История математики
8 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2024 года

Математика Древней Греции. Инфинитезимальные методы античности. Метод неделимых. Метод исчерпывания Евдокса Биография Архимеда. Метод интегральных сумм Архимеда.

Инфинитезимальные методы античности

- Метод неделимых. Атомисты, натурфилософская школа Демокрита (Демокрит - ок.460-370 гг до н.э.)
- Метод Исчерпывания Евдокса (Евдокс – ок. 406 – ок. 355 гг. д.н.э.)

Демокрит (ок.460-370 гг до н.э.)

По свидетельству Архимеда, Демокрит установил, что

1) пирамида равновелика одной трети призмы, имеющей с ней одинаковые основание и высоту
2) конус равновелик— 1/3 соответствующего цилиндра.

Но доказательств Демокрит не дал.

Лемма Евдокса

Если даны две величины a и b, a > b, то, вычитая из величины a больше ее половины, из остатка – больше его половины и т.д., получим через конечное число шагов остаток $\alpha_n < b$. (*Предложение X, 1 «Начал» Евклида*).

Лемма Евдокса

По аксиоме Архимеда (Евдокса-Архимеда)

$$\forall a > b \ \exists \ N : Nb > a$$

Повторим N раз процесс выбрасывания из величины a и соответствующих остатков величин, превышающих их половины:

$$\alpha_1 = a - a_1 < \frac{a}{2}$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - a_2 < \frac{\alpha_1}{2} < \frac{a}{4}$$

…

$$\alpha_N < \frac{a}{2^N}$$

Итого получаем: $2^N \cdot \alpha_N < a$

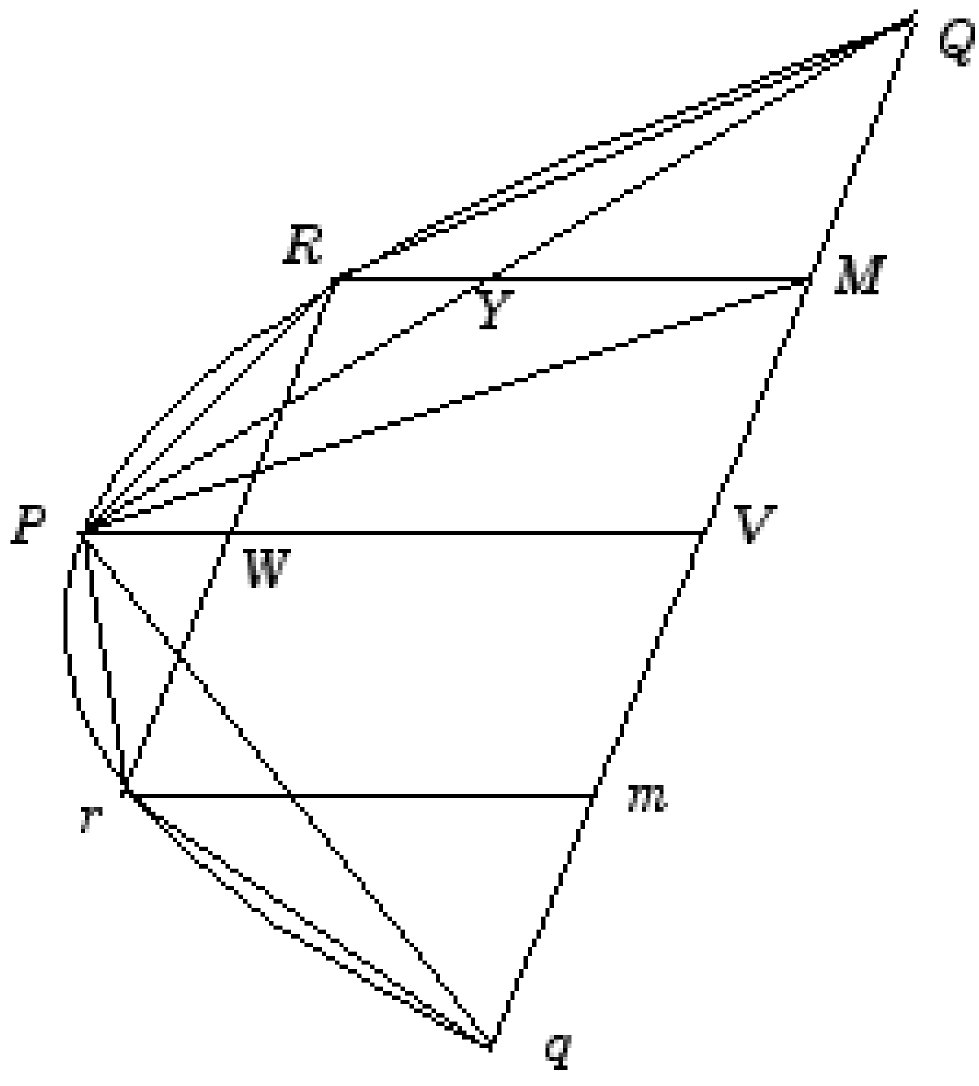
Но тогда: $N \cdot \alpha_N < 2^N \cdot \alpha_N < a < Nb$.

