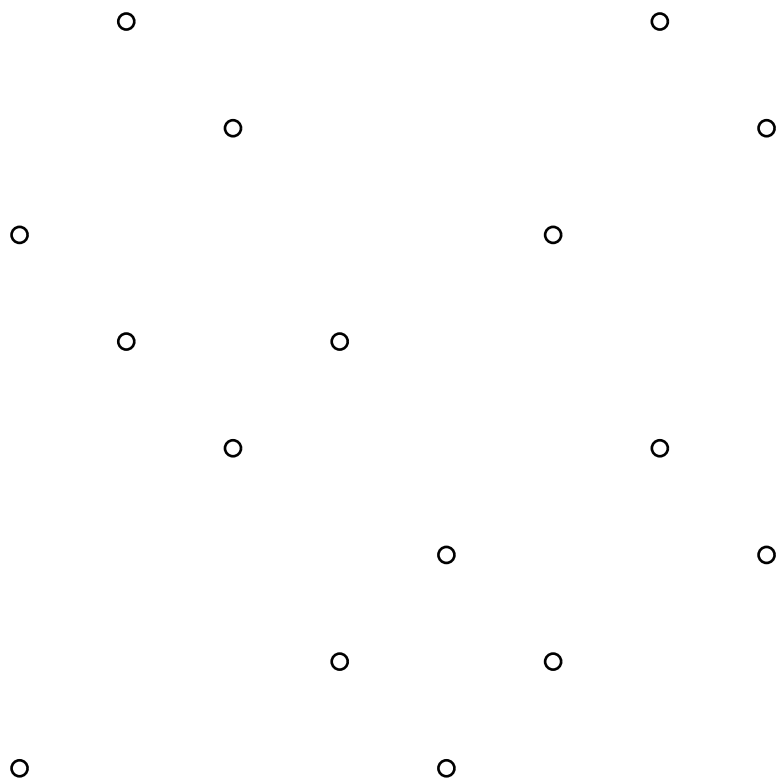


И. ДЫННИКОВ

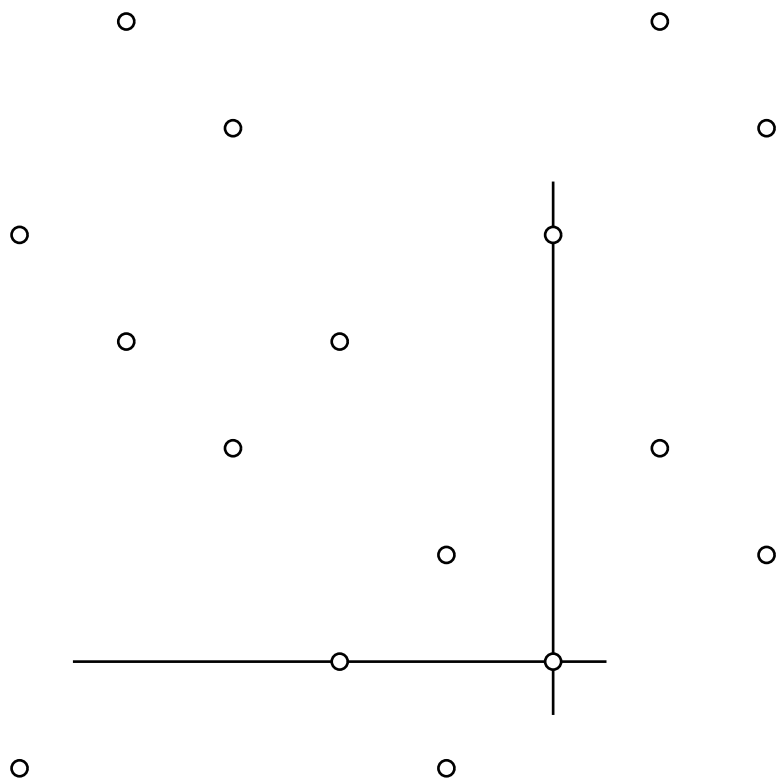
МОНОТОННОЕ УПРОЩЕНИЕ ЗАЦЕПЛЕНИЙ  
И КОНТАКТНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Ломоносовские чтения  
Москва, 26 декабря 2014 г.

