История математики
9 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

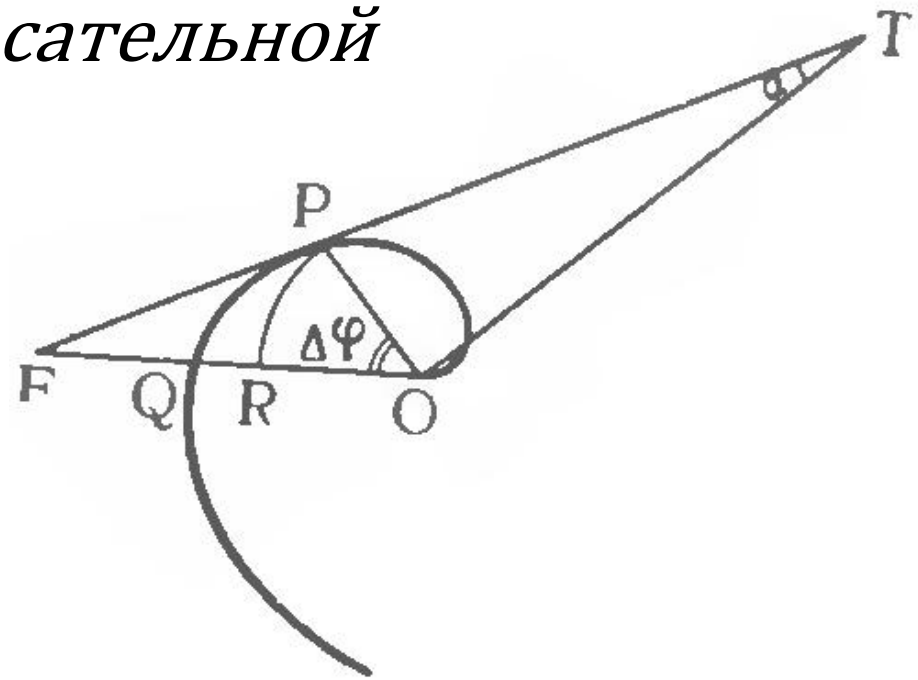
Весенний семестр 2025 года

Математика Древней Греции.

Дифференциальные методы Архимеда.
“Конические сечения” Аполлония.
Вывод симптома параболы у Менехма и у Аполлония.