Откуда следует: $\alpha_N < b$, ч.т.д.

С помощью метода исчерпывания Евдокс доказал:

1) Площади двух кругов относятся, как квадраты их диаметров;
2) Объем пирамиды равен трети объема призмы с теми же основанием и высотой;
3) Объем конуса равен трети объема цилиндра с теми же основанием и высотой

Квадратура параболы (Архимед)



Квадратура параболы

Всякий сегмент, заключенный между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с ним одно и то же основание и равную высоту.

Квадратура параболы

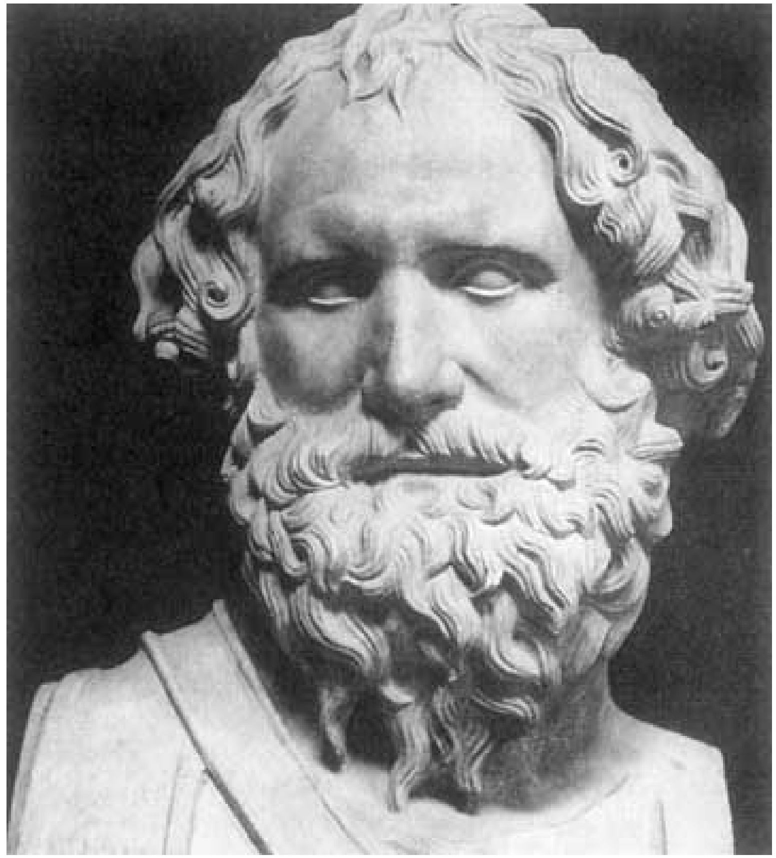
«Архимед Досифею желает благоденствия!»

Работа состоит из 24 утверждений. Причем в первых 17 Архимед показывает,

«*как эта теорема была обнаружена нами при помощи механики*», а затем уже в утверждениях 18-24 доказывает ее геометрически.

