История математики
7 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2024 года

Математика Древней Греции.

Теория отношения Евдокса.
Классификация иррациональностей.
Теория правильных многогранников.

Экскурс: «Тимей» Платона. В.Гейзенберг.
«Начала» Евклида как античный курс «математической физики»

Александрия

Александр Македонский (356 – 323 до н.э.)

331 до н.э. – основание Александрии

Мусейон

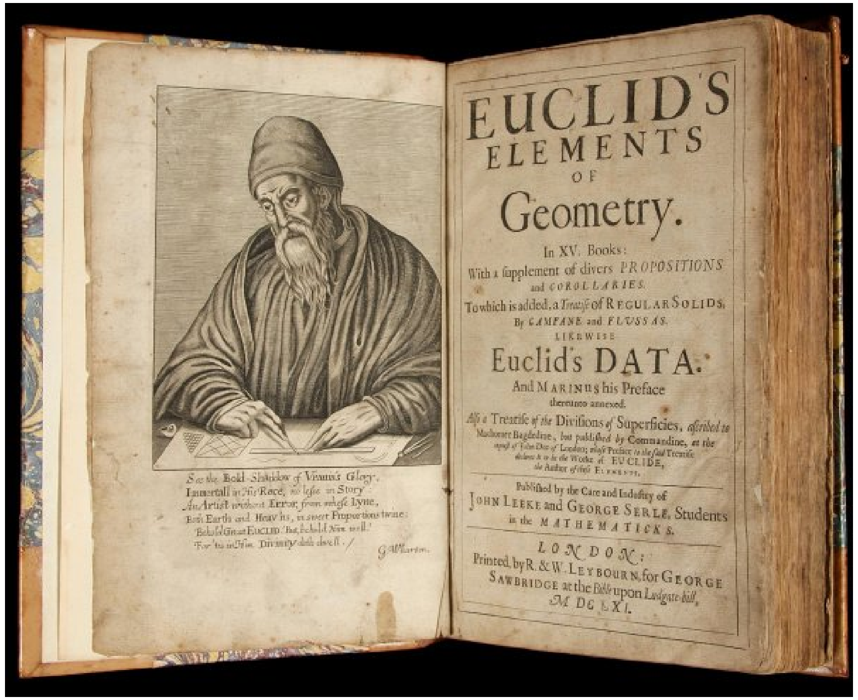
300 до н.э. «Начала» Евклида

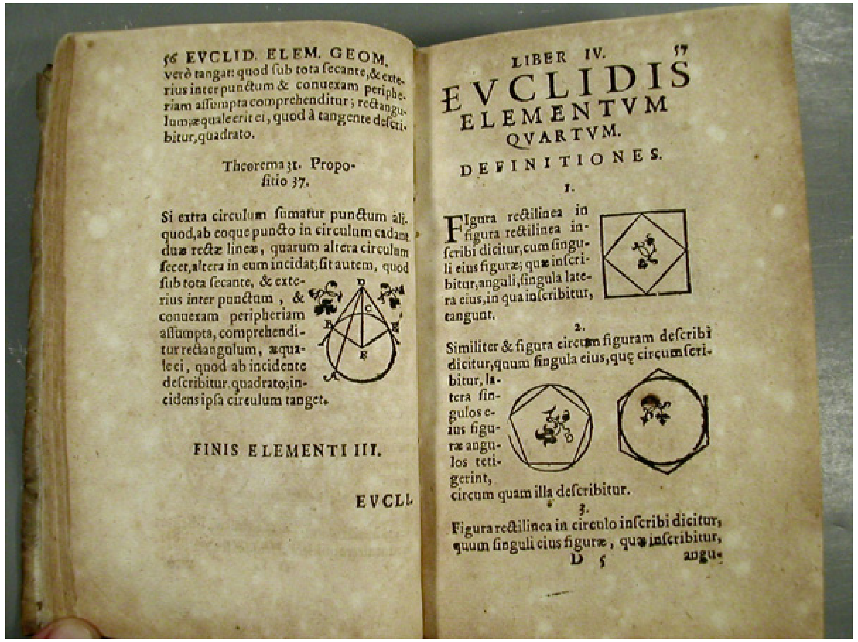
Евклид (365 – ок. 300 до н.э.)

