta_0^2 / 2, \quad \hat{u} = \varepsilon \hat{s}'$$

Силы и моменты трения:

$$\hat{F}_s = -\lambda \hat{F}_z + O(\varepsilon/\hat{v}_s), \quad \hat{F}_s^{\perp} = O(\varepsilon/\hat{v}_s).$$

$$\hat{M}_s = O(\varepsilon), \quad \hat{M}_s^{\perp} = O(\varepsilon), \quad \hat{M}_3 = O(\varepsilon).$$

I этап: релаксация вертикальных колебаний.

$$\begin{aligned}\hat{s}' &= \varepsilon^{-1}\hat{u} + O(\varepsilon), \\ \hat{u}' &= -\varepsilon^{-1}\hat{F}_z, \\ \hat{v}_s' &= -\lambda(1+j)\hat{F}_z + O(\varepsilon\hat{v}_s), \\ \hat{v}_s\varphi_s' &= O(\varepsilon/\hat{v}_s), \\ \hat{\omega}'_h &= j\lambda\hat{F}_z \sin \gamma_s + O(\varepsilon/\hat{v}_s) + O(\varepsilon), \\ \hat{\omega}_h(\gamma_s' + \varphi_s') &= j\lambda\hat{F}_z \cos \gamma_s + O(\varepsilon/\hat{v}_s) + O(\varepsilon), \\ \hat{\omega}'_z &= O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Предложение

В течение времени $T_I = O(\varepsilon\hat{\varepsilon}^{-1}|\ln \hat{\varepsilon}|)$ происходит релаксация вертикальных колебаний центра масс шара. В конце I этапа имеем

$$\hat{u} = \hat{\varepsilon}^2 \tilde{u}(\tau), \quad \hat{s} = \hat{s}_* + \hat{\varepsilon}^2 \tilde{s}(\tau),$$



II этап: движение с быстрым проскальзыванием I

Скорость проскальзывания $\hat{v}_s \sim 1$,

$$\mathbf{v}^{\parallel}/|\mathbf{v}^{\parallel}| = \mathbf{e}_s + O(\varepsilon/\hat{v}_s),$$

$$\hat{F}_s = -\lambda\hat{F}_z + O(\varepsilon/\hat{v}_s), \quad \hat{F}_s^{\perp} = O(\varepsilon/\hat{v}_s).$$

$$\hat{v}'_s = -(1+j)\lambda + O(\varepsilon/\hat{v}_s),$$

$$\hat{v}_s\varphi'_s = O(\varepsilon/\hat{v}_s),$$

$$\hat{\omega}'_h = j\lambda \sin \gamma_s + O(\varepsilon/\hat{v}_s),$$

$$\hat{\omega}_h(\gamma'_s + \varphi'_s) = j\lambda \cos \gamma_s + O(\varepsilon/\hat{v}_s),$$

$$\hat{\omega}'_z = O(\varepsilon).$$

II этап: движение с быстрым проскальзыванием II

Предложение

В течение времени $T_{II} = \frac{j\hat{v}_s^0}{\lambda(1+j)} + O(\hat{\varepsilon}^2) \sim 1$ задача описывается уравнениями движения шара с классическим трением Кулона с точностью до $O(\varepsilon/\hat{v}_s)$. Ее решение

$$\begin{aligned}\hat{v}_s(\tau) &= -(1+j)\lambda\tau + \hat{v}_s^0, \\ \varphi_s(\tau) &\equiv \varphi_s^0, \\ \hat{\omega}_h(\tau) \sin(\gamma_s(\tau)) &= j\lambda\tau + \hat{\omega}_h^0 \sin \gamma_s^0, \\ \hat{\omega}_h(\tau) \cos(\gamma_s(\tau)) &\equiv \hat{\omega}_h^0 \cos \gamma_s^0, \\ \hat{\omega}_z(\tau) &\equiv \hat{\omega}_z^0.\end{aligned}$$

Центр масс движется по параболе. Точность аппроксимации становится недостаточной, когда $\hat{v}_s = O(\hat{\varepsilon}^2)$

III этап: движение с медленным проскальзыванием I

Введем обозначения: $\hat{v}_s = \varepsilon \tilde{v}_s$, $\theta = \varepsilon \rho_0 r$