Дифференциальные методы Архимеда

r – *радиус-вектор касательной*

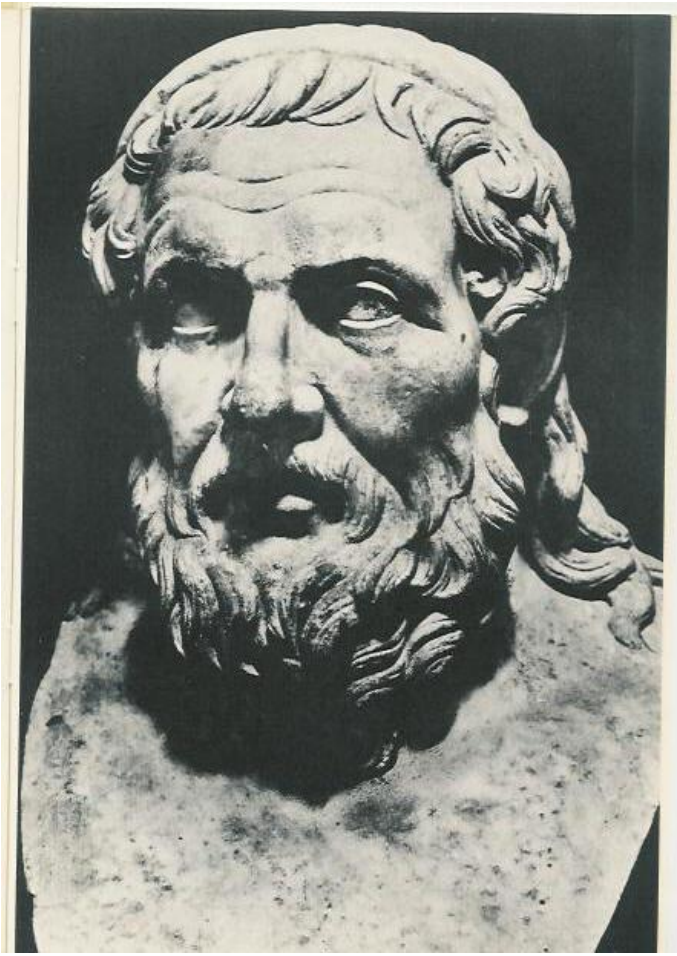


$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = tg\alpha$$

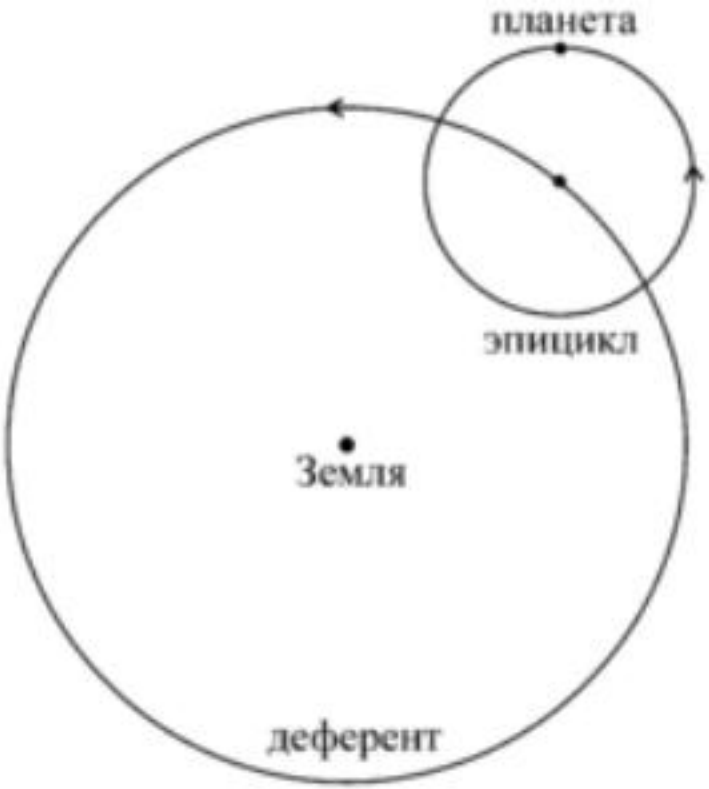
$$\rho = \alpha\varphi$$

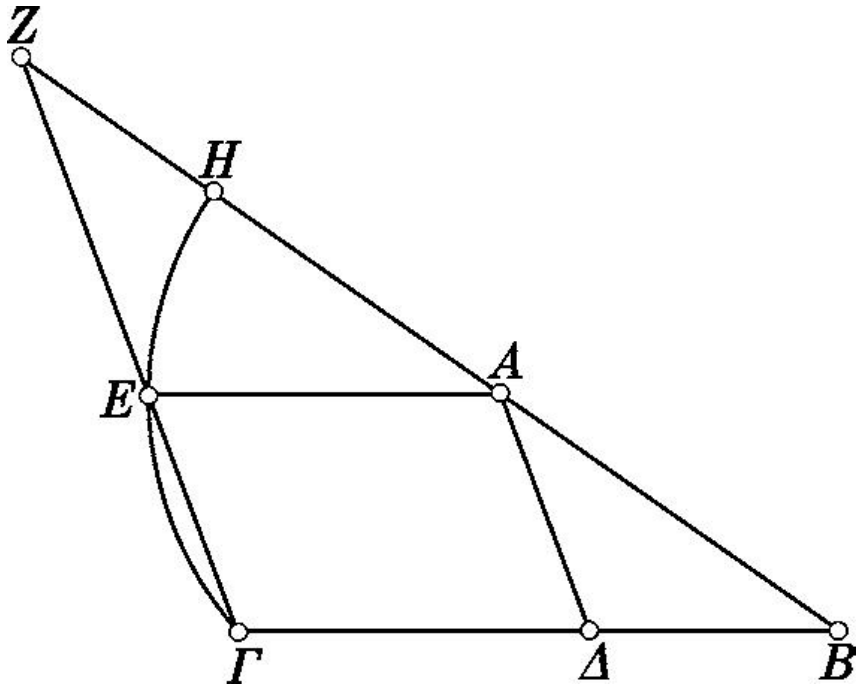
$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{a\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi} = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\varphi}$$

Аполлоний Пергский
(ок. 260-170 гг до н.э.)