Архимед (287 – 212)

Аполлоний (260 – 170)

«Начала» Евклида





«Начала» Евклида

1-я – 2-я книги – планиметрия и геометрическая алгебра. Обе книги восходят к пифагорейцам.

3-я книга – свойства круга, его касательных и хорд. Восходит к Гиппократу Хиосскому.

4-я книга – построение правильных n-угольников для n = 3, 4, 5, 10, 15. Построение 15-угольника, вероятно, принадлежит Евклиду.

5-я книга – теория отношений Евдокса.

6-я книга – учение о подобии и его приложение к задачам геометрической алгебры, экв. решению квадратных уравнений.

7-я – 9-я книги – теория чисел. Строится исчисление чисел-отрезков. «Алгоритм Евклида». Бесконечность мн. простых чисел.

10-я книга классификация квадратичных иррациональностей (Теэтет).

11- я книга – стереометрия

12-я книга – с использованием метода исчерпывания

доказываются теоремы о площадях кругов, об объёмах шаров и др. тел.

13-я книга – теория правильных многогранников

«Начала» Евклида

14-я книга – сравнение объёмов и площадей поверхностей додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну сферу; автор – Гипсикл (II век до н.э.)

15-я книга – теоремы, касающиеся правильных многогранников; составлена в школе Исидора Милетского (VI век) – строителя Св. Софии в Константинополе

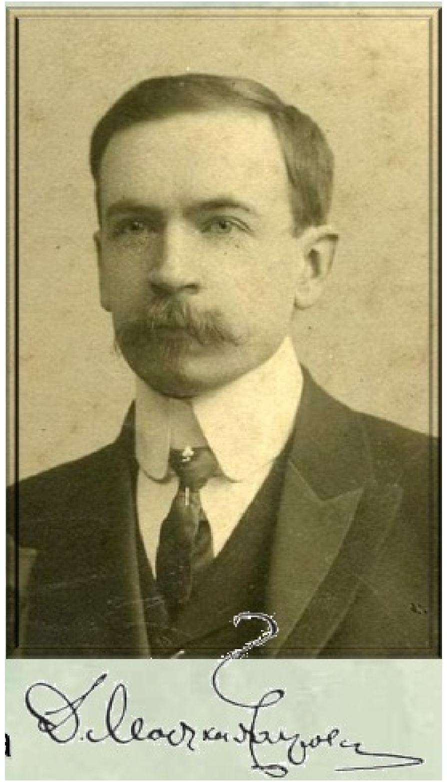
VIII – IX вв. – арабские переводы;

Начиная с XII века – пер. с арабского на латынь

XV в. – первый перевод с греческого Бартоломео Дзамберти; опубл.в Венеции в 1505 г.

Оригинальная рукопись до наших дней не дошла. Тексты дошедших до нас копий совпадают не полностью.

«Начала» Евклида



1739 – первое русское издание

1948 – 1950 – перевод Д.Д. Мордухай-Болтовского (1876 – 1952), последнее издание на русском

Мордухай-Болтовской Дмитрий Дмитриевич

(1876 – 1952)

Окончил Петербургский ун-т (1898). В 1898 – 1914 работал в Варшаве (в Политехническом ин-те и университете). В 1915 – 1949 в ун-те в Ростове-на-Дону, в 1950 – 1952 в Пятигорском пед. ин-те. Автор более 300 работ математическому анализу, теории чисел, дифференциальной и проективной геометрии, теории дифференциальных уравнений, математической логике,

истории и философии математики, методике преподавания математики.

Евдокс Книдский
(ок.406 г. до н.э. – ок.355г. до н.э)

Евдокс – математик, астроном, врач, географ, философ и оратор.