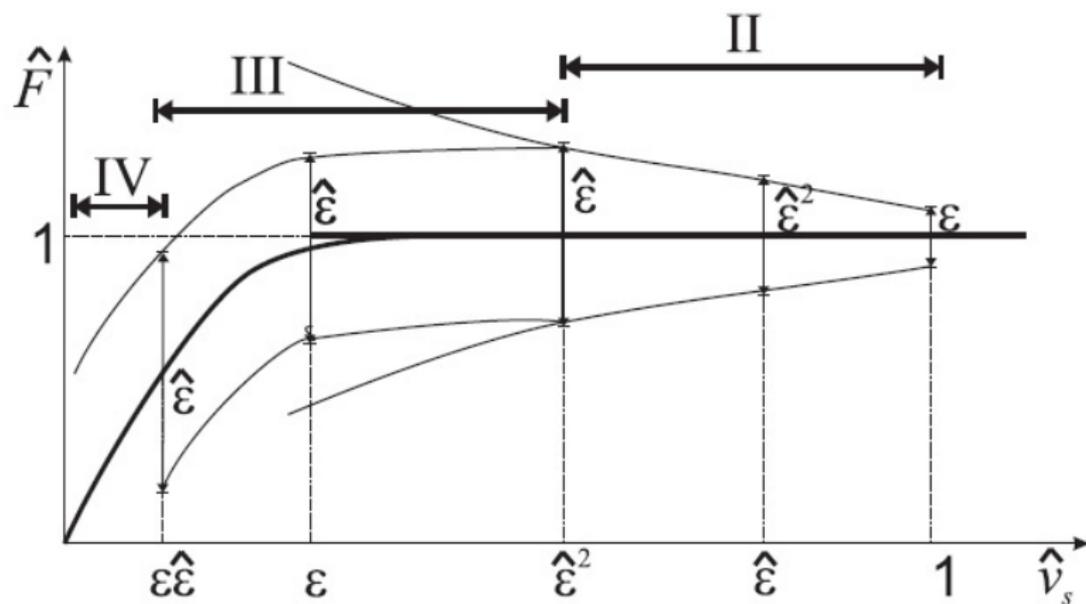
$$\mathbf{v}^{\parallel} = \varepsilon \sqrt{ag} \left((\tilde{v}_s + \rho_0 r (-\hat{\omega}_z \sin \beta_s + \varepsilon \hat{u} \cos \beta_s)) \mathbf{e}_s + \right. \\ \left. + \rho_0 r (\hat{\omega}_z \cos \beta_s + \varepsilon \hat{u} \sin \beta_s) \mathbf{e}_s^{\perp} + O(\varepsilon) \right).$$

Суммарная сила трения:

$$\hat{F}_s = -\lambda \rho_0^4 \iint_I \left(\frac{1-r^2}{2} + \hat{\varepsilon} \frac{r \hat{v} \cos \beta}{\rho_0} \right) \frac{\tilde{v}_s - \rho_0 r \hat{\omega}_z \sin \beta_s}{V^{\parallel}} r dr d\beta + O\left(\frac{\varepsilon}{V^{\parallel}}\right),$$

$$\hat{F}_s^{\perp} = -\lambda \rho_0^4 \iint_I \left(\frac{1-r^2}{2} + \hat{\varepsilon} \frac{r \hat{v} \cos \beta}{\rho_0} \right) \frac{\rho_0 r \hat{\omega}_z \cos \beta_s}{V^{\parallel}} r dr d\beta + O\left(\frac{\varepsilon}{V^{\parallel}}\right).$$

III этап: движение с медленным проскальзыванием II



III этап: движение с медленным проскальзыванием III

Предложение

В течение времени $T_{III} = O(\varepsilon \hat{\varepsilon}^{-1}) + O(\varepsilon |\ln \hat{\varepsilon}|)$ скорость проскальзывания уменьшается, начиная с величины порядка $\hat{\varepsilon}^2$ до величины порядка $\varepsilon \hat{\varepsilon}$. Сила трения F_s имеет характер модели Контену-Эрисмана. Перпендикулярная сила имеет порядок $\varepsilon \hat{\varepsilon}$, моменты вращения и качения порядок ε и $\hat{\varepsilon} \varepsilon$ соответственно. Точность аппроксимации становится недостаточной, когда $\hat{v}_s = O(\hat{\varepsilon} \varepsilon)$

IV этап: качение почти без проскальзывания I

Скорость проскальзывания $\hat{\mathbf{v}}_s \mathbf{e}_s = \varepsilon \hat{\varepsilon} (\check{\nu}_{s1} \mathbf{e}_1 + \check{\nu}_{s2} \mathbf{e}_2)$, $\check{\nu}_s \sim 1$.

$$\nu_1 = \frac{\check{\nu}_{s1}}{\hat{\omega}_z}, \quad \nu_2 = \frac{\check{\nu}_{s2}}{\hat{\omega}_z}.$$