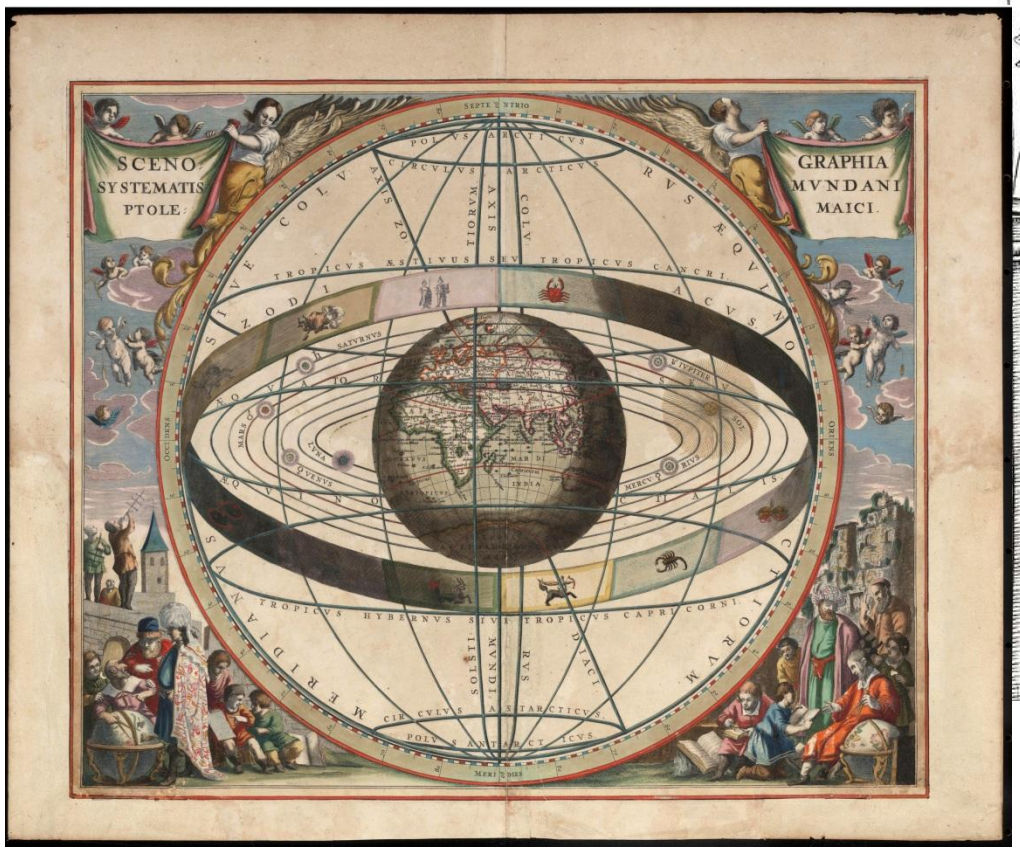
Эпициклы и эксцентры





Клавдий Птолемей
(Александрия, ок.87-165)

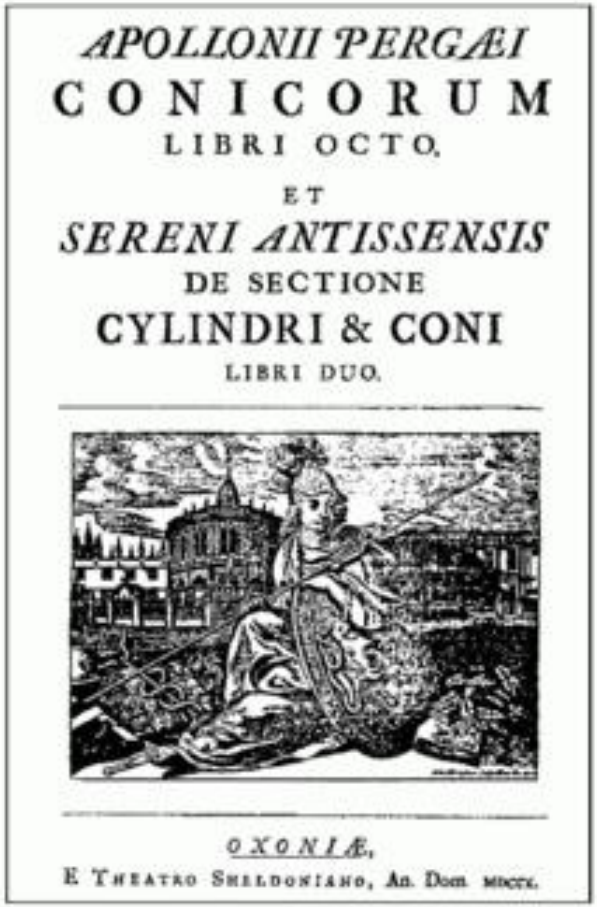
«Альмагест»



Математические труды Аполлония:

1) «Конические сечения», 8 книг
2) «Отсечение отношения», 2 книги, 180 теорем, сохранился в арабском переводе
3) «О вставках»
4) «О неупорядоченных иррациональностях»
5) «О спиральных линиях»
6) «О касании»