Согласно «Хронике» Аполлодора «расцвет» Евдокса относится приблизительно к 386 г. до н.э., т.е. родился он около 400-406 г. до н.э.

Родился и умер в городе Книде, в Малой Азии, но на протяжении жизни много путешествовал.

Изучал математику у Архита в Таренте, медицину – у Филистиона на Сицилии.

В 23 года приехал в Афины изучать философию и риторику в академии Платона.

Евдокс Книдский
(ок.406 г. до н.э. – ок.355г. до н.э)

В астрономии Евдокс занялся задачей, поставленной Платоном, и успешно решил ее. До этого астрономия носила описательный характер.

Платон предложил астрономам сконструировать модель, в которой видимые движения Солнца, Луны и планет получались бы путем комбинации равномерных круговых движений.

Модель Евдокса состояла из 27 концентрических сфер, в центре которых находилась Земля. Каждая из сфер (кроме внешней, предназначенной для неподвижных звезд) совершала равномерное круговое движение, причем сферы делились на группы (три сферы — для описания движения Солнца, три — для Луны, по четыре — для каждой из пяти планет), движения которых были связаны между собой.

Евдокс Книдский (ок.406 г. до н.э. – ок.355г. до н.э)

Евдокс основал собственную научную школу в Кизике на Мраморном море, там же была построена обсерватория, в которой впервые в Элладе систематически велись наблюдения. В Кизике был составлен первый в Греции звездный каталог.

Евдокс знал уже, что Солнце больше Земли, но считал, что отношение их диаметров равно 9:1. Ему же приписывают первое определение длины земного меридиана.

Теория **числовых** отношений, VII-IX книги «Начал» Евклида

Материалы VII книги восходят к Теэтету, VIII – к Архиту

VII книга «Начал»: Две пары чисел (A, B) и (C, D) **пропорциональны**, если у A и B существует общий делитель F, а у C и D общий делитель G такие, что

$$A = mF \qquad C = mG$$
$$B = nF \qquad D = nG$$

Пифагорейцы знали, что отношение пропорциональности транзитивно.

Пусть (A_0, B_0) - наименьшая пара.

Доказано:

1. Если $A : B = A_0 : B_0$, то $A = kA_0, B = kB_0$ (VII, 20)

2. Если A_0, B_0 взаимно просты, то это наименьшая пара из всех, имеющих с ней одинаковое отношение (VII, 21)

3. Если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они взаимно просты. (VII, 22)

4. Если $A : B = F : G$ и $B : C = G : H$, то

$$A : C = F : H$$ (закон композиции) (VII, 14)

5. $(A_1 A_2 : B_1 B_2) = (A_1 : B_1) \otimes (A_2 : B_2)$,

где $\otimes$ - операция составления отношений (VIII, 5)

6. Чтобы составить отношения $(A : B)$ и $(C : D)$, надо найти наименьшие числа F, G, H такие, что $A : B = F : G$ и $C : D = G : H$. Тогда

$$(A : B) \otimes (C : D) = (F : G) \otimes (G : H) = (F : H)$$

(VIII, 4-5)

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

В основе этой теории - **новая**, более общая **концепция величины**.

Согласно Аристотелю, ***в «старой» теории отношений*** (она была основана на применении алгоритма Евклида, т.е. на сравнении непрерывных дробей) ***основные предложения приходилось доказывать отдельно для чисел, отрезков и площадей***. Отсюда видно, что эта теория не опиралась на общее понятие величины, ее приходилось, по существу, отдельно строить для разных родов величин.

Кроме того, в «старой» теории не удавалось определить общим образом операции над отношениями. Поэтому-то она и была оставлена.

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Понятие величины, по Евдоксу, охватывает и числа и непрерывные величины: отрезки, площади, объемы.

Оно вводится с помощью определений и аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства.

Определение 3: Отношение есть некоторая связь по величине между однородными величинами.