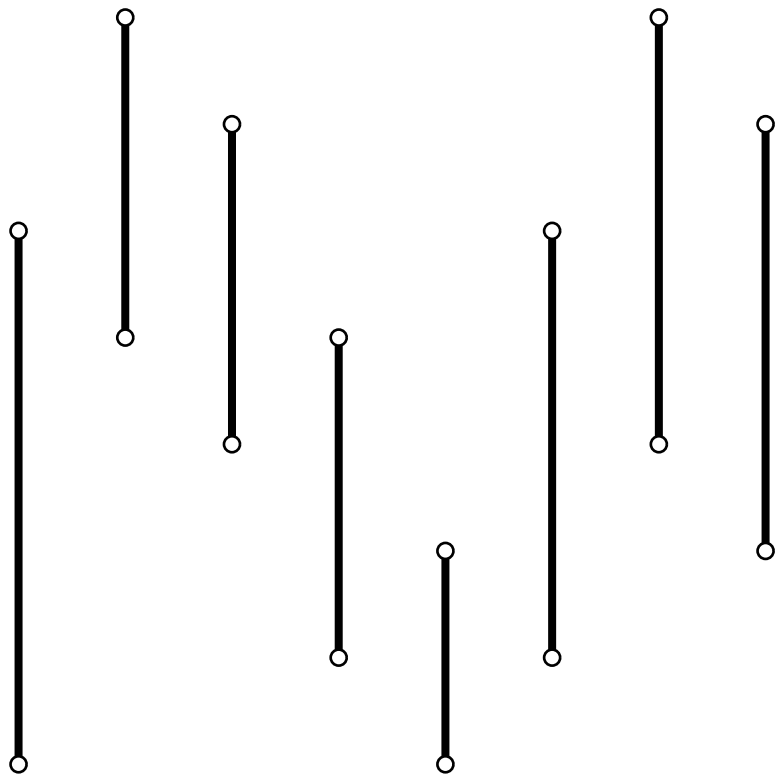
# Прямоугольная диаграмма зацепления



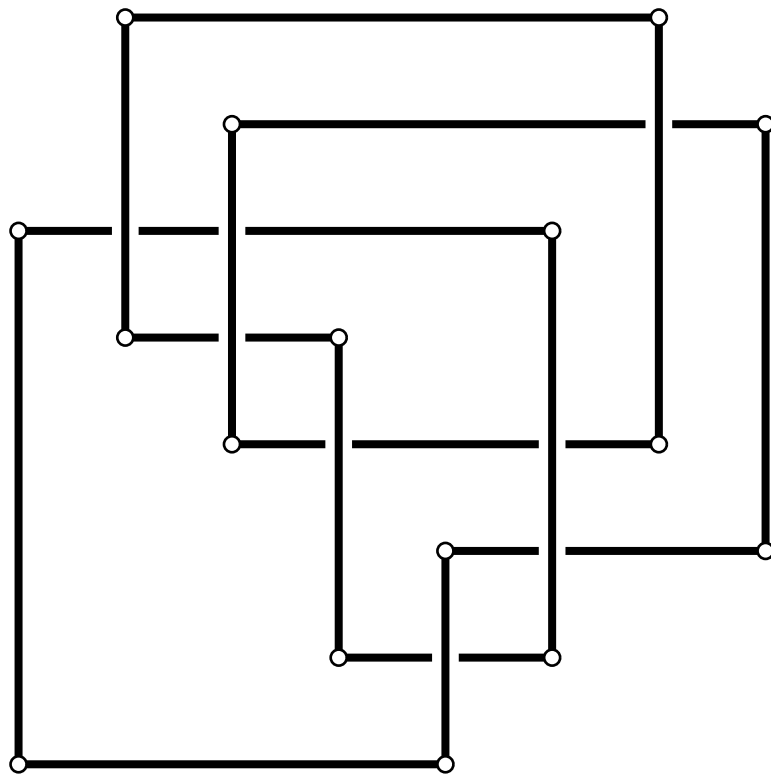
# Прямоугольная диаграмма зацепления



# Прямоугольная диаграмма зацепления

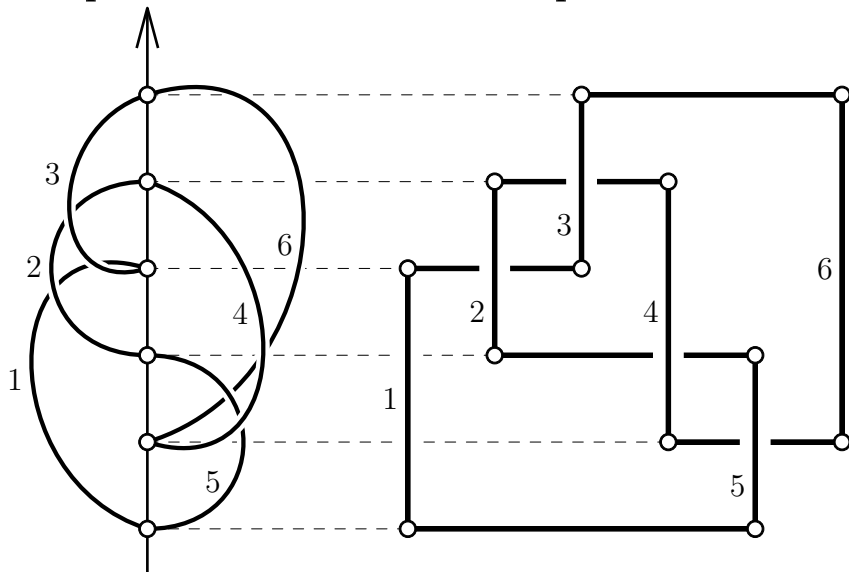


# Прямоугольная диаграмма зацепления



Зацепление, заданное прямоугольной диаграммой  $R$ , будет обозначаться через  $\mathcal{L}_R$ .

Прямоугольная диаграмма = книжное представление



**Теорема (Н.Брунн, 1898).** Любое зацепление имеет книжное представление.

## Über verknotete Kurven.

Von

H. BRUNN in München.

Eine besondere Art der Darstellung und Beschreibung eines Knotens scheint mir bisher unbeachtet zu sein und doch den Keim mancher neuen Erkenntnis in sich zu tragen. Für verschlungene Kurven können analoge Betrachtungen angestellt werden. Gewöhnlich bildet man einen Knoten mittels einer ebenen Projektion ab, an deren Doppelpunkten das „Unten“ und „Oben“ der Zweige markiert ist.

Man arrangiere nun den Knoten, ohne sein Wesen zu verändern, so, daß sämtliche Doppelpunkte der Projektion in einen einzigen vielfachen Punkt  $a$  zusammenrücken. Die dem Projektionspunkt  $a$  entsprechenden Kurvenpunkte liegen dann auf einer Geraden  $A$ . Wir nennen  $A$  die Axe, ihre Schnitte mit der Kurve die Axsschnitte, die von Axsschnitt zu Axsschnitt laufenden Kurventeile kurzweg die Bögen.

Die Bögen können eben, und in lauter verschiedenen von  $A$  ausgehenden Halbebenen gedacht werden. Denn nach unserem Arrangement

kann nirgends eine Überkreuzung zweier Bögen nach Art von Fig. 1 mehr stattfinden; an ihre Stelle muß eine Gestaltung wie bei Fig. 2 getreten sein, bei welcher der ursprüngliche Bogen  $C$  durch zwei andere  $C'$  und  $C''$  ersetzt ist.

Blickt man nun in Richtung der Axe, so folgen sich die Halbebenen der Bögen

gleich den Speichen eines Rades in einer gewissen Reihenfolge: „Axfolge“ der Bögen. Als Bestandteile der Kurve haben die Bögen ebenfalls eine gewisse Reihenfolge: „Kurvenfolge“ der Bögen.

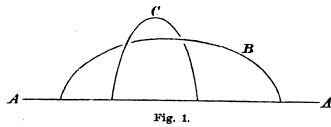


Fig. 1.

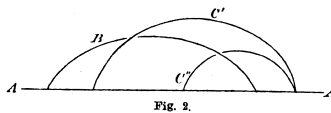


Fig. 2.

Aber auch die Axsschnitte haben einerseits eine „Axfolge“, andererseits eine „Kurvenfolge“. Die jetzt bereits heraustretende Dualität zwischen Axsschnitten und Bögen erweist sich als eine durchgreifende und bildet eben das Merkwürdige und zugleich Empfehlende für die gewählte Darstellungsweise.\*)

Die Beschreibung des Knotens kann nun in folgender Weise gegeben werden:

Man nummeriere, indem man einen bestimmten Anfangsbogen und Fortschreitungsinn wählt, die Bögen erst in ihrer Kurvenfolge, dann in ihrer Axfolge; dasselbe thue man für die Axsschnitte. Man kann dabei die Anfangselemente für Kurven- und Axnummerierung identisch wählen. Das Resultat der Numerierung läßt sich in zwei kleinen Tabellen I — für die Bögen — und II — für die Axsschnitte — niederlegen. Jede besteht aus zwei Zeilen, in denen die Nummern, die zum nämlichen Bogen, bezw. Axsschnitt gehören, unter einander stehen. Wenn man die Nummern der ersten — auf die Kurvenfolge bezüglichen — Zeile stets in der natürlichen Reihenfolge ausgesprochen denkt, wird diese Zeile selbstverständlich und kann weggelassen werden, sodas sich jede Tabelle auf Angabe einer Nummerpermutation (Substitution) beschränkt. Z. B. kann der Knoten Fig. 3 beschrieben werden durch

I.	1 4 2 5 3	(Bögen)
II.	1 4 2 5 3	(Axsschnitte)

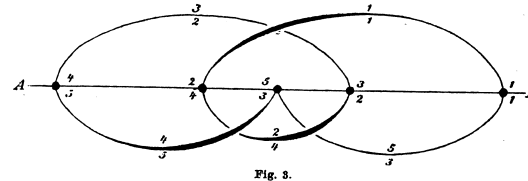


Fig. 3.

Man erkennt leicht, daß diese Knotenbeschreibung im topologischen Sinne hinreichend ist und auch nichts Überflüssiges enthält.