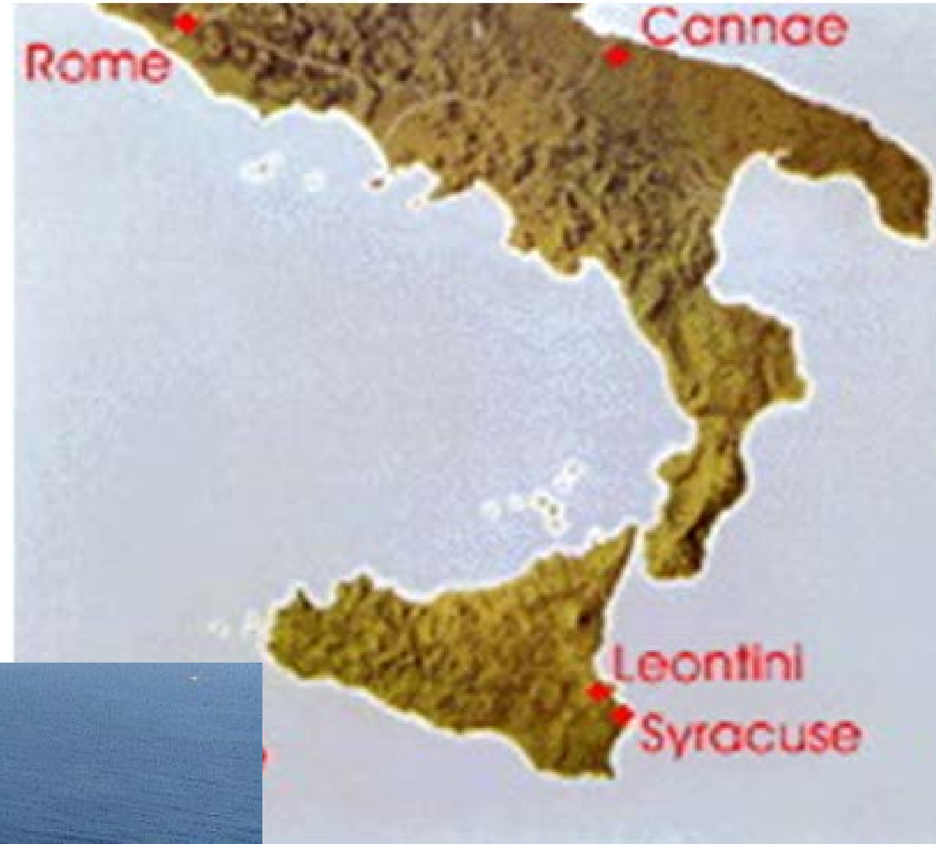
Все основные определения даются перед геометрической частью работы.

Архимед (287 -212гг до н.э.)