Реконструкция 8 книги «Конических сечений» Аполлония

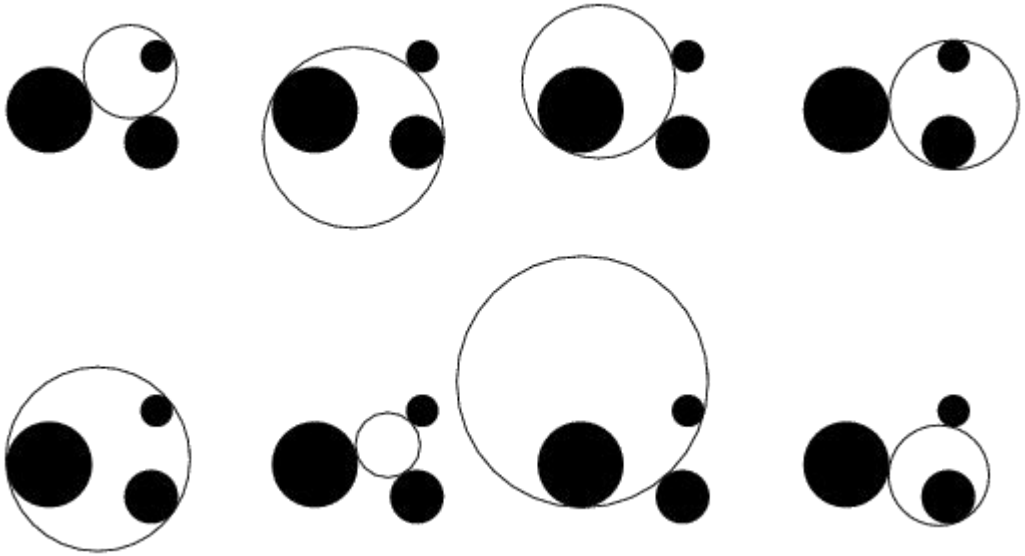


APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,
ET
SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE
CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.

OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCXL.

Задача Аполлония

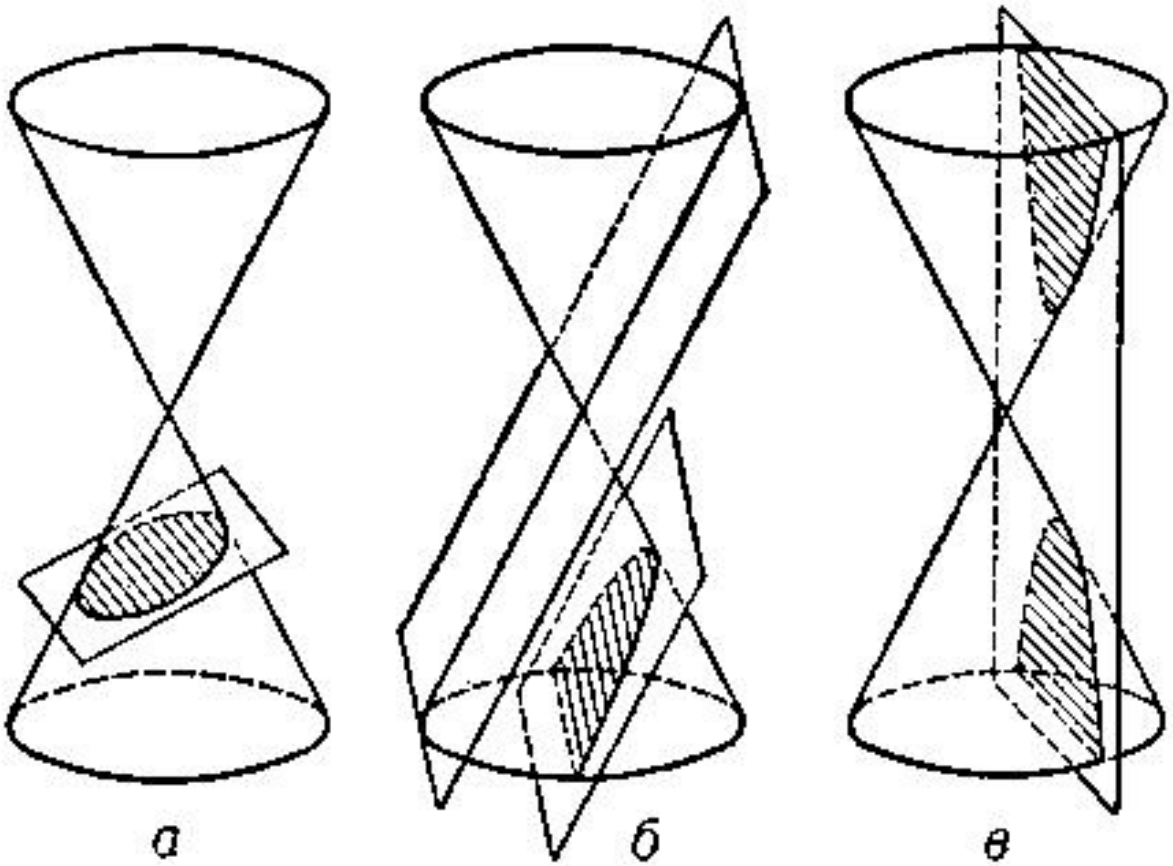
Задача Аполлония — построить с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей.