Wie die gewöhnliche Projektion eines Knotens unwesentliche Doppelpunkte, so kann unsere Darstellung unwesentliche Bögen und Axsschnitte enthalten, welche zum Verschwinden gebracht werden können. Wir wollen der Frage der Reduktion eines Knotens auf die einfachste

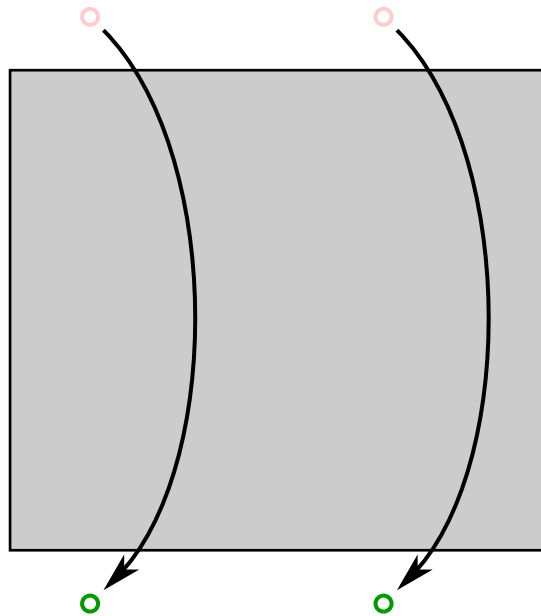
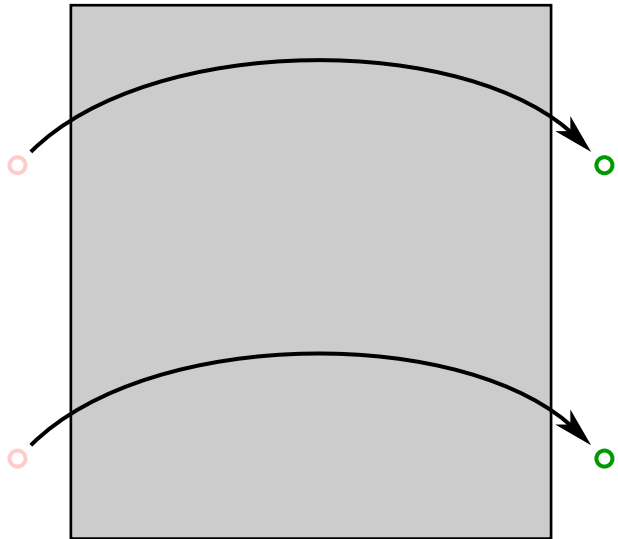
\*) Die Dualität wird eine noch vollkommene, wenn man die krummen Bögen durch aus zwei geraden Strecken bestehende, gebrochene Linien ersetzt.

## Элементарные движения:

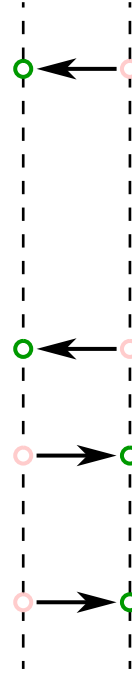
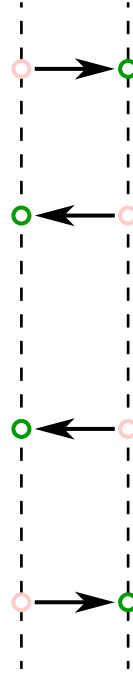
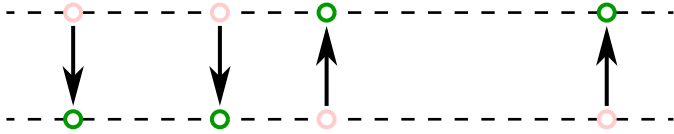
- циклические перестановки
- рокировки
- стабилизации и дестабилизации



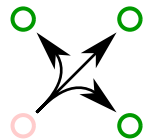
Циклические перестановки:



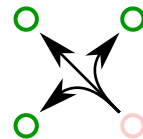
Рокировки:



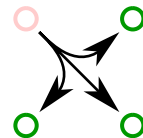
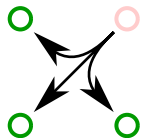
Стабилизации:



Тип I


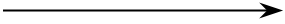
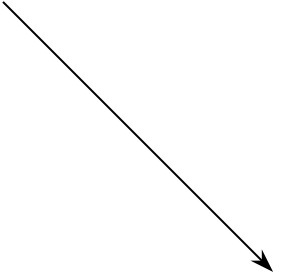


Тип II

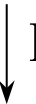

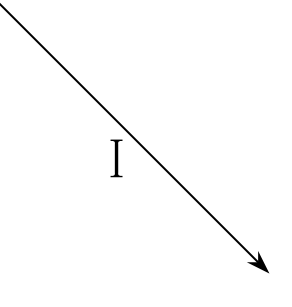


Дестабилизация — операция, обратная к стабилизации

Стрелка от  $R_1$  к  $R_2$  будет обозначать существование последовательности элементарных движений, преобразующих  $R_1$  в  $R_2$  и удовлетворяющих ограничениям:

	любые движения
	только циклические перестановки и рокировки
	циклические перестановки, рокировки и ненулевое число дестабилизаций

Аналогично для  $I \leftrightarrow II$ .

	одна дестабилизация типа I
	любые движения, кроме (де)стабилизаций типа II
	циклические перестановки, рокировки и ненулевое число дестабилизаций типа I

Теорема (Р.Сромвелл, в терминах книжных представлений).

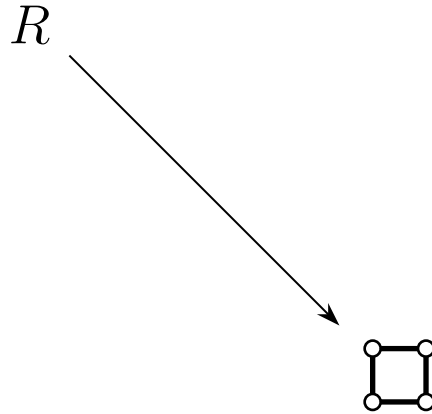
$\mathcal{L}_{R_1} = \mathcal{L}_{R_2}$  тогда и только тогда, когда

$$R_1 \rightsquigarrow R_2.$$

Теорема о монотонном упрощении (И.Д.). Если  $R \neq \square$  и

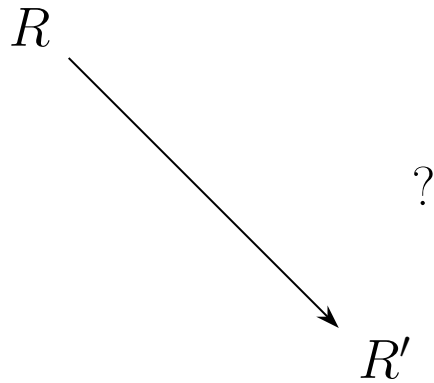


то

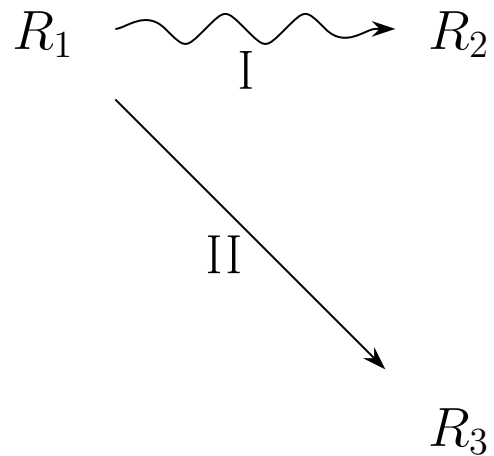


Для доказательства использовалась техника, развитая ранее в работах D.Bennequin, J.Birman–W.Menasco и P.Cromwell.

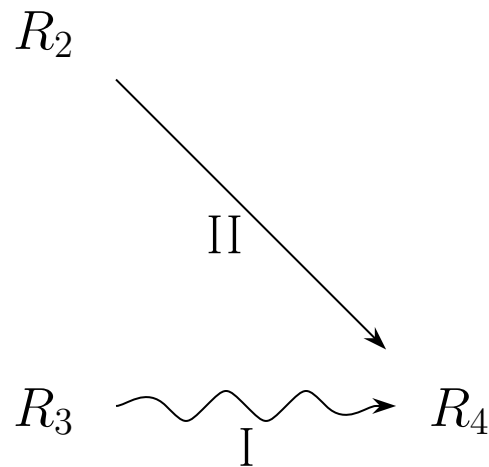
Когда для данного  $R$  существует такое  $R'$ , что



Теорема 1 (И.Д. & М.Прасолов).