Сицилия,

Сиракузы

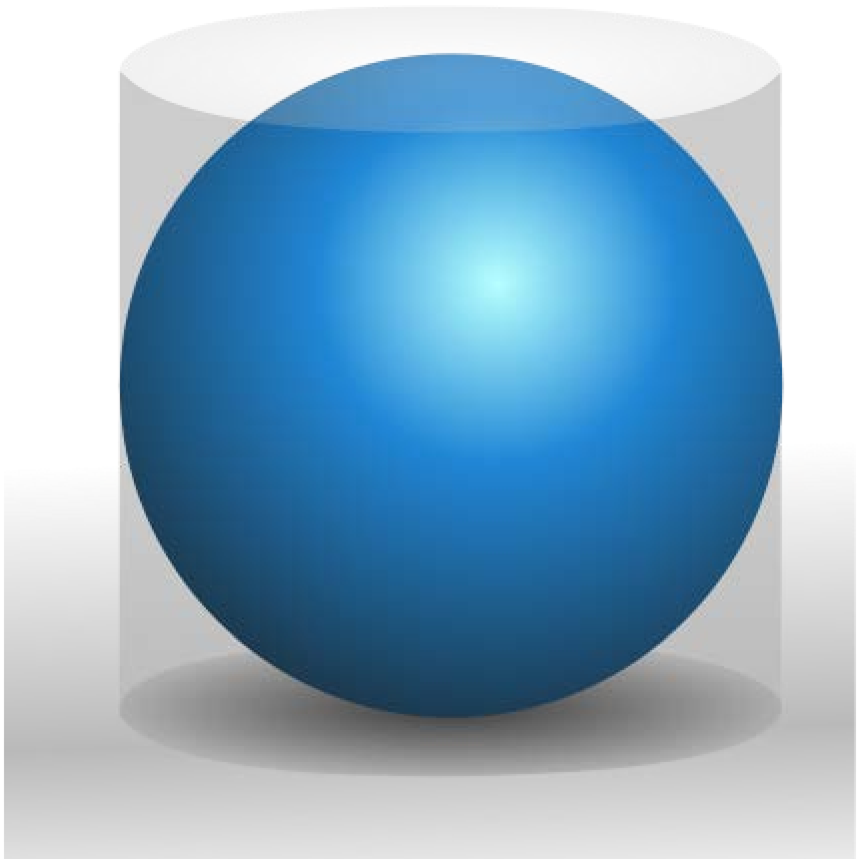


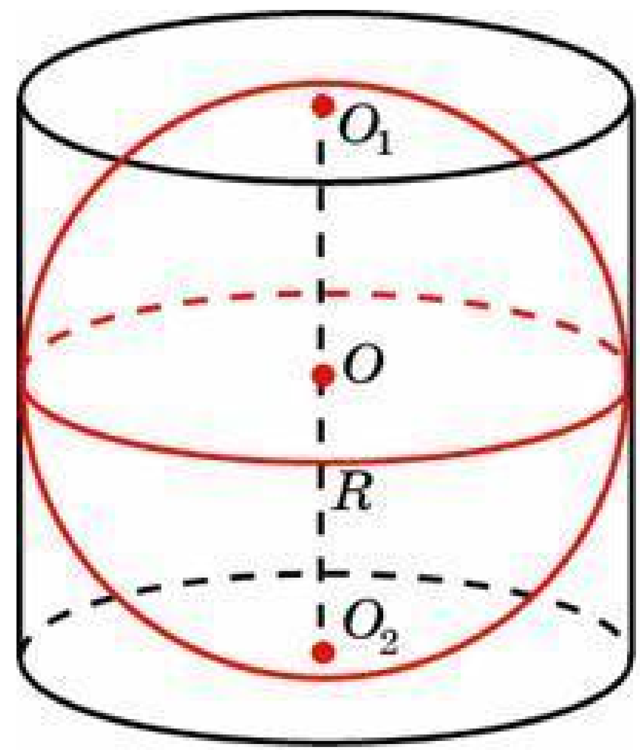
Основные математические труды Архимеда:

1) Квадратура параболы / τετραγωνισμὸς παραβολῆς — определяется площадь сегмента параболы.

2) О шаре и цилиндре (2 книги)/ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου — доказывается, что объём шара равен 2/3 от объёма описанного около него цилиндра, а площадь поверхности шара равна площади боковой поверхности этого цилиндра.

Шар, вписанный в цилиндр





Основные математические труды Архимеда:

3) *О спиралях* / περὶ ἑλίκων — выводятся свойства спирали Архимеда

4) О коноидах и сфероидах / περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων — определяются объёмы сегментов параболоидов, гиперболоидов и эллипсоидов вращения.

Основные математические труды Архимеда:

5) О равновесии плоских фигур / περὶ ἰσορροπιῶν — выводится закон равновесия рычага

6) Послание к Эратосфену о методе / πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος — по тематике частично дублирует работу «*О шаре и цилиндре*», но здесь используется механический метод доказательства математических теорем.

Основные математические труды Архимеда:

7) О плавающих телах / περὶ τῶν ὀχουμένων — выводится закон плавания тел; рассматривается задача о равновесии сечения параболоида, моделирующего корабельный корпус.

8) Измерение круга / κύκλου μέτρησις — до нас дошёл только отрывок из этого сочинения. Именно в нём Архимед вычисляет приближение для числа π.