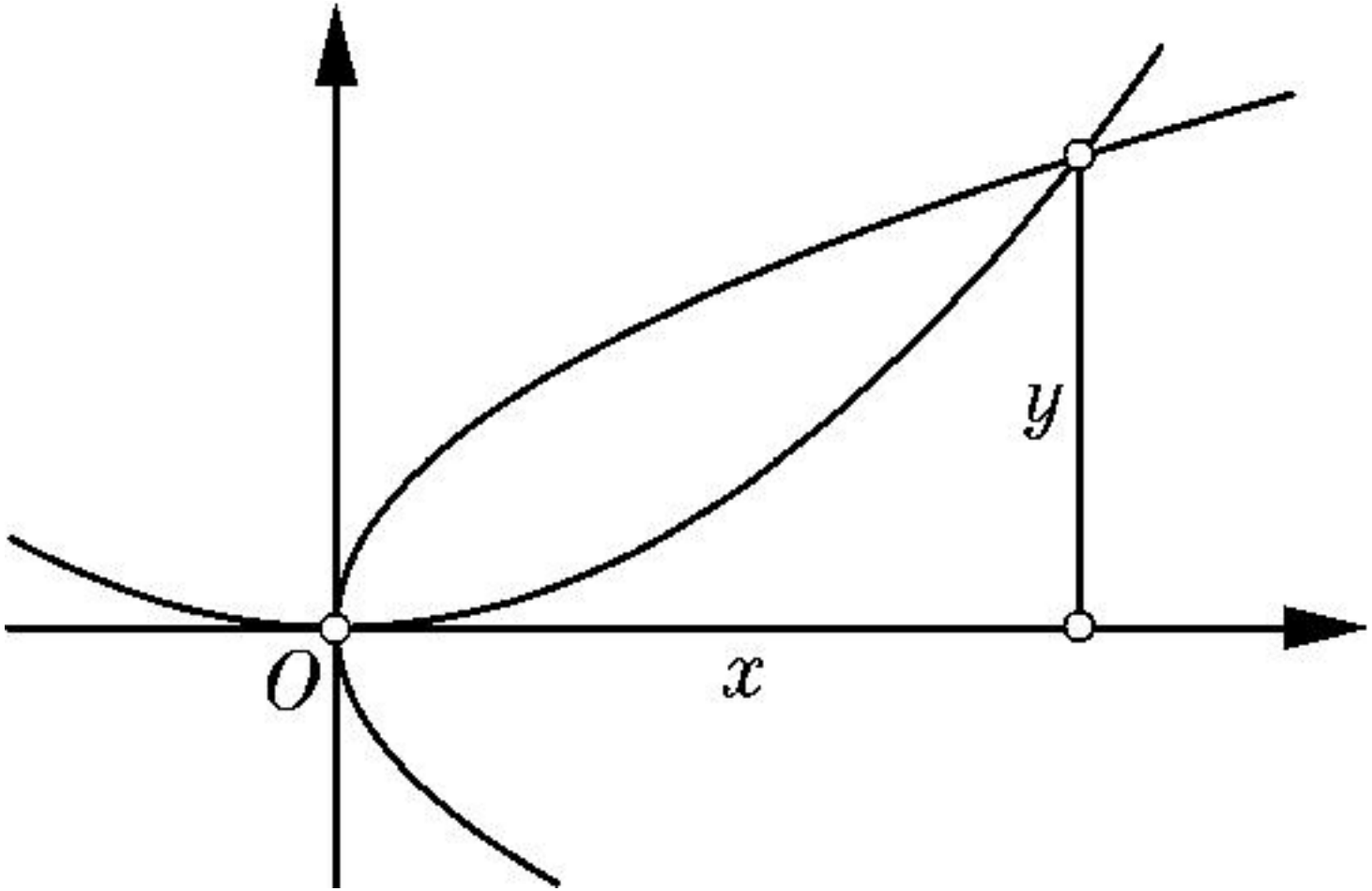
В своем сочинении "Касания" Аполлоний имел в виду три окружности контактной геометрии, т.е. окружности с радиусом от 0 (точка) до бесконечности (прямая).

Таким образом, задача Аполлония разбивается на 10 случаев.