$\Rightarrow \exists R_4$ , такое что



Аналогично для  $I \leftrightarrow II$ .



Легкая часть:

$$\begin{array}{ccc} & & R_2 \\ & & \downarrow \text{I} \\ R_1 & \longrightarrow & R'_1 \\ \downarrow \text{II} & & \\ R_3 & & \end{array}$$

Трудная часть:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & \longrightarrow & R'_1 \\ \downarrow \text{II} & & \downarrow \text{I} \\ R_3 & & R_2 \end{array}$$

Следствие. Если

$$R_1 \overset{\text{I}}{\rightsquigarrow} R_2 \overset{\text{II}}{\rightsquigarrow} R_3$$

то  $\exists R_4$ , такое что

$$R_1 \overset{\text{II}}{\rightsquigarrow} R_4 \overset{\text{I}}{\rightsquigarrow} R_3$$

Следствие. Если

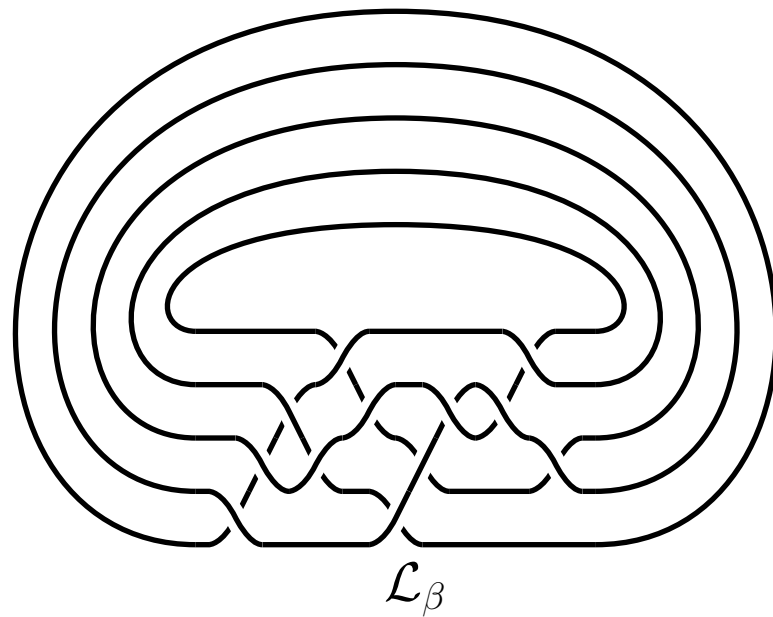
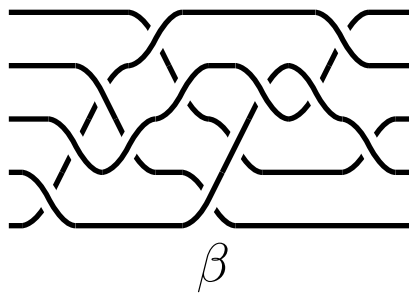
$$R_1 \rightsquigarrow R_2,$$

то  $\exists R_3, R_4$ , такие что

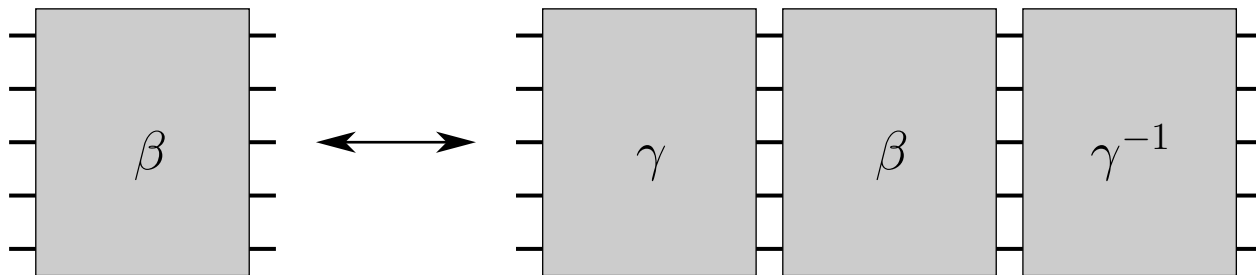
$$R_1 \xrightarrow{\text{I}} R_3 \xrightarrow{\text{II}} R_2.$$

$$R_1 \xrightarrow{\text{II}} R_4 \xrightarrow{\text{I}} R_2.$$

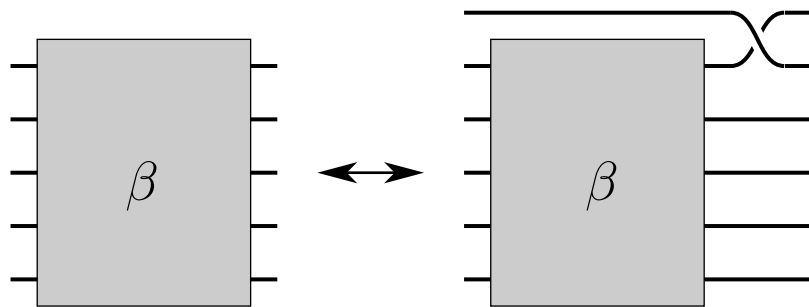
**Теорема Александера.** Любое ориентированное зацепление представляется замкнутой косой.



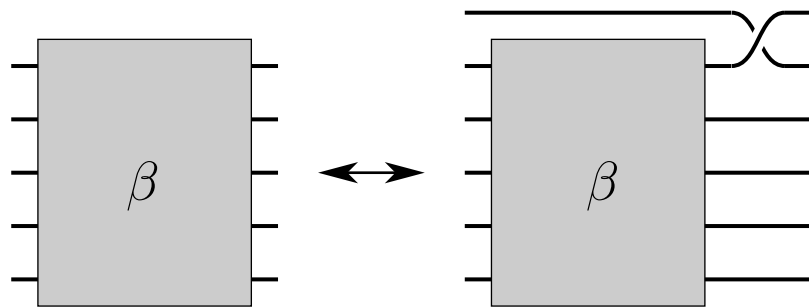
Движения Маркова:



Сопряжение



Положительная стабилизация

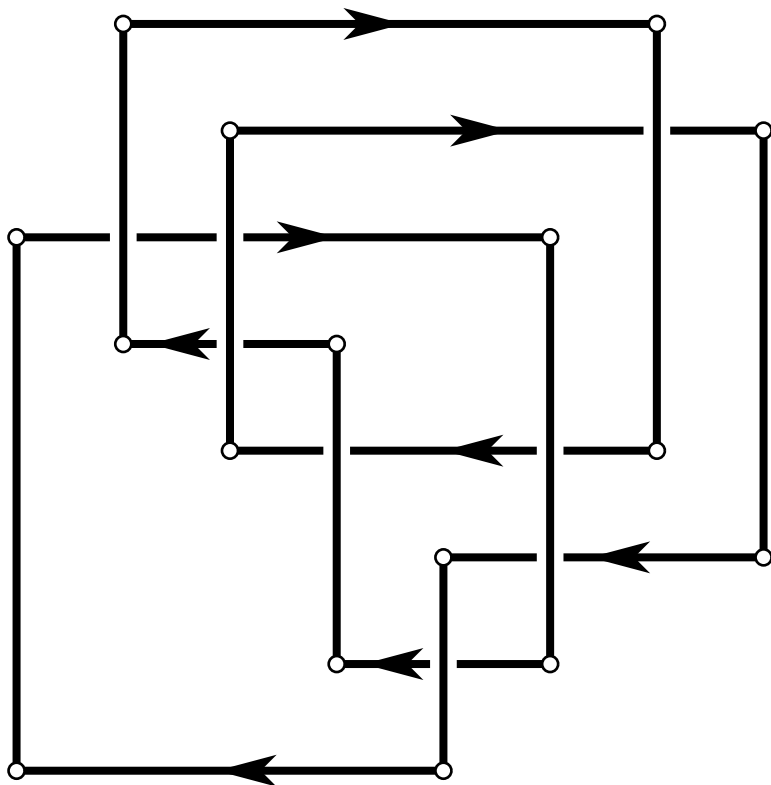


Отрицательная стабилизация

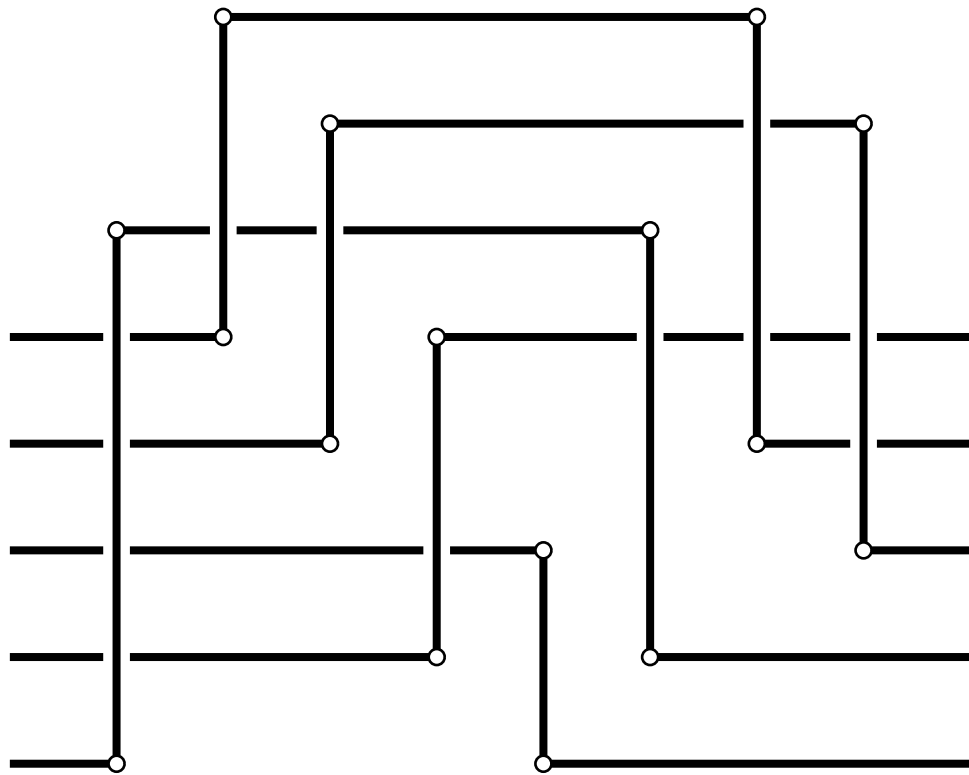
# Теорема Маркова.

$$\mathcal{L}_{\beta_1} = \mathcal{L}_{\beta_2} \iff \beta_1 \rightsquigarrow \beta_2.$$

Преобразование ориентированной прямоугольной диаграммы в косу,  
 $R \mapsto \beta_R$ :

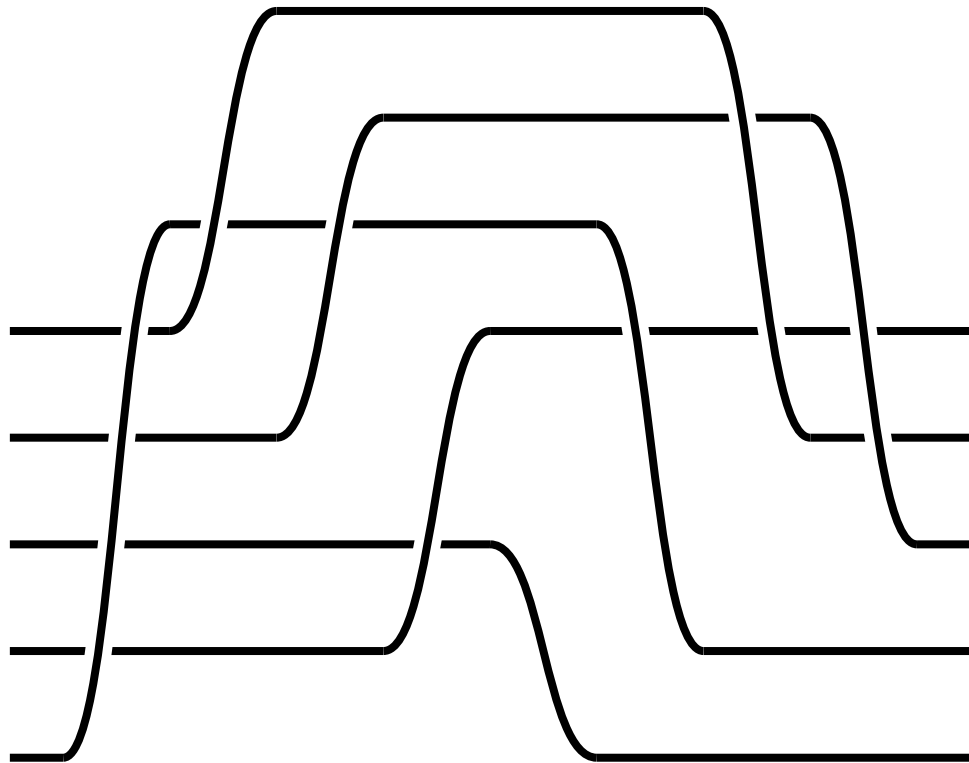


Преобразование ориентированной прямоугольной диаграммы в косу,  
 $R \mapsto \beta_R$ :





Преобразование ориентированной прямоугольной диаграммы в косу,  
 $R \mapsto \beta_R$ :

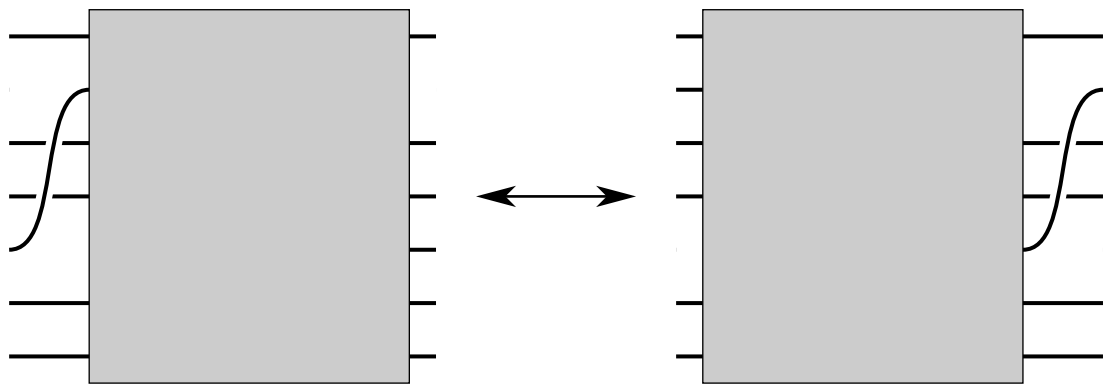
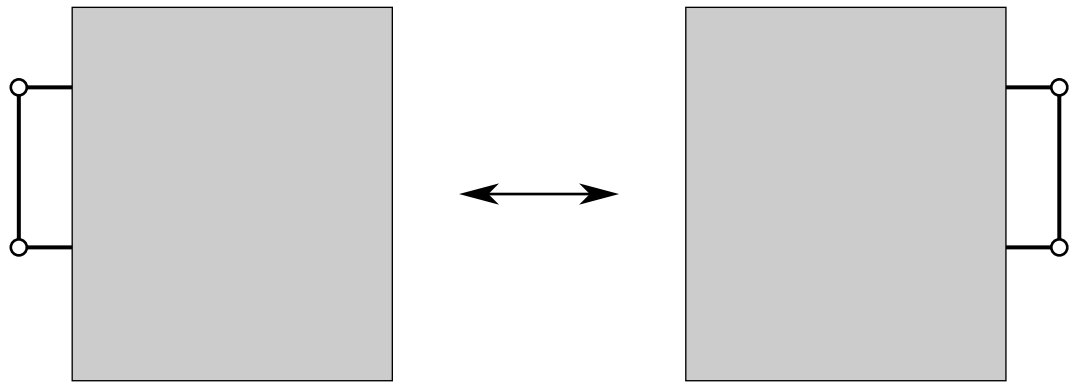