Работы Архимеда, дошедшие до нас в арабском переводе

1) Трактат о построении около шара телесной фигуры с четырнадцатью основаниями;

2) Книга лемм;

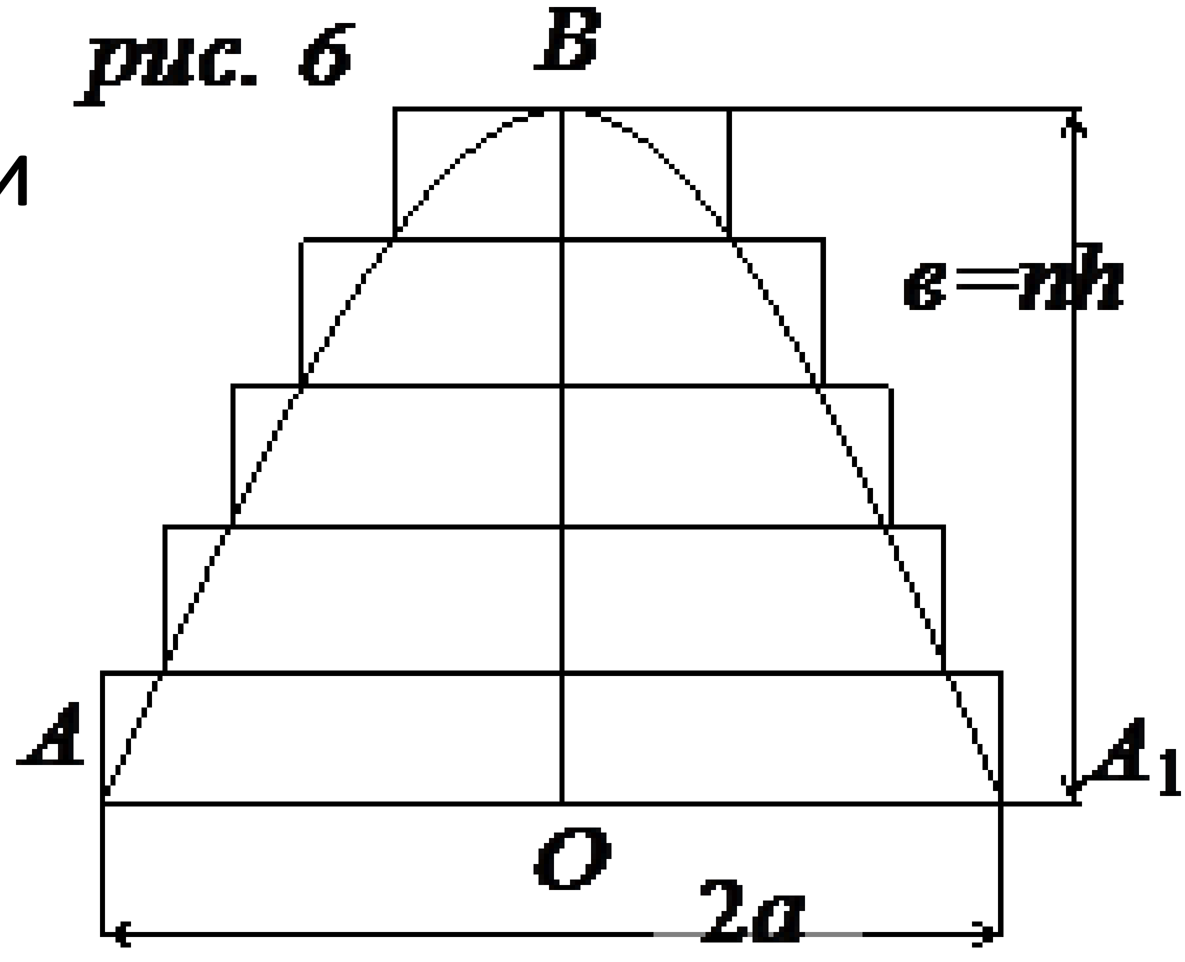
3) Книга о построении круга, разделённого на семь равных частей;

4) Книга о касающихся кругах.

