

О саратовской школе

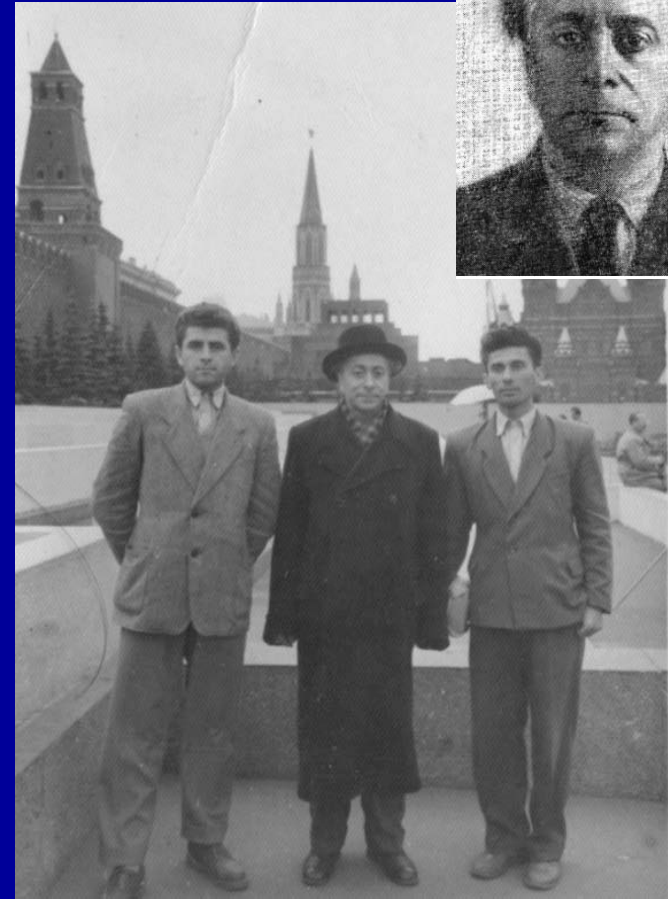
Савелия Владимировича Фальковича

в области трансзвуковых течений



1972





Исследованиями по трансзвуковой тематике крупный советский ученый С.В. Фалькович (1911–1982) занялся в годы своей работы в Институте механики АН СССР (1944–1949). Многие тогда было сделано им в соавторстве с Ф.И. Франклем и легло с основу трансзвуковой теории. Получили известность закон околосвукового подобия Кармана-Фальковича, переменные Фальковича, уравнение Кармана-Гудерля-Фальковича (уравнение КГФ).



ПРОЛЕТАРИИ
ВСЕХ СТРАН СОЗДАЙТЕСЯ





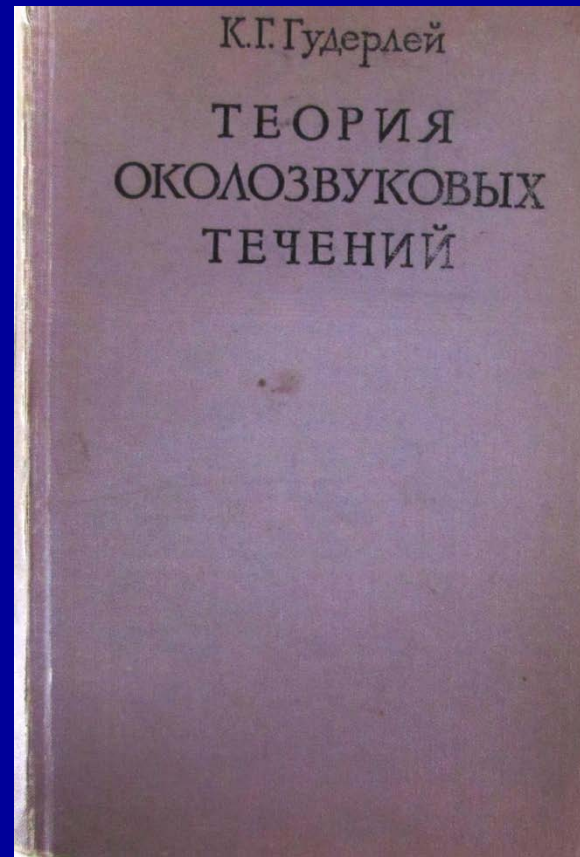
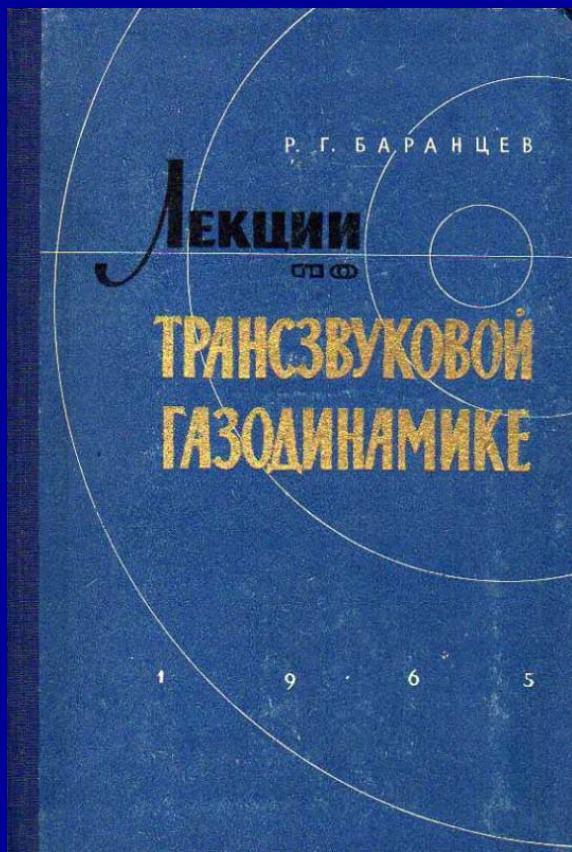
Исследования в этой области были продолжены по возвращению С.В. Фальковича в 1949 году в Саратов. В дальнейшем Саратовская научная школа профессора С.В. Фальковича внесла большой вклад в исследование околозвуковых течений газа.