**Утверждение.** Любая коса имеет вид  $\beta_R$  для некоторой прямоугольной диаграммы  $R$ .

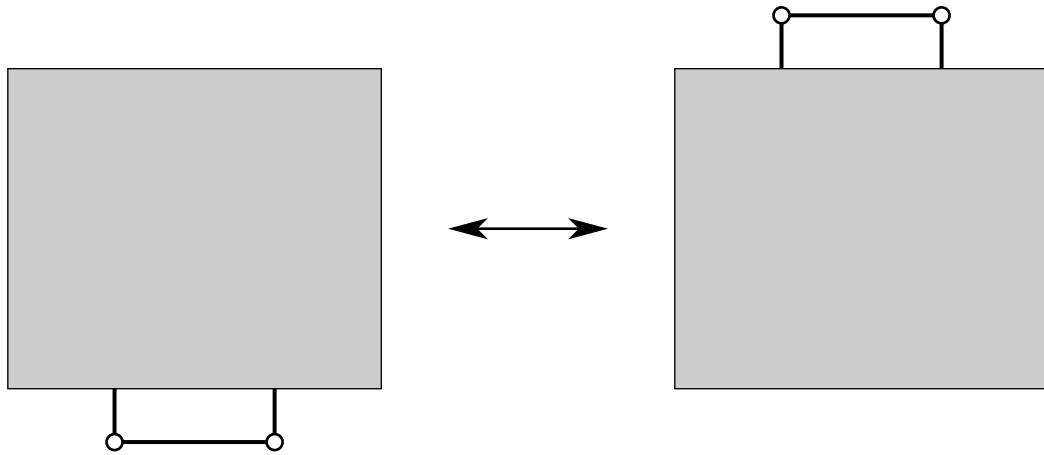
**Утверждение.**

$$\mathcal{L}_{\beta_R} = \mathcal{L}_R.$$

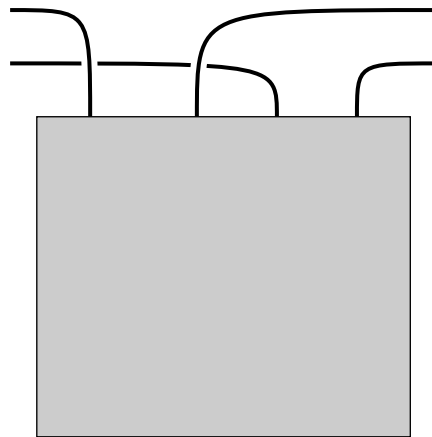
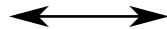
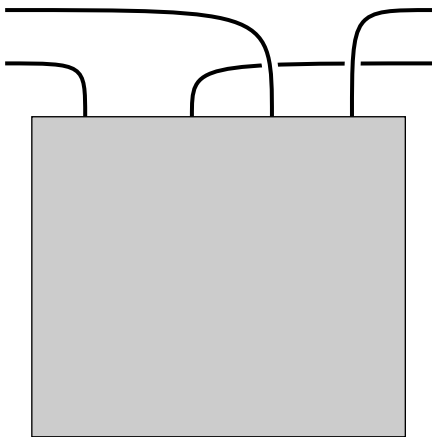
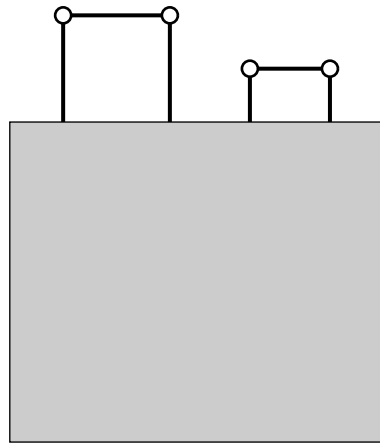
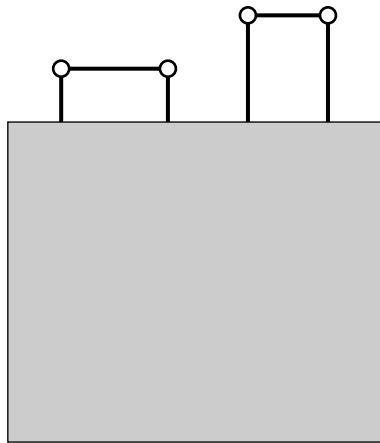
Что происходит с  $\beta_R$  при элементарных движениях на  $R$ ?