Интегральные методы Архимеда

О «Коноидах и сфероидах»

рис. 6



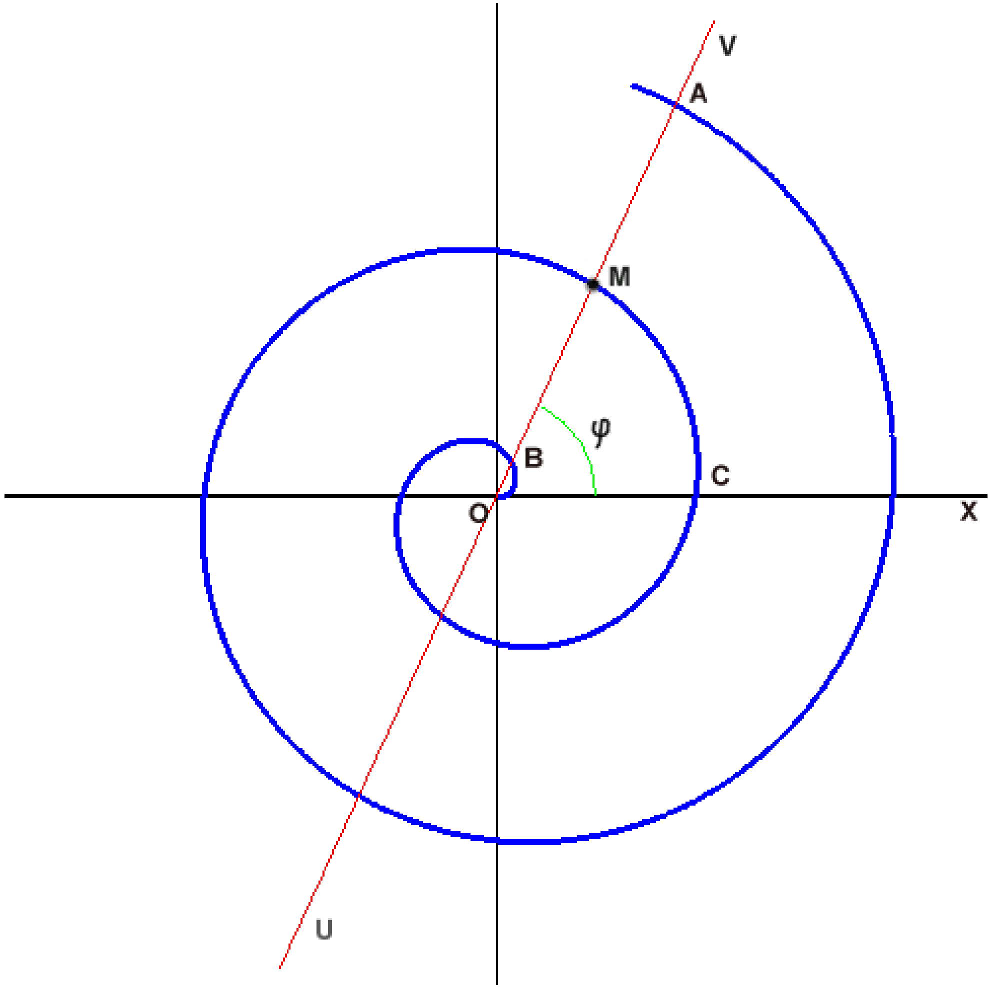
«О коноидах и сфероидах»

Лемма: «*Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси пл-тью, или же сегмент сфероида, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него телесную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, меньшую любой наперед заданной*»

Интегральные методы Архимеда.