Результаты проведенных в Саратове под руководством С.В. Фальковича, в соавторстве с ним и без такового, исследований по околозвуковой тематике публиковались, в том числе, и в межвузовских сборниках – «Трансзвуковые течения газа» и «Аэродинамика», издававшихся Саратовским государственным университетом.



В.А. Иванов, Г.Д. Севостьянов, Г.П. Шиндяпин, О.М. Сапункова, Я.Г. Сапунков,
И.А. Чернов, С.В. Фалькович, И.Г. Чудаков, А.А. Орел.
Стоят Н.Г. Больман, А.И. Карагодов



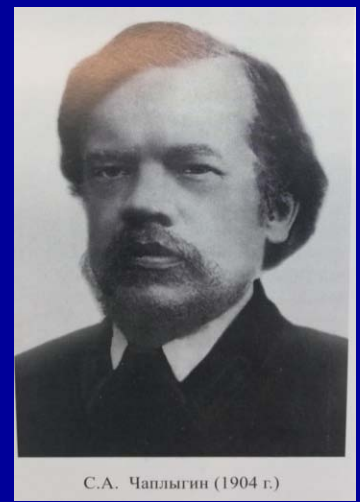
Ко времени выхода в свет первого сборника (1964) для трансзвуковых течений уже были известны:

- неприемлемость линейной теории для стационарного трансзвукового режима (при анализе в физических переменных);

$$-(\gamma + 1)\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

Плоскость годографа

Уравнения Чаплыгина



С.А. Чаплыгин (1904 г.)

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Функция тока

$$d\psi = \rho u dy - \rho v dx$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u$$

Потенциал скорости

$$d\phi = u dx + v dy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial V} \right) - V \frac{d}{dV} \frac{1}{\rho V} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

V, θ - переменные годографа

- линейность уравнений плоского стационарного безвихревого трансзвукового течения в переменных годографа (возможности этого метода исследования существенно ограничены трудностями выставления адекватных граничных условий и исключительно плоской геометрией исследуемого процесса);

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = - \frac{1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} V}{2V(1 - V)^{\gamma/(\gamma - 1)}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{2V}{(1 - V)^{1/(\gamma - 1)}} \frac{\partial \psi}{\partial V}$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{2V}{(1 - V)^{1/(\gamma - 1)}} \frac{\partial \psi}{\partial V} \right) + \frac{1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} V}{2V(1 - V)^{\gamma/(\gamma - 1)}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

- смешанный (эллиптико-гиперболический) тип уравнений трансзвукового течения для стационарного режима;

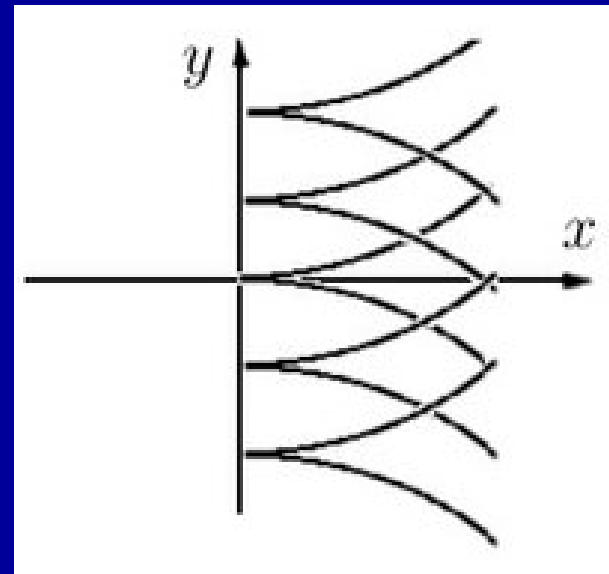
$$-\left(M^2 - 1 + \varphi_x\right)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

$$\left(M^2 - 1 + \varphi_x\right) > 0$$

Сверхзвук - гиперболичность

$$\left(M^2 - 1 + \varphi_x\right) < 0$$

Дозвук - эллиптичность



- вид параметра трансзвукового подобия;

$$(a^2 - \Phi_X^2) \Phi_{XX} + 2\Phi_X \Phi_Y \Phi_{XY} + (a^2 - \Phi_Y^2) \Phi_{YY} = 0$$

Уравнение для потенциала

$$\frac{1}{2}(\Phi_X^2 + \Phi_Y^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{U^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1}$$