Конические сечения



Решение Менехма задачи об удвоении куба



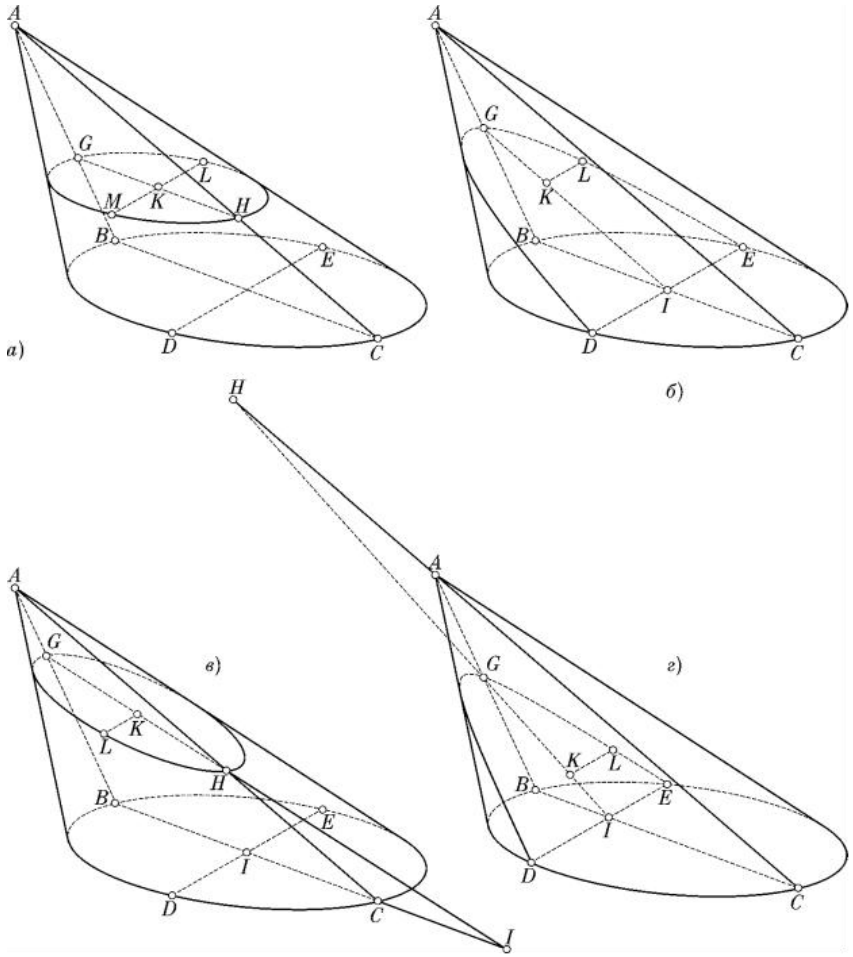
Менехм (IV в. до н.э.)

Симптом параболы: Квадрат на полухорде в каждой точке оси равен прямоугольнику на соответствующем отрезке диаметра и некотором постоянном отрезке.

