История математики
7 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Математика Древней Греции.

Теория отношения Евдокса.
Классификация иррациональностей.
Теория правильных многогранников.

Экскурс: «Тимей» Платона. В.Гейзенберг.
«Начала» Евклида как античный курс «математической физики»

Александрия

Александр Македонский (356 – 323 до н.э.)

331 до н.э. – основание Александрии

Мусейон

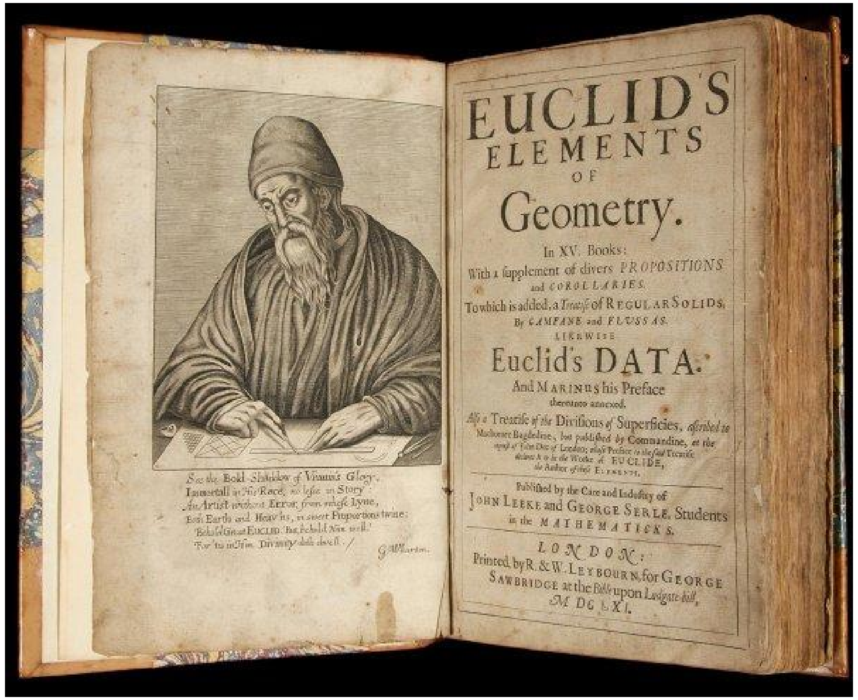
300 до н.э. «Начала» Евклида