Спираль Архимеда $\rho = a\frac{\varphi}{2\pi}$

$$\int_0^a x^2dx = \frac{a^3}{3}$$



«О коноидах и сфероидах»

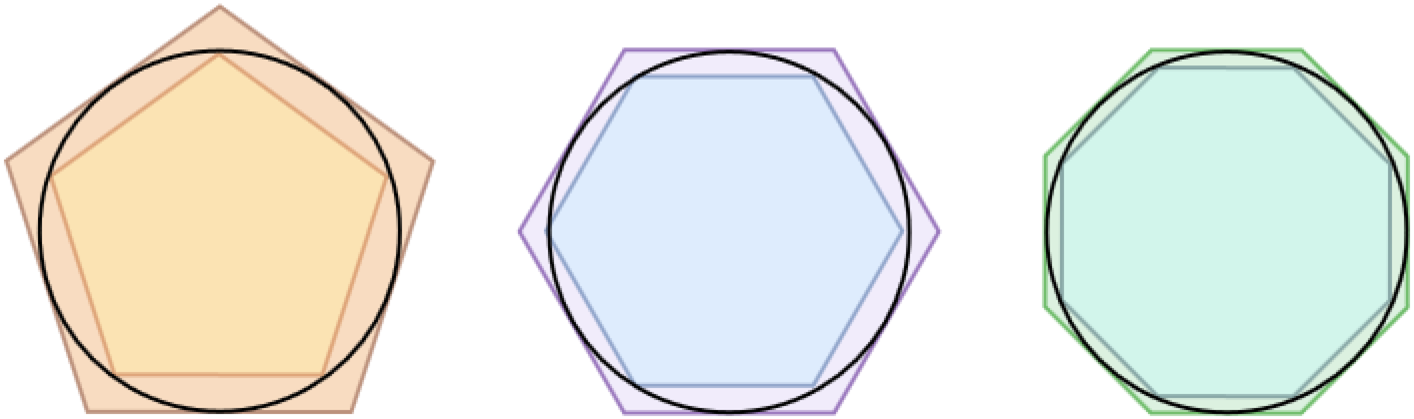
$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_0^a (x^2 + bx) dx = \frac{a^3}{3} + b\frac{a^2}{2}$$

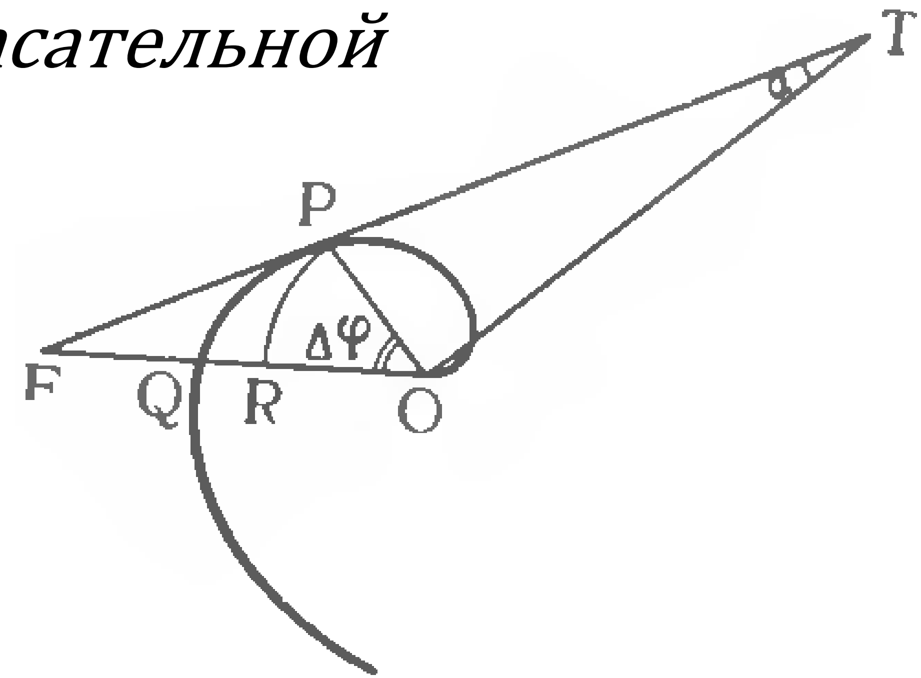
«Измерение круга». Вычисление π.

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$



Дифференциальные методы Архимеда

r – радиус-вектор касательной



$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi} = tg\alpha$$

$$\rho = \alpha\varphi$$

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\ \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\ \frac{a\Delta\varphi}{\rho\Delta\varphi}\ =\ \frac{a}{\rho}\ =\ \frac{1}{\varphi}$$