Силы и моменты:

$$\hat{F}_1 = -\lambda \hat{\varepsilon} \frac{\pi \rho_0^3}{3} \nu_1 \left(1 + O(\nu_1 \hat{\varepsilon})\right) + \frac{2\varepsilon \lambda \rho_0 \hat{\nu}}{15 \hat{\omega}_z} - \varepsilon \hat{\varepsilon} \hat{\nu} + O(\varepsilon \hat{\varepsilon}^2),$$

$$\hat{F}_2 = -\lambda \hat{\varepsilon} \frac{\pi \rho_0^3}{3} (\hat{\nu} + \nu_2) + O(\hat{\varepsilon}^2),$$

$$\hat{M}_1 = O(\varepsilon^3), \quad \hat{M}_2 = -\varepsilon \hat{\varepsilon} \hat{\nu} + O(\varepsilon \hat{\varepsilon}^2),$$

$$\hat{M}_z = -\lambda \varepsilon \rho_0 \left(\frac{8}{15} - \frac{\hat{\varepsilon}^2 \sqrt{\pi} \hat{\nu}^2}{2} - \frac{2\hat{\varepsilon}^2 \pi \rho_0^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{3} \right) + O(\varepsilon \hat{\varepsilon}^3).$$

IV этап: качение почти без проскальзывания II

Динамические уравнения

$$\begin{aligned}\hat{v}' &= \hat{F}_1, \\ v_1' &= \frac{1}{\varepsilon \hat{\varepsilon} \hat{\omega}_z} \left((1+j) \hat{F}_1 - j \hat{M}_2 + \varepsilon \hat{\varepsilon} \frac{\nu_2 \hat{\omega}_z}{\hat{v}} \hat{F}_2 \right) - \frac{\nu_1}{\hat{\omega}_z} \hat{M}_z, \\ v_2' &= \frac{1}{\varepsilon \hat{\varepsilon} \hat{\omega}_z} \left(j \hat{F}_2 + j \hat{M}_1 - \varepsilon \hat{\varepsilon} \frac{\nu_1 \hat{\omega}_z}{\hat{v}} \hat{F}_2 \right) - \frac{\nu_2}{\hat{\omega}_z} \hat{M}_z, \\ \hat{\omega}_z' &= \hat{M}_z.\end{aligned}$$

Предложение

IV этап: качение почти без проскальзывания III

(а) В течение времени $\tau = O(\varepsilon \log \hat{\varepsilon})$ переменные ν_1, ν_2 попадают в область

$$\left| \nu_1 - \frac{\varepsilon}{\hat{\varepsilon}} \mathcal{B} \right| < \frac{c\varepsilon}{\hat{\omega}_z}, \quad |\nu_2 + \hat{\nu}| < c\hat{\varepsilon}, \quad \mathcal{B} = \frac{2\hat{\nu}}{5\pi\rho_0^2\hat{\omega}_z}. \quad (0.1)$$

и остаются в ней пока выполнено неравенство

$$|\hat{\nu}| > \varepsilon^2 \hat{\varepsilon}^2. \quad (0.2)$$

(б) Угловая скорость вращения $\hat{\omega}_z$ убывает в соответствии с уравнением

$$\hat{\omega}'_z = -\frac{8\lambda\varepsilon\rho_0}{15} \left(1 - \frac{\varepsilon^2\hat{\nu}^2}{5\pi\rho_0^2\hat{\omega}_z^2} + O(\hat{\varepsilon}^2) \right). \quad (0.3)$$

(в) Скорость центра масс $\hat{\nu}$ убывает в соответствии с уравнением

$$\hat{\nu}' = -\frac{j}{j+1} \varepsilon \hat{\varepsilon} \hat{\nu} + O(\varepsilon \hat{\varepsilon}^2).$$

Предложение

В фазовом пространстве за время порядка $O(\varepsilon \ln \hat{\varepsilon})$ происходит выход в окрестность инвариантного многообразия:

$$F_{horizontal} = F_{viscous} + F_{dyn}; \quad F_{viscous} = -\lambda \hat{\varepsilon} \frac{\pi \rho_0^3}{3} \frac{\check{v}_s}{\omega_z}, \quad F_{dyn} = -\lambda \hat{\varepsilon} \frac{\pi \rho_0^3}{3} \hat{v}$$

Далее изображающая точка остается в окрестности этой траектории вплоть до остановки шара:

$$M_2 = -C_1 \varepsilon \hat{\varepsilon} \omega_h, \quad M_z = -C_2 \varepsilon \left(1 - \frac{C_3 \varepsilon^2 v^2}{\omega_z^2} \right).$$