Сопряжение



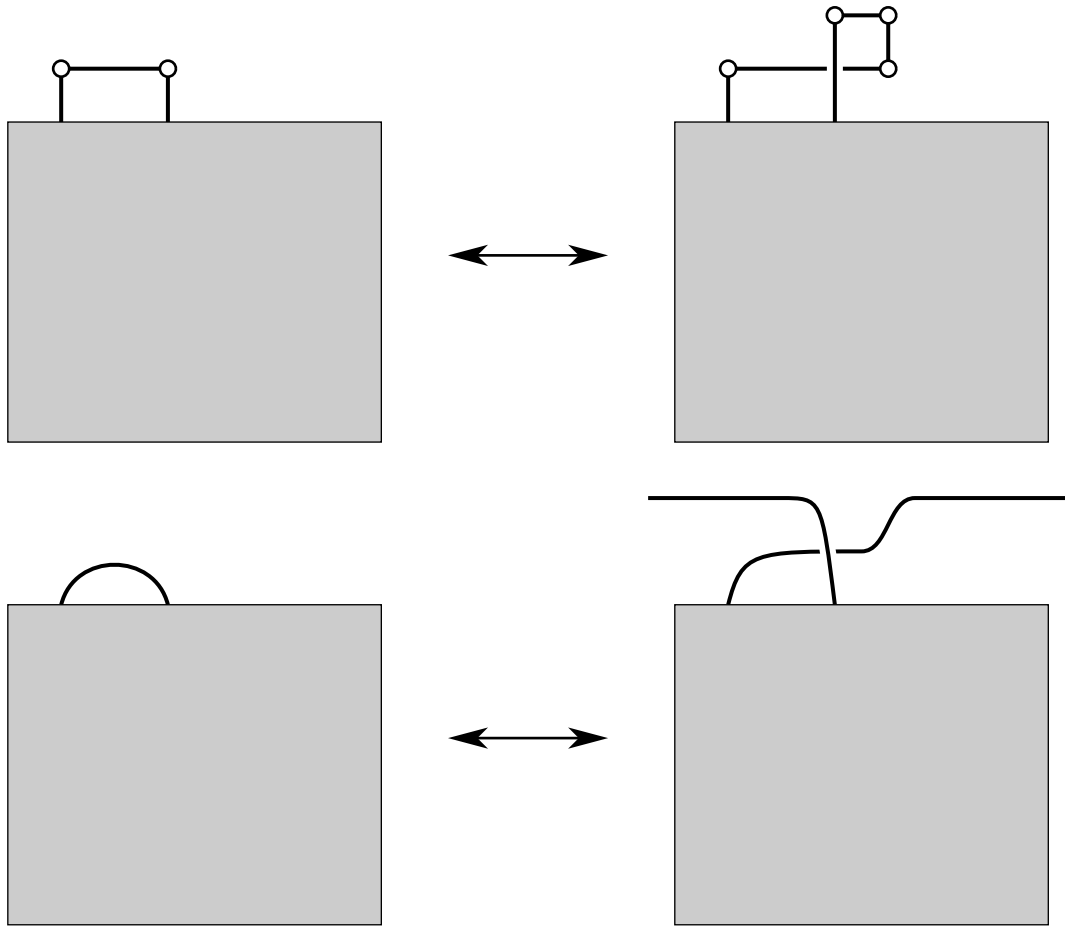
Сопряжение



Движение обмена

**Предложение (J. Birman, N. Wrinkle).** Если  $\beta_1$  и  $\beta_2$  связаны движением обмена, то

$$\beta_1 \xrightarrow{+} \beta_2 \quad \text{и} \quad \beta_1 \xrightarrow{-} \beta_2.$$



Стабилизация/дестабилизация



Следствие. Если

$$\beta_1 \rightsquigarrow \beta_2,$$

то найдутся такие  $\beta_3, \beta_4$ , что

$$\begin{array}{l} \beta_1 \rightsquigarrow \beta_3 \quad + \quad \beta_3 \rightsquigarrow \beta_2. \\ \beta_1 \rightsquigarrow \beta_4 \quad - \quad \beta_4 \rightsquigarrow \beta_2. \end{array}$$

Следствие (расширенная гипотеза Джонса). Если  $\mathcal{L}_{\beta_1} = \mathcal{L}_{\beta_2}$  и  $n(\beta) \geq n(\beta_1)$  для всех  $\beta$  с  $\mathcal{L}_\beta = \mathcal{L}_{\beta_1}$ , то

$$|w(\beta_1) - w(\beta_2)| \leq n(\beta_2) - n(\beta_1).$$

## Лежандровы зацепления

Распределение плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ , заданное ядром 1-формы

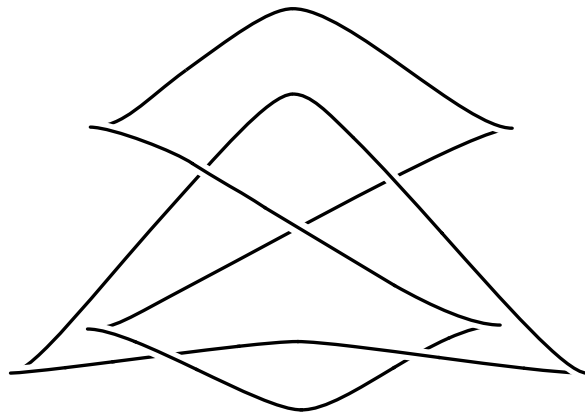
$$\omega = x dy + dz,$$

называется *стандартной контактной структурой*.

Зацепление  $L$  в  $\mathbb{R}^3$  называется *лежандровым*, если оно представляет собой гладкую кривую, которая всюду касается стандартной контактной структуры.

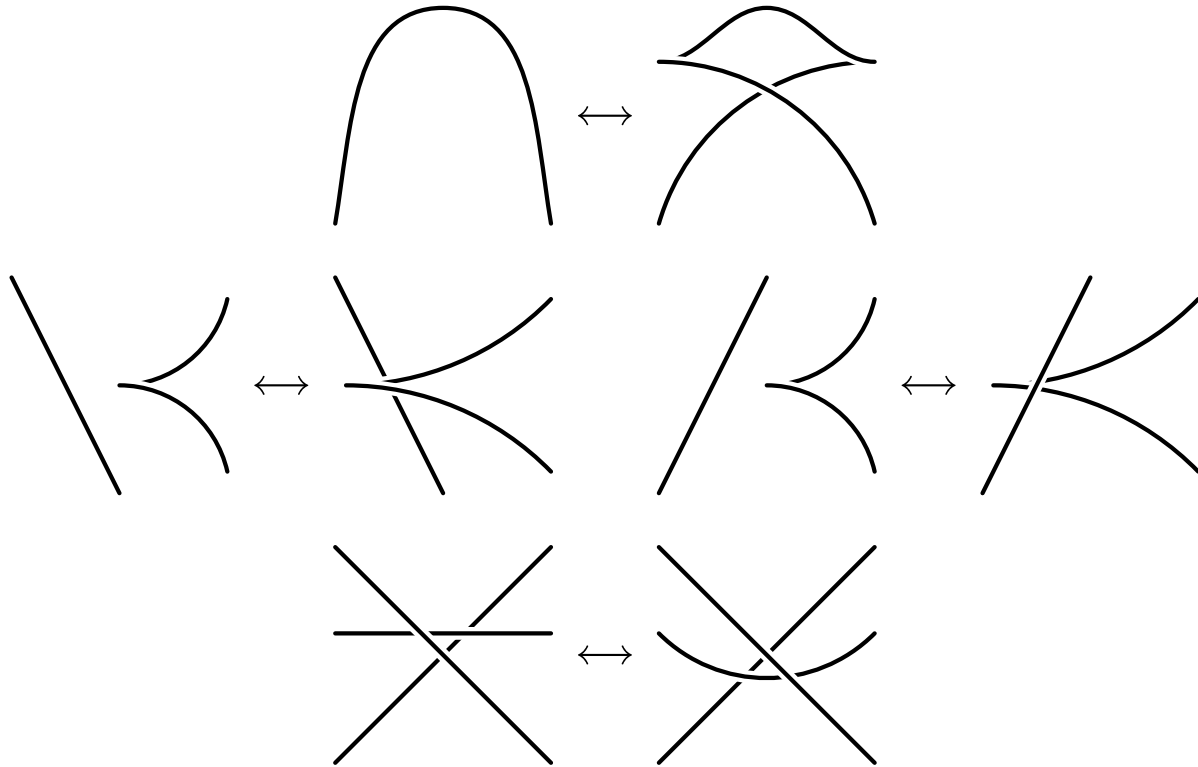
Лежандровы зацепления считаются эквивалентными, если они переводятся друг в друга изотопией в классе лежандровых зацеплений.

Лежандровы зацепления удобно задавать проекцией на плоскость  $Oyz$ , называемой *фронтальной*. Фронтальная проекция представляет собой кусочно гладкую кривую, особенности которой имеют вид точек возврата и которая нигде не имеет вертикального направления.



В пересечениях ветвь, имеющая меньший угловой коэффициент, всегда проходит сверху, поэтому для восстановления кривой достаточно самой проекции, без дополнительной информации о типах пересечений.

Элементарные движения фронтальных проекций:

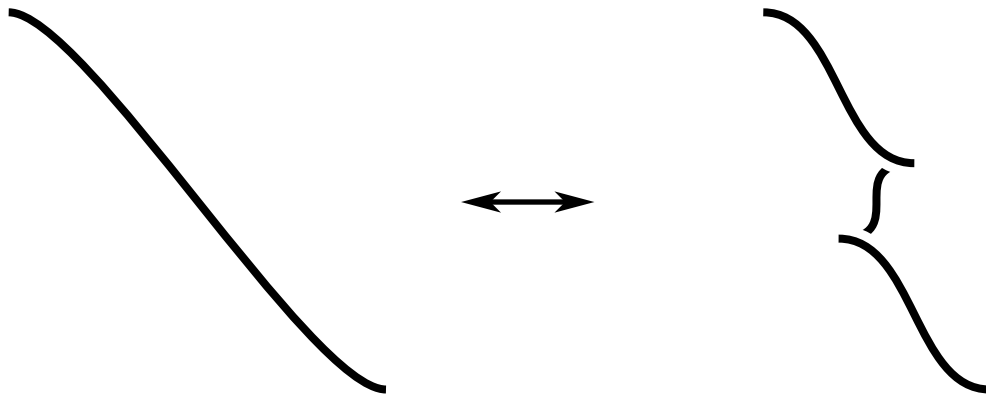


*Число Торстона–Беннекена* ориентированного лежандрова зацепления

$$\text{tb}(L) = w - c/2,$$

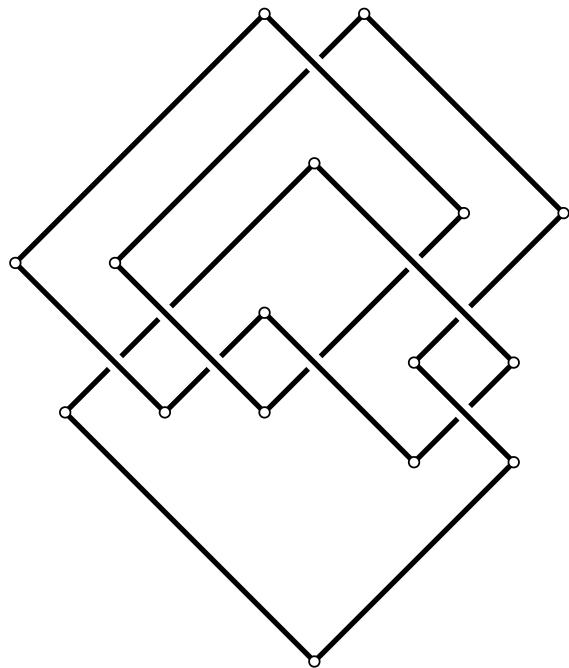
где  $w$  — алгебраическое число пересечений фронтальной проекции, а  $c$  — число точек возврата, является инвариантом лежандровой изотопии.

Лежандровы стабилизации и дестабилизации:

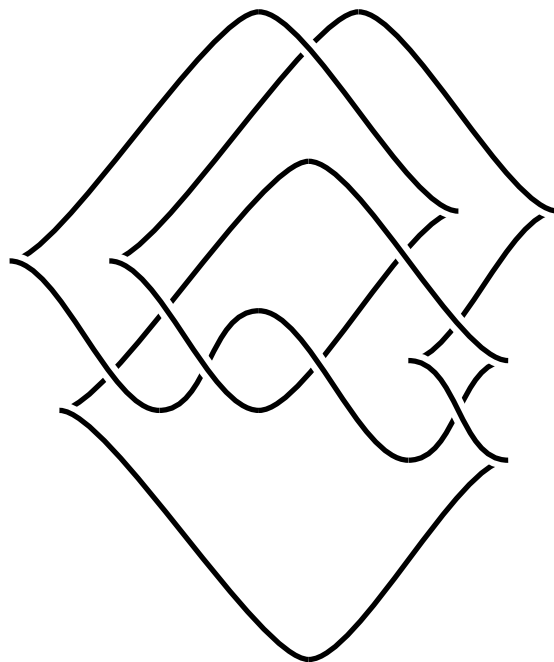


Стабилизация уменьшает  $tb$  на 1, дестабилизация — увеличивает.

Прямоугольные диаграммы  $\rightarrow$  лежандровы зацепления



$R$



$\hat{\mathcal{L}}_R$



**Утверждение.** Любое лежандрово зацепление имеет вид  $\widehat{\mathcal{L}}_R$  для некоторой прямоугольной диаграммы  $R$ .

**Утверждение.**

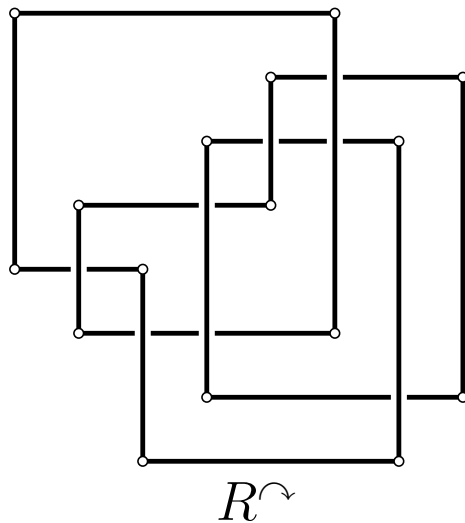
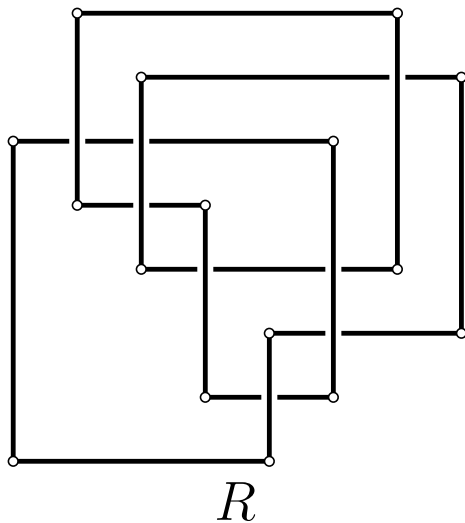
$$\widehat{\mathcal{L}}_{R_1} = \widehat{\mathcal{L}}_{R_2}$$

тогда и только тогда, когда

$$R_1 \xrightarrow{\text{I}} R_2.$$

**Переформулировка теоремы 1.**  $\mathcal{R}$  допускает упрощение типа II тогда и только тогда, когда  $\widehat{\mathcal{L}}_R$  допускает лежандрову дестабилизацию.

С прямоугольной диаграммой ассоциируются два лежандровых зацепления,  $\widehat{\mathcal{L}}_R$  и  $\widehat{\mathcal{L}}_{R^\sim}$ :



Топологически  $\mathcal{L}_R$  и  $\mathcal{L}_{R^\sim}$  зеркально симметричны.

Очевидно равенство

$$\frac{1}{2} \text{число\_ребер}(R) = -(\text{tb}(\widehat{\mathcal{L}}_R) + \text{tb}(\widehat{\mathcal{L}}_{R^{\curvearrowright}})).$$

Это дает возможность вычислить максимальное число Торстона–Беннекена для каждого топологического типа зацеплений. Достаточно взять самую простую (в смысле числа ребер) прямоугольную диаграмму, его представляющую.

## Другие следствия

- Если  $\widehat{\mathcal{L}}_1$  и  $\widehat{\mathcal{L}}_2$  — два лежандрова типа зацеплений, чья топологические типы зеркальны друг другу, то найдется такая прямоугольная диаграмма  $R$ , что

$$\widehat{\mathcal{L}}_1 = \widehat{\mathcal{L}}_R, \quad \widehat{\mathcal{L}}_2 = \widehat{\mathcal{L}}_{R^c}.$$

- Аналогичные приложения для узлов, трансверсальных стандартной контактной структуре, представленных замкнутыми косами.
- Более простое доказательство теоремы о монотонном упрощении.

Публикации:

И. А. Дынников, М. В. Прасолов, Шунты для прямоугольных диаграмм. Доказательство гипотезы Джонса и связанные вопросы, *Тр. ММО*, **74**, № 1, 2013, 115–173; arXiv: 1206.0898

I. A. Dynnikov, Arc-presentations of links: monotonic simplification, *Fund. Math.*, **190** (2006), 29–76; arXiv: math.GT/0208153