Уравнение Бернулли

Трансзвуковое разложение

$$\delta \ll 1$$

$$Lx = X$$

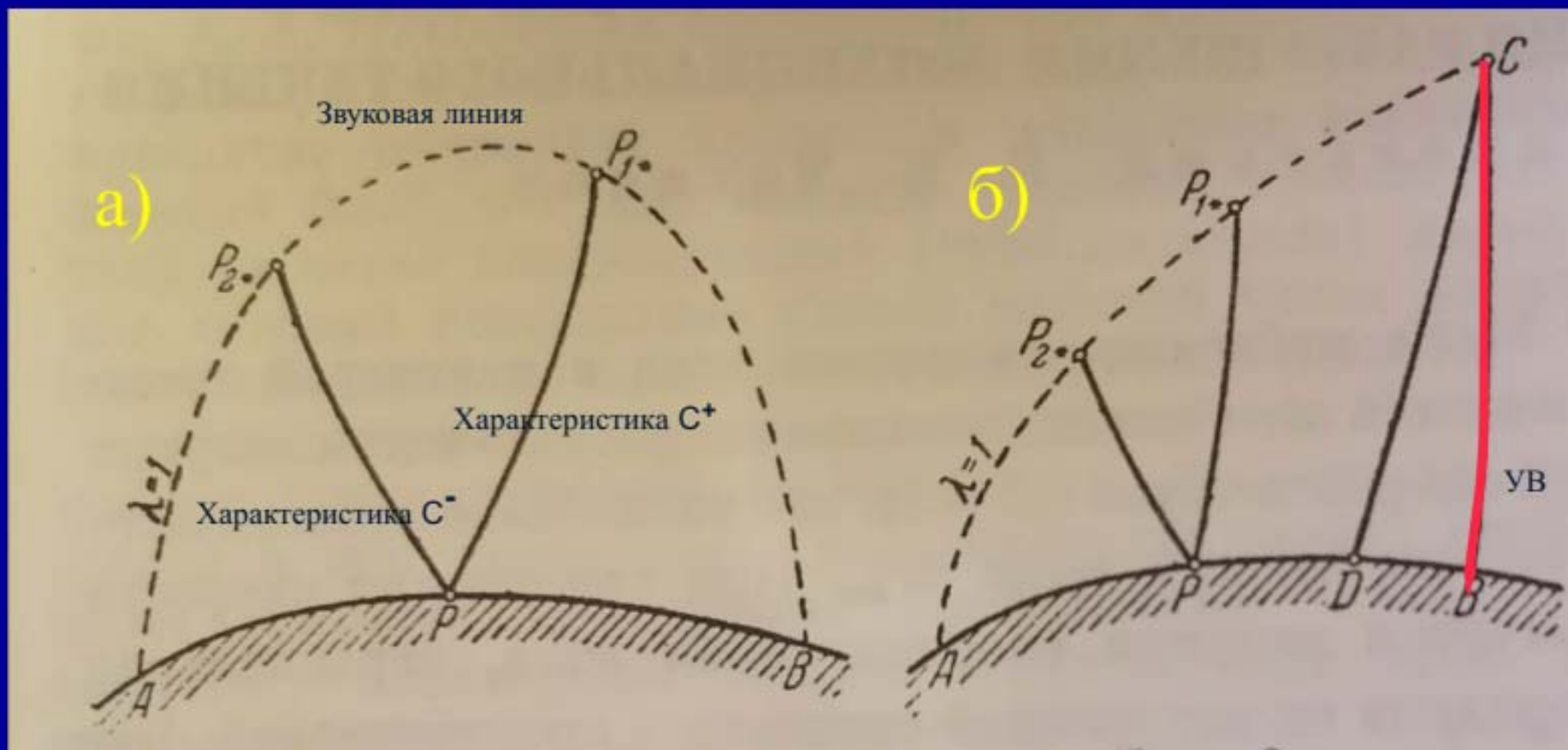
$$Ly = \delta^{1/3} Y$$

$$\Phi = U(Lx + \delta^{2/3} L\phi(x, y, t) + \dots)$$

$$(K - (\gamma + 1)\phi_x)\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

$$K = \frac{1 - M_\infty^2}{\delta^{2/3}}$$

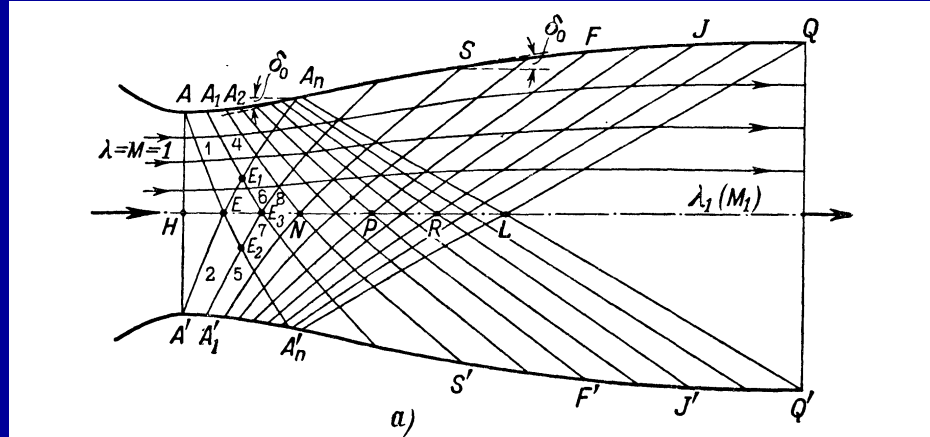
- ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОСТЬ НЕПРЕРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ В МЕСТНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНЕ;