Определение 4: (Аксиома Архимеда) Говорят, что величины находятся друг к другу в некотором отношении, если они, будучи взяты подходящее число раз кратными, могут превзойти одна другую.

Пример неархимедовых величин: роговидные углы

Общая теория отношений Евдокса V книга «Начал» Евклида

Определение 5. Говорят, что величины находятся в том же самом отношении, первая ко второй и третья к четвертой, если любые одинаковые кратные первой и третьей будут одновременно обе или больше, или равны, или меньше любых одинаковых кратных второй и четвертой, взятых в соответствующей последовательности.

То есть,

$a:b \equiv c:d \Leftrightarrow \forall$ натуральных m, n верно одно из трех утверждений:

$ma > nb \Leftrightarrow mc > nd$ *или*

$ma < nb \Leftrightarrow mc < nd$ *или*

$ma = nb \Leftrightarrow mc = nd$

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Определение 6

Величины, имеющие то же отношение, называются пропорциональными

Определение 7

Если для тех же самых кратностей кратное первой величины будет больше кратного второй, но кратное третьей не будет больше кратного четвертой, то говорят, что первая имеет ко второй ***большее отношение***, чем третья к четвертой.

То есть, если

$ma > nb$, но $mc < nd$, где m и n натуральные числа, то

$$a : b > c : d$$

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Аксиомы:

1) Равные одному и тому же равны между собой.

2) И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3) И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4) И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5) И целое больше части» .

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Отношения выполняют при этом ту же функцию, что и «***сечения***» в теории действительных чисел ***Дедекинда***.

Р. Липшиц через несколько лет после выхода в 1872 г. работы Дедекинда «***Непрерывность и иррациональные числа***» высказал мнение, что они отличаются лишь по форме.

Дедекинд в переписке с Липшицем в 1876 г. показал, что эти две теории имеют много общего, но наряду с этим и существенные отличия. Одно из основных отличий состоит в том, что в теории Дедекинда область действительных чисел оказывается непрерывной в силу того, что каждое сечение множества рациональных чисел производится некоторым рациональным или иррациональным числом (вся конструкция Дедекинда имела целью обеспечить эту непрерывность). Между тем ***в теории Евдокса непрерывность не обеспечена*** и нельзя утверждать, что любое сечение в области соизмеримых отношений или рациональных чисел производится каким-либо отношением.

Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд (1831-1916)

Рихард Дедекинд. «***Непрерывность и иррациональные числа***» Stetigkeit und irrationale Zahlen / пер. с нем. С. О. Шатуновского. Матезис, 1923.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Феодор из Кирены (конец V- нач. IV в. до н.э.)

Диоген Лаэрций называет его учителем Платона.

Но больше всего мы знаем о нем из диалога Платона ***«Теэтет».*** В упомянутом диалоге, действие которого происходит в 399 году, Феодор Киренский выступает уже седовласым старцем; значит, он должен был быть современником Гиппократа и Демокрита.

«Теэтет. Вот Феодор начертил нам нечто о площадях квадратов и показал, что трёхфутовая и пятифутовая по длине несоизмеримы с однофутовой. Так, перебирая их одну за другой, он дошёл до семнадцатифутовой. Тут его что-то остановило».

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Согласно диалогу Платона «Теэтет», пифагореец Феодор из Кирены доказал, что стороны квадратов с площадями 3, 5,6, 7,..., 17 не-соизмеримы со стороной единичного квадрата.

Нам неизвестно, как проводил доказательства Феодор, но ясно, что он рассматривал каждый случай отдельно.

Опять же, согласно Платону, первое общее учение об иррациональностях принадлежит юному ученику Феодора — **Теэтету (ок.415 г. до н.э. – 369 г. до н.э.)**.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Теэтет сумел общим образом охарактеризовать первый бесконечный класс иррациональностей, а именно таких, которые мы теперь обозначаем $\sqrt{N}$, где N—целое число, не являющееся полным квадратом.

Ему принадлежит, по-видимому, следующая замечательная теорема:

если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной единичного квадрата.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на основное пред-ложение теории делимости: произведение двух целых чисел AB делится на простое число p тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на p.