Т.е. в наших обозначениях

$y^2 = 2px$ – уравнение параболы

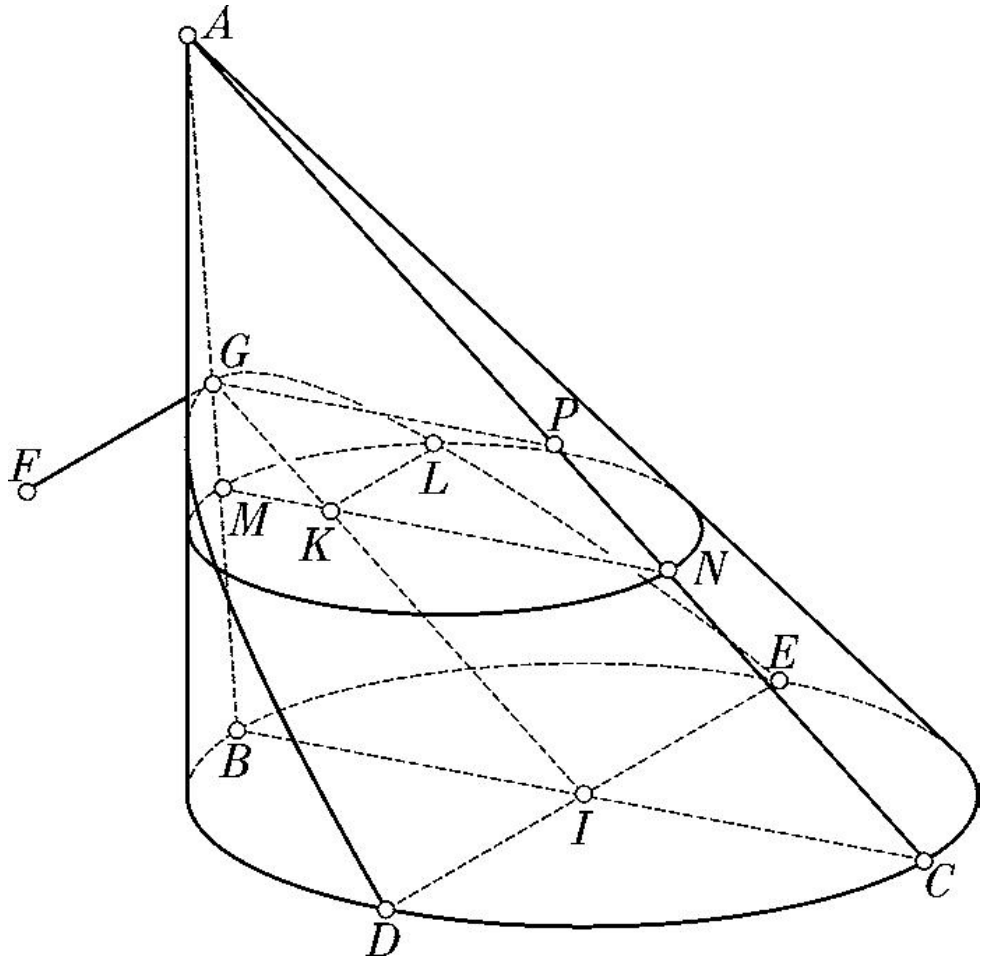
Конические сечения



Конические сечения (симптомы)

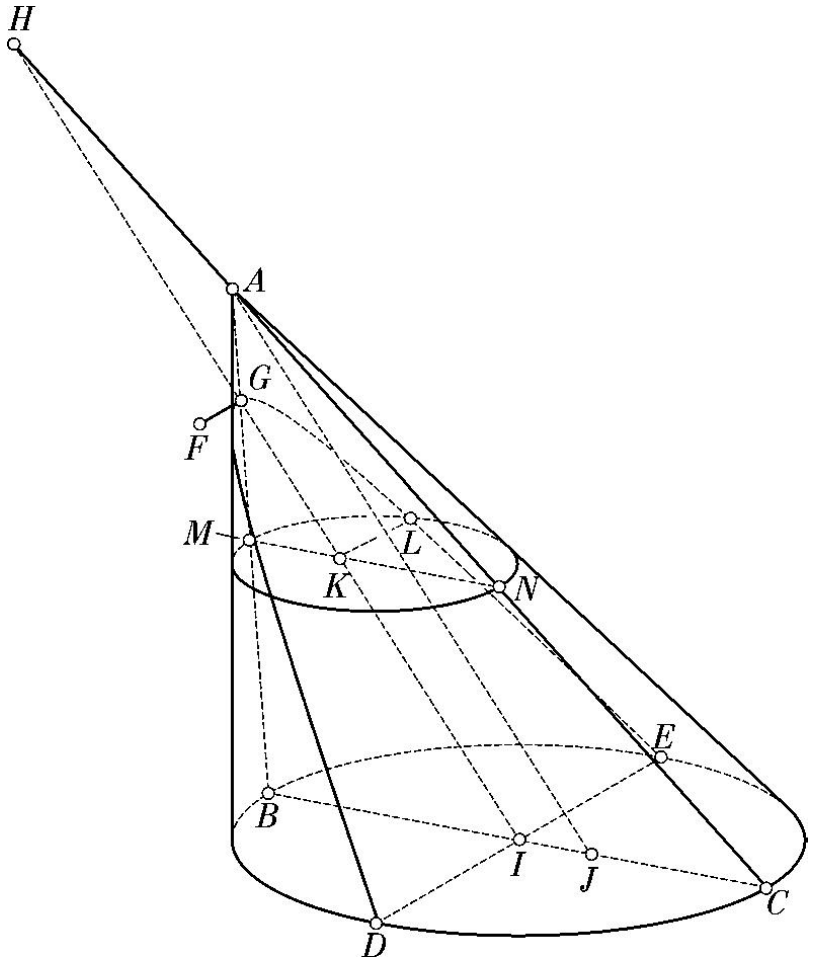
- $y^2 = 2px$ – уравнение параболы
- $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$ – уравнение эллипса
- $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ – уравнение гиперболы

Парабола ($y^2 = 2px$)