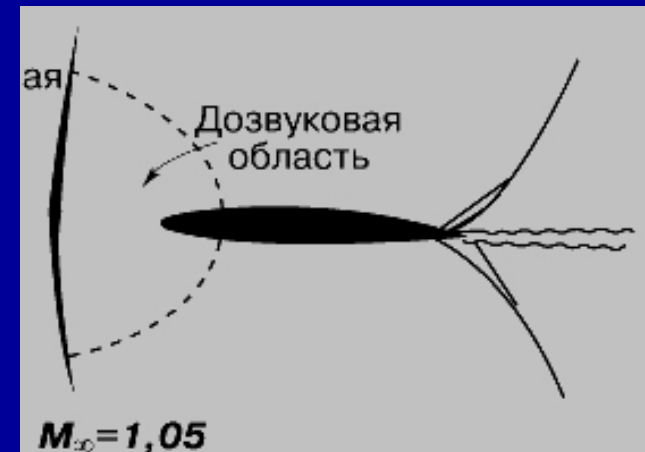
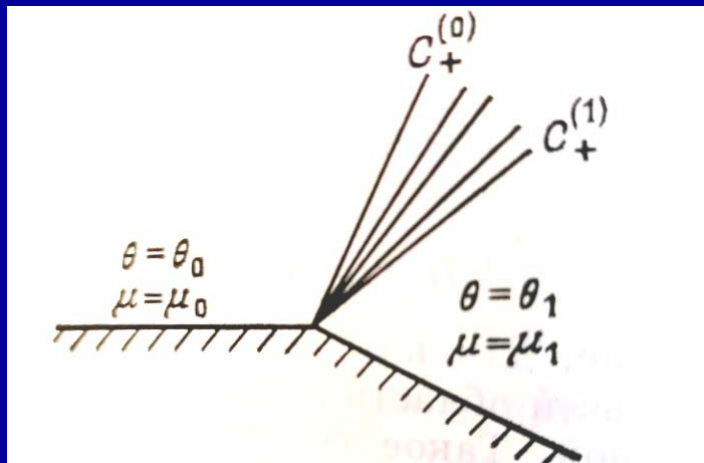
Доказанность существования и
единственности решения задач
околозвукового течения для ряда частных
случаев

- математические модели и результаты их анализа ряда характерных задач:

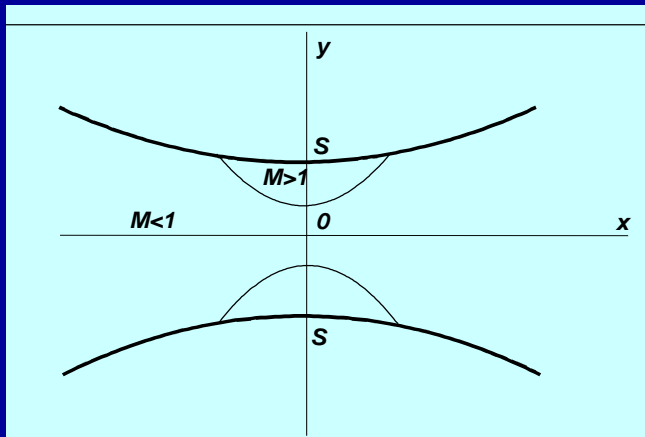
- истечение трансзвуковой струи,



- трансзвуковое обтекание клина, пластины, излома образующей профиля и затупленного тела

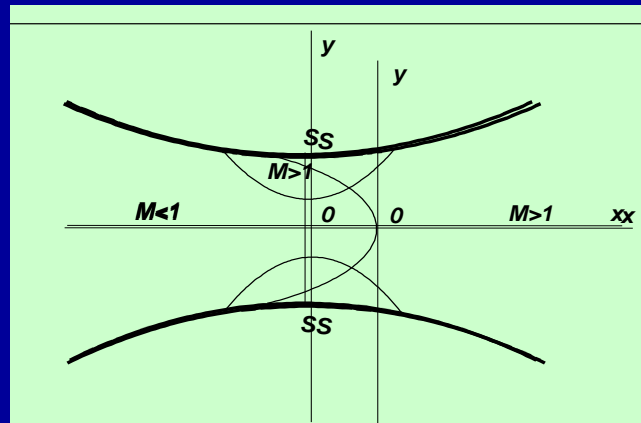
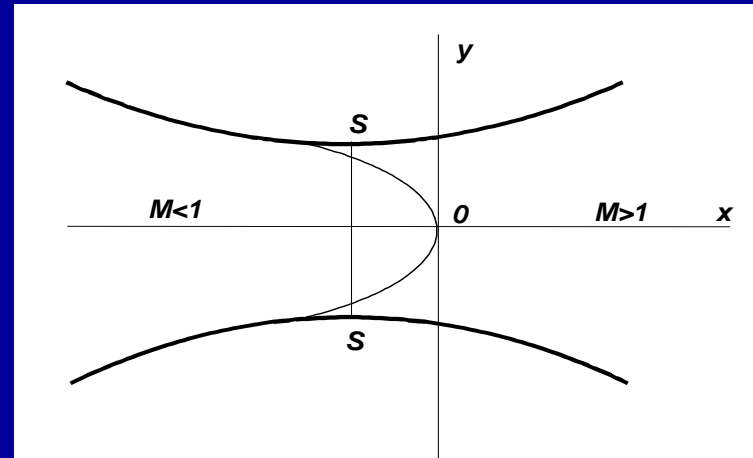


СМЕШАННОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРАНСЗВУКОВОМ СОПЛЕ.



$$u = a \left[1 - \eta - \beta x^2 + \eta(\gamma + 1)\beta y^2 + \dots \right]$$

$$u = a \left[1 + \alpha x + \frac{\gamma + 1}{2} \alpha^2 y^2 + \dots \right]$$



Вошедшие в сборники исследования околосвуковых течений (не все, включенные в сборники работы, относились к этой тематике) носили исключительно теоретический (аналитический и, редко, численный, в 1970-х годах эти методы стали вытеснять аналитический подход к исследованию задач) характер (хотя в 1965 году в Саратовском университете была построена сверхзвуковая аэродинамическая труба периодического действия со сменными соплами). Такой характер работ, по мнению редакторов сборников, делал их представляющими интерес для сотрудников профильных НИИ, аспирантов и студентов –они носили учебно-научный, а не прикладной характер. Круг рассмотренных участниками школы проблем, использованных методов анализа, исследованных задач был весьма широк.

Всего работ – 85.

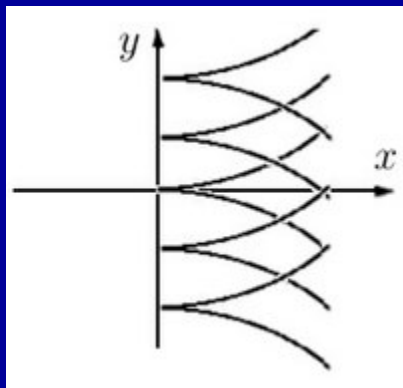
Стационарные течения – 75, нестационарные – 10. Экспериментальных – 0. Численных – 3.

По-видимому, не все эти результаты стали широко известными.

Первой из опубликованных работ в этой серии стала статья С.В. Фальковича «Об одном случае решения задачи Трикоми». В этой своей работе автор обратил внимание на вопрос эффективного построения решения задач околосвукового течения газа: основные исследовательские работы в этом направлении были посвящены доказательству теорем существования и единственности их решения. Для стационарного режима в случае плоской симметрии задачи такого рода сводятся к краевым задачам для линейного уравнения эллиптического-гиперболического типа (уравнения Чаплыгина), основной среди них является задача Трикоми (поиск решения уравнения Трикоми). Граничные условия для них выставлялись в эллиптической области течения и на одной из ограничивающих область течения в гиперболической части характеристик. В этой своей работе Фалькович свел решение к определению членов разложения искомой функции в ряд, члены которого представляли произведения функции Бесселя на тригонометрическую функцию (им также было высказано предположение, что такая система является полной, но доказательство этой полноты у него отсутствовало).

Уравнение Трикоми

$$\varphi_{xx} - x\varphi_{yy} = 0$$



*Francesco Giacomo
Tricomi*
1897 — 1978

Задача Трикоми

- задача отыскания решения уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа с двумя независимыми переменными и с одной гладкой разомкнутой линией параболического вырождения AB , принимающего заданные значения на эллиптической части σ границы $\partial\Omega$ области Ω задания уравнения и на одной из двух характеристик AC или BC , образующих гиперболическую часть $\sigma_1 = AC \cup BC$ границы $\partial\Omega = \sigma \cup \sigma_1$ (см. [Смешанного типа уравнение](#)). Т. з. для Трикоми уравнения

$$Tu \equiv yu_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной гладкой кривой $\sigma \subset \{(x, y) : y > 0\}$ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и характеристиками AC и BC :

$$AC : x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad BC : 1 - x = \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

Стационарный режим.

Уравнение Кармана

$$-(\gamma + 1)\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} =$$

$$= \left(\frac{\gamma + 1}{2} \varphi_x^2 + \frac{\gamma - 1}{2} \varphi_y^2 \right) \varphi_{xx} + 2(1 + \varphi_x) \varphi_y \varphi_{xy} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \varphi_y^2 + \frac{\gamma - 1}{2} (2\varphi_x + \varphi_x^2) \right) \varphi_{yy}$$

Автомодельные решения

$$\varphi = y^{3n-2} f_0(\xi)$$

$$\xi = \beta x / y^n$$

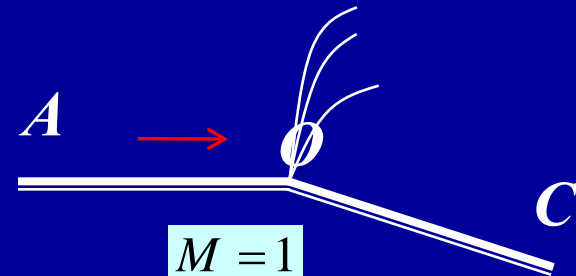
$$\beta = (1 + \gamma)^{-1/3}$$

$$(n^2 \xi^2 - f_0') f_0'' - 5n(n-1) \xi f_0' + 3(n-1)(3n-2) f_0 = 0$$

$$\varphi = y^{3n-2} f_0(\xi) + \sum \varphi_{p_k}$$

$$\varphi_{p_k} = y^{p_k} f_{p_k}(\xi)$$

Обтекание точки излома профиля



$n \approx 5/4$ (определено численно)