На основании этого предложения иррациональность $\sqrt{N}$, если N не является полным квадратом, доказывается точно также, как и иррациональность $\sqrt{2}$.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Доказательство распадается на геометрическую и теоретико-числовую части.

Из предположения соизмеримости сторон следовало бы сначала геометрически вывести, что стороны относятся между собой, как два числа p и q, а площади получающихся квадратов—как их квадраты p^2 и q^2 таким образом, $n: 1 = p^2 : q^2$ (1)

или, что то же, $p^2 = nq^2$ (2)

После того методами теории чисел следовало бы доказать, что из (1) и (2) вытекает, что n будет квадратным числом. Аналогично и для третьих степеней.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Геометрическая часть этого доказательства находится в X книге «Начал». Предложения 5, 6, и 9 этой книги гласят:

X, 5. *Соизмеримые величины относятся друг к другу, как одно число к другому*.

X, 6. *Если две величины относятся друг к другу, как одно число к другому, то они соизмеримы*.

X, 9. *Квадраты на двух соизмеримых по длине отрезках относятся, как одно квадратное число к другому квадратному числу. И квадраты, относящиеся как одно квадратное число к другому, имеют также соизмеримые по длине стороны*.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Теэтет ввел точные понятия о «соизмеримом по длине» и о «соизмеримом в квадрате», которые дали основы для разделения отрезков прямой на соизмеримые «длины» и «несоизмеримые» «стороны квадратов», а в предложении X, 9 он сформулировал необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять два квадрата для того, чтобы их стороны были соизмеримы по длине. На основании этого он мог ответить на вопрос, какие из этих сторон будут соизмеримы с единицей длины, и тем самым дать общее решение задачи, которая была решена Феодором только для сторон квадратов с площадями от 3 до 17 квадратных футов.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Евклид в X,21, X,36 и X,73 определяет три основных рода иррациональных отрезков: ***медиаль***, ***биномиаль*** и ***апотому****)*.

Медиальной площадью называется площадь прямоугольника *ab*, стороны *a* и *b* которого выразимы, но друг с другом несоизмеримы.

Мы бы сказали, что это—площадь, равная$\sqrt{r}$, где *r* - рациональное число.

Отрезок, квадрат на котором имеет медиальную площадь, называется *медиальным* отрезком, мы сказали бы—отрезком $\sqrt[4]{r}$*.* Длина этого отрезка удовлетворяет уравнению $x^2 = ab$ и, таким образом, является средней пропорциональной между *a* и *b,* откуда и имя—**медиаль**.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Сумма *a+b* двух выразимых, но друг с другом несоизмеримых отрезков называется *биномиалью* («двухименной»), а разность

a—b—апотомой («отсеченной»).

В книге X доказывается, что эти новые виды отрезков все «невыразимы» и взаимно исключают друг друга, а кроме того, что биномиаль только единственным образом может быть представлена в виде суммы *a+b*, а апотома—единственным образом в виде разности *a — b* двух выразимых отрезков.

Все эти доказательства базируются на одной и той же основной мысли, которая красной нитью проходит через всю книгу: ***чтобы показать свойства каких- либо отрезков, строят на этих отрезках квадрат и исследуют свойства этого квадрата*.**

Теория правильных многогранников, XIII «Начал» Евклида. Теэтет.

«В этой, тринадцатой книге разбираются пять так называемых Платоновых тел, которые, однако, открыты не Платоном, ибо три из названных пяти тел, а именно куб, пирамида и додекаэдр, происходят от пифагорейцев, а октаэдр и икосаэдр введены Теэтетом. По имени Платона они названы потому, что он упоминает их в „Тимее”. Эта книга носит также имя Евклида, потому что он принял ее в свои „Начала”».

- Смысл этой последней фразы, очевидно, в том, что Евклид не сам обработал эту книгу, а взял ее целиком из более древнего произведения.