Скорость центра масс шара убывает экспоненциально за время $T_{IV} = O(\varepsilon^{-1} \hat{\varepsilon} - 1 |\ln \hat{\varepsilon}|)$

$$\hat{v}' = -\frac{j}{i+1} \varepsilon \hat{\varepsilon} \hat{v} + O(\varepsilon \hat{\varepsilon}^2).$$



Результаты исследования

Проведен анализ движения шара по плоскости: выделены существенные этапы, оценен порядок аппроксимации на каждом из них. Анализ движения доведен до почти полной остановки шара. Этот анализ позволяет оценить область применимости классических моделей (сухое трение Кулона, неголономная модель).

Результаты исследований задач о движении тел по поверхностям с трением

1. Проведен полный качественный анализ движения цилиндра по прямой, шайбы и шара по плоскости.
2. Рассматриваются задачи о движении тел более сложной формы по плоскости.
3. Разрабатываются методы решения задач о движении тел по поверхностям со сложными моделями трения (поликомпонентные модели, динамически совместные модели).
4. Рассматриваются вопросы применения таких моделей трения в системах численного моделирования динамики систем абсолютно твердых тел.
5. Возникают новые постановки задач на стыке теоретической механики и теории вероятностей.

Литература I

-  Erismann Th., Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes. Z.Angew.Mat.Phys. 1954, 5, No.5, 355-388.
-  Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la theorie de la toupie. Kreiselsprobleme. Gyrodynamics. Symp. Celerina, 1962. Derlin etc.: Springer, 1963. = Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. Проблемы гироскопии. М.:Мир, 1967, С.60–77.
-  Самсонов В.А. О трении при скольжении и верчении тела // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 1981. №2. С. 76–78.

Литература II

-  Журавлев В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762-767.
-  Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ. 2009. №2. С. 189-203.
-  Карапетян А.В. Двухпараметрическая модель трения и ее свойства // ПММ. 2009. Т.73. №4. С.515-519.
-  Карапетян А.В. О моделировании сил трения в динамике шара на плоскости // ПММ. 2010. Т.75. №4. С.531–535.
-  Ишханян М.В., Карапетян А.В. Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с учетом трения скольжения, верчения и качения // МТТ. 2010. №2. С.3–14.

Литература III

-  Карапетян А. В., Русинова А. М. Качественный анализ динамики диска на наклонной плоскости с трением // ПММ. 2011. Т. 75. № 5. С. 731–737.
-  Русинова А.М. О динамике диска на наклонной плоскости с трением в рамках динамически совместной модели трения // ПММ. 2011. Т. 75. № 3. С. 396–401.
-  Русинова А.М. О динамике однородной шайбы на наклонной плоскости с трением // ПММ. 2013. Т.77.№ 4.С. 538–544.
-  Муницына М. А. Движения сфероида на горизонтальной плоскости с вязким трением // ПММ. 2012. Т. 76. № 2. С.214-223.

Литература IV

-  Муницина М. А. Модель трения в случае плоского эллиптического контакта тела с опорной плоскостью // Нелинейная динамика. 2012. Т.8, № 4. С. 705-712.
-  Карапетян А. В., Муницина М. А. Динамика неоднородного эллипсоида на горизонтальной плоскости // ПММ. 2014. Т. 78. № 3. С. 328–333.
-  Сальникова Т. В., Трещев Д. В., Галлямов С. Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 83–101.

Литература V

-  Кулешов А.С., Трещев Д.В., Иванова Т.Б., Наймушина О.С. Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости // Нелинейная динамика. 2011. Т.7. № 3. С. 601-625.[1], “Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости,” Нелинейная динамика, vol. 7, no. 3, pp. 601–625, 2011.
-  Зобова А.А., Трещев Д.В. Шар на вязкоупругой плоскости // Труды МИАН. 2013. Т. 281. С. 98–126.
-  Александров Е.Б., Вильке В.Г., Косенко И.И. Контактная задача Герца: численная редукция и объемометрическая модификация // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 12. С. 2195–2211.

Литература VI

-  Косенко И.И., Александров Е.Б. Реализация модели Контенсу–Эрисмана касательных сил в контактной задаче Герца // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 4. С. 499–517.
-  В. Г. Вильке, Д. С. Мигунова. (ПММ2011) О движении мяча по травяному газону // ПММ. 2011. Т. 75. №75. С. 801–812.
-  D. V. Treschev, “On the support of a body by a surface with random roughness,” <http://arxiv.org/pdf/1305.4012.pdf>, 2013.