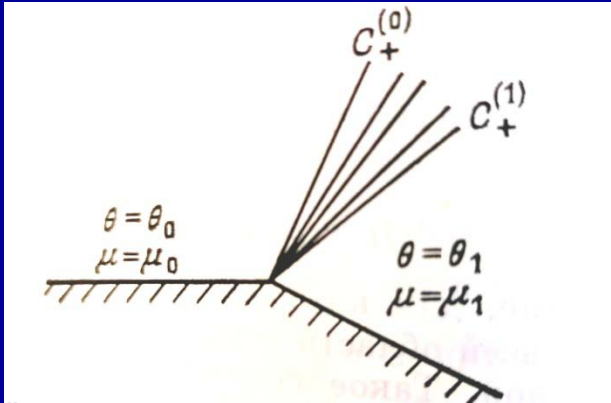
Решение Вальо-Лаурина

$$f_0(\xi) = d^3(t-1)^{-7/8}(7t^2 - 140t + 160)/21$$

$$\xi = d(t-1)^{-5/8}(t - 8/5)$$

d - масштабная постоянная

$$1 < t < \infty$$



$$d = 3^{-3/8} 5^{-1/4} \beta^{-7/8} d_\varepsilon^{5/8}$$

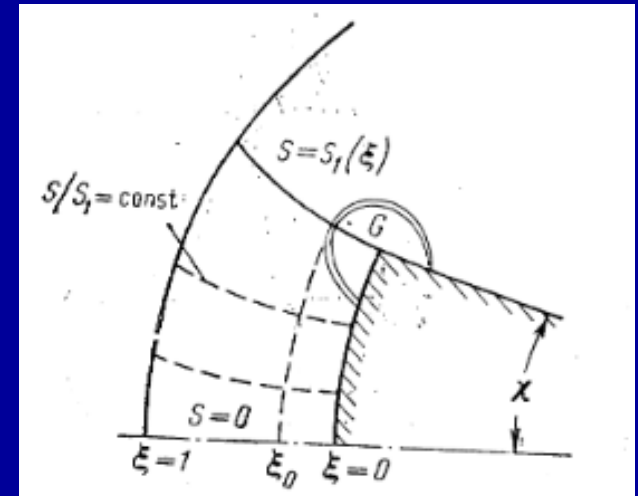
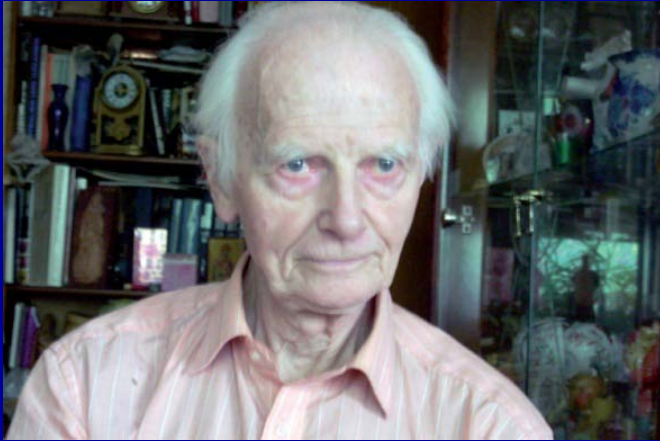
$$\varphi = \begin{cases} \frac{5}{7} d_\varepsilon (-x)^{7/5} + O(d_\varepsilon^2 (-x)^{9/5}), & \xi \rightarrow -\infty \\ \frac{1}{3} y \beta^3 z^3 + O(y^{5/3} z^{1/3}), & z = x/y, \quad \xi \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$u = 1 - d_\varepsilon (-x)^{2/5} + \dots$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{2}{5} \gamma d_\varepsilon (-x)^{-3/5} + \dots$$



Решение Вальо-Лаурина–Шугаева



$$u_0 = g', \quad v_0 = (7g - 5\xi g') / 4;$$

$$g = \left(\frac{25}{42}\right) 5^{-1/6} (5z^2 + 5z - 4) (1 - z)^{-7/6} (1 + 3z/5)^{-2/6} C^{-3},$$

$$\xi = -2 \cdot 5^{-3/8} z (1 - z)^{-5/8} (1 + 3z/5)^{-3/8} C^{-1}, \quad -5/8 < z < 1.$$

А.И. Есин и И.А. Чернов построили решение Вальо-Лаурина–Шугаева для потенциала скорости, показали его срачиваемость с решением типа Прандтля–Майера в задаче трансзвукового обтекания угловой точки контура тела вращения потоком большой дозвуковой скорости, когда в угловой точке достигается местная скорость звука.

Нестационарные режимы

$$(K_{\infty} - (\gamma + 1)\phi_x)\phi_{xx} + \phi_{yy} - 2\phi_{xt} = 0$$

Уравнение Линя-Рейсснера-Цяня – характерный предел



$k = O(1)$		$1 \ll k$	
$1 - \frac{1}{M_\infty^2} = O(\delta^{2/3})$	$ 1 - M_\infty \gg \delta^{2/3}$	$k \gg \delta^{2/3}$	
$k = O(\delta^{2/3})$	$k = O\left(1 - \frac{1}{M_\infty^2}\right)$	$k \gg \left 1 - \frac{1}{M_\infty^2}\right $	$\frac{1}{k} = O(M_\infty)$
$\delta \ll 1$	$\delta \ll 1$ $\delta M_\infty \ll 1$	$\delta \ll 1$ $\delta M_\infty \ll 1$	$kM_\infty \ll 1$
			$k\delta \ll 1$
$\frac{2k}{((\gamma+1)\delta)^{2/3}} f_{\xi\tau} + \left(\frac{M_\infty - 1}{((\gamma+1)\delta)^{2/3}} + f_\xi\right) f_{\xi\xi} - f_{\eta\eta} = 0$	$k^2 f_{\tau\tau} + 2kf_{\xi\tau} + \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2}\right) \left(f_{\xi\xi} + \frac{1 - M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} f_{\eta\eta}\right) = 0$	$kf_{\tau\tau} + 2(f_{\xi\tau} - f_{\eta\eta}) = 0$	$f_{\tau\tau} - f_{\eta\eta} - \frac{1}{k^2 M_\infty^2} f_{\xi\xi} = 0$
			$f_{\xi\xi} + f_{\eta\eta} = 0$
трансзвуковой	сверхзвуковой дозвуковой	сильные колебания	
нелинейные		линейные	
квазистационарный несжимаемый			