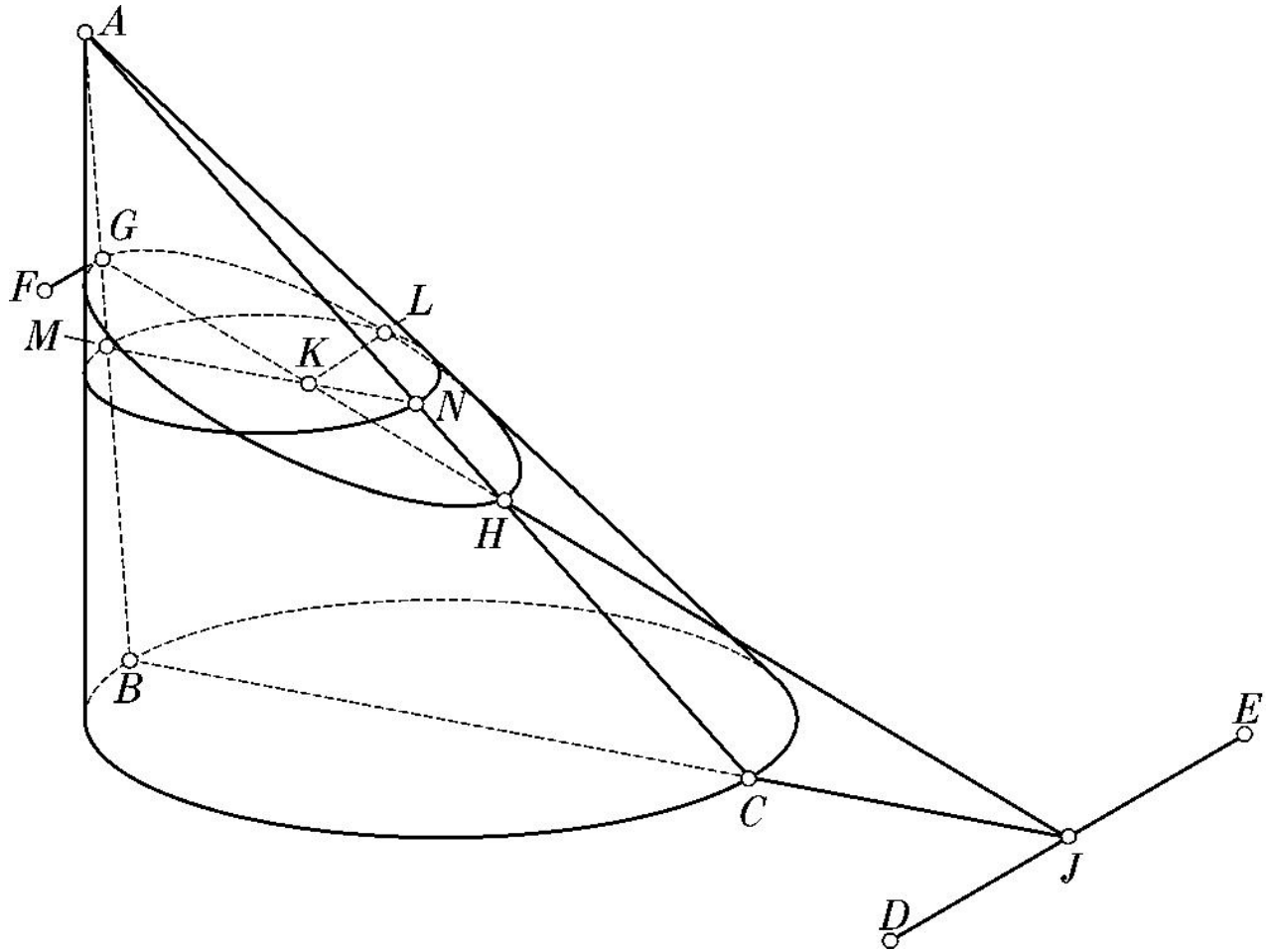
Гипербола

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$



Эллипс

$$(y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2)$$



Конические сечения Аполлония, 1 книга

1) Множество систем координат, зависящих от одного параметра. (Например: диаметр и перпендикулярные ему сопряженные хорды)

2) Инвариантность эллипса, гиперболы и параболы относительно преобразований с.к.

3) Классификация кривых по свойствам их алгебраических уравнений

Конические сечения Аполлония, 2-4 книги

1) Развитие теории конических сечений: основные св-ва сопряженных диаметров и асимптот
2) Уравнение гиперболы относительно асимптот ($xy = const$)
3) Свойства фокусов эллипса и гиперболы

Конические сечения Аполлония, 2-4 книги

4) Полюсы и поляры

5) число точек пересечения двух конических сечений (4 книга)

Конические сечения Аполлония, 5-6 книги

1) Нормали к коническому сечению (перпендикуляры к касательной в точке касания), экстремальные св-ва нормалей (5 книга)
2) Подобные и равные конические сечения (6 книга)

Конические сечения Аполлония, 7, 8 книги

Формулируются знаменитые теоремы Аполлония(7 книга).

Например:

1) Сумма квадратов на сопряженных диаметрах эллипса равна сумме квадратов на главных осях (VII, 12)
2) Разность квадратов на двух сопряженных диаметрах гиперболы равна разности квадратов на главных осях (VII, 13)
3) Параллелограмм, построенный на двух сопряженных диаметрах эллипса или гиперболы, имеет постоянную площадь (VII, 31)

Решение задач, определенных теоремами 7 книги (8 книга)