характерные параметры

$1/k$

характерный период неустановившегося течения

δ

относительная толщина тела

M_∞

число Маха на бесконечности

Уравнение Линя-Рейсснера-Цяня – характерный предел



П.А. Вельмисов, С.В. Фалькович

О нестационарном обтекании тела свободной звуковой струей газа / *Аэродинамика. 1974.*

$$2\phi_{xt} + \phi_x \phi_{xx} - \phi_{rr} - \frac{1}{r} \phi_r - \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta} = 0$$

$$\phi = \phi_0(r, \theta, \tau) + \phi_1(r, \theta, \tau)x + \phi_2(r, \theta, \tau)x^2$$

$$\Delta\phi_0 = 2(\phi_{1\tau} + \phi_1\phi_2)$$

$$\Delta\phi_1 = 4(\phi_{2\tau} + \phi_2^2)$$

$$\Delta\phi_2 = 0$$

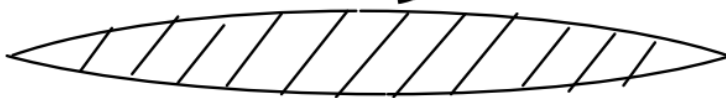
$$\phi_2 = a_1 + a_2 y$$

$$\phi_1 = b_1 + b_2 y + 2(a'_1 + a_1^2)y^2 + \frac{2}{3}(a'_2 + 2a_1 a_2)y^3 + \frac{1}{3}a_2^2 y^4$$

$$\phi_0 = c_1 + c_2 y + 2(b'_1 + a_1 b_1)y^2 + \frac{1}{3}(b'_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1)y^3 + \dots + \frac{1}{63}a_2^3 y^7$$

$$y = -a_1(\tau)/a_2(\tau)$$

$$\frac{6}{a_2}x = -y^3 - 3\left(\frac{2a_1}{a_2} + \frac{2a'_1}{a_1 a_2} - \frac{b_1}{a_1^2} + \frac{a_2 b_1}{a_1^3}\right)y^2 - \frac{3}{a_1}\left(\frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1}\right)y - \frac{3b_1}{a_1 a_2}$$



Нестационарные режимы.

Вырожденность классической модели

$$(K_{\infty} - (\gamma + 1)\phi_x)\phi_{xx} + \phi_{yy} - 2\phi_{xt} = 0$$

Уравнение Линя-Рейсснера-Цяня

$$(K - (\gamma + 1)\phi_x)\phi_{xx} + \phi_{yy} - 2\phi_{xt} - \varepsilon\phi_{tt} = 0$$

$$\varepsilon \ll 1$$

• Характеристики в одномерной задаче

$$\frac{dx}{dt} = u - a$$

$$u = U \left(1 + \delta^{2/3} \phi_x \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = u + a$$

$$a = U \left(1 + \delta^{2/3} K_\infty \right)$$

$$u - a = U \delta^{2/3} \left(\phi_x - K_\infty \right)$$

$$u + a = U \left(2 + \delta^{2/3} \phi_x + \delta^{2/3} K_\infty \right)$$

$$\delta \ll 1$$

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow \infty, \quad t = \text{const}$$

Устойчивость трансзвукового течения

- При $\varepsilon = 0$ первый корень выпадает и получается известный в газовой динамике результат о неустойчивости трансзвукового тормозящегося течения. Вывод же об устойчивости трансзвукового ускоряющегося течения, как видно, в значительной мере связан с использованием трансзвукового приближения и пренебрежением вторым корнем.
- Возмущения, соответствующие первому корню, выносятся из исследуемой области, поскольку распространяются в направлении основного (невозмущенного) течения газа, и в обычных условиях не нарушают течения, так как не успевают вырасти достаточно сильно. Если же в основном потоке протекают физико-химические процессы с выделением энергии, то слабые возмущения могут расти гораздо быстрее и приводить к смене режима течения. В течениях могут появиться скачки или же характер его станет неустановившимся. В квазиодномерном приближении анализ этих вопросов проведен в работе [Богданов, Куликовский 1993].

$$\tilde{\varepsilon} \phi \sim \exp(i(-\omega t + kx + ly))$$

$$-K^{*0} k^2 - ik(\gamma + 1)\phi_{xx}^0 - I^2 - 2k\omega + \varepsilon\omega^2 = 0$$

$$\omega_1 = 2\frac{k}{\varepsilon} + \frac{k}{2} \left[K^{*0} + \frac{i}{k}(\gamma + 1)\phi_{xx}^0 + \left(\frac{I}{k}\right)^2 \right]$$

$$\omega_2 = -\frac{k}{2} \left[K^{*0} + \frac{i}{k}(\gamma + 1)\phi_{xx}^0 + \left(\frac{I}{k}\right)^2 \right]$$

$$\text{Im} \omega_1 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)\phi_{xx}^0$$

$$\text{Im} \omega_2 = -\frac{1}{2}(\gamma + 1)\phi_{xx}^0$$

$$\phi_{xx}^0 = u_x^0$$

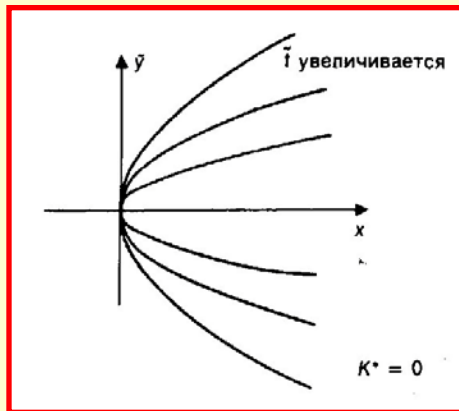
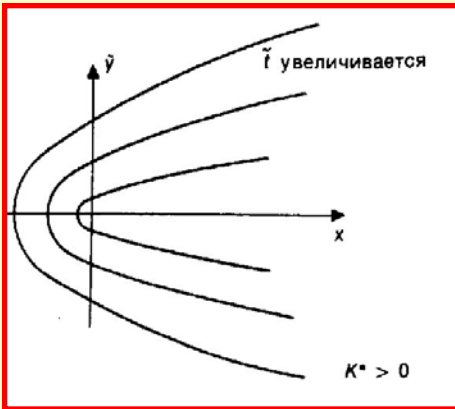
Картины волновых фронтов малых возмущений. Сингулярность уравнения Линя-Рейсснера-Цяня. Регуляризация

$$(K - (\gamma + 1)\phi_x)\phi_{xx} + \phi_{yy} - 2\phi_{xt} - \varepsilon\phi_t = 0$$

Уравнение волнового фронта малого возмущения

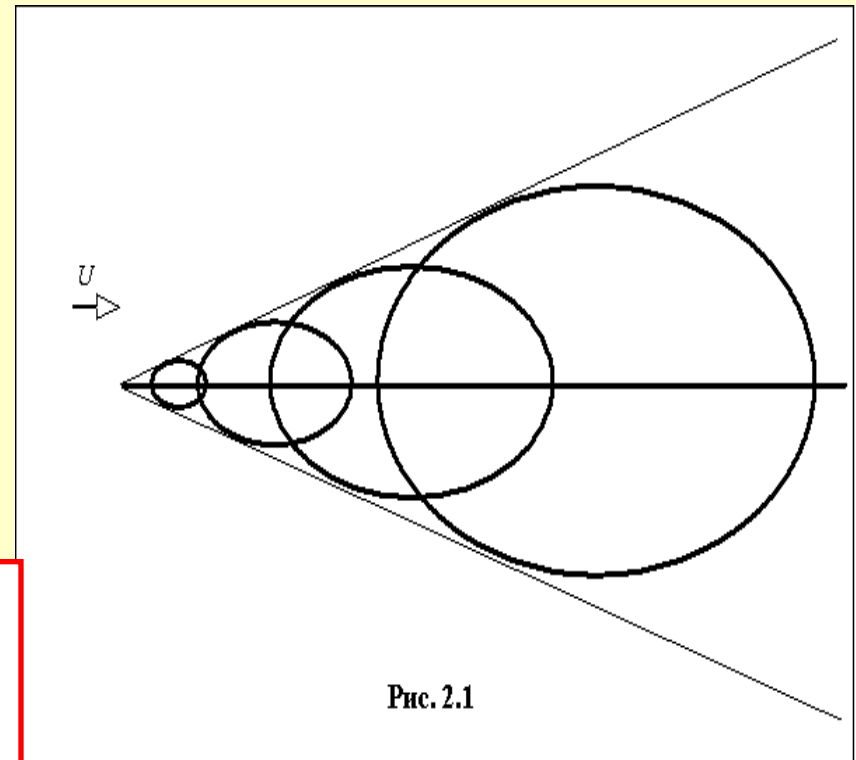
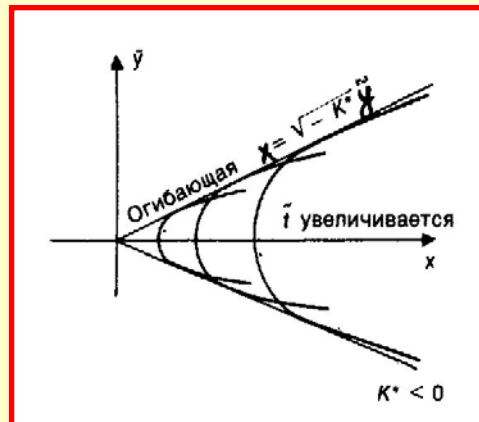
$$K^* \xi_x^2 + \xi_y^2 - 2\xi_x \xi_t - \varepsilon \xi_t^2 = 0$$

$$K^* = K - (\gamma + 1)\phi_x$$



$$\varepsilon = 0$$

$$K^* t^2 + 2tx = y^2$$



$$\varepsilon \neq 0$$

$$K^* t^2 + 2t(x - x_0) - \varepsilon(x - x_0)^2 = (y - y_0)^2(1 + \varepsilon K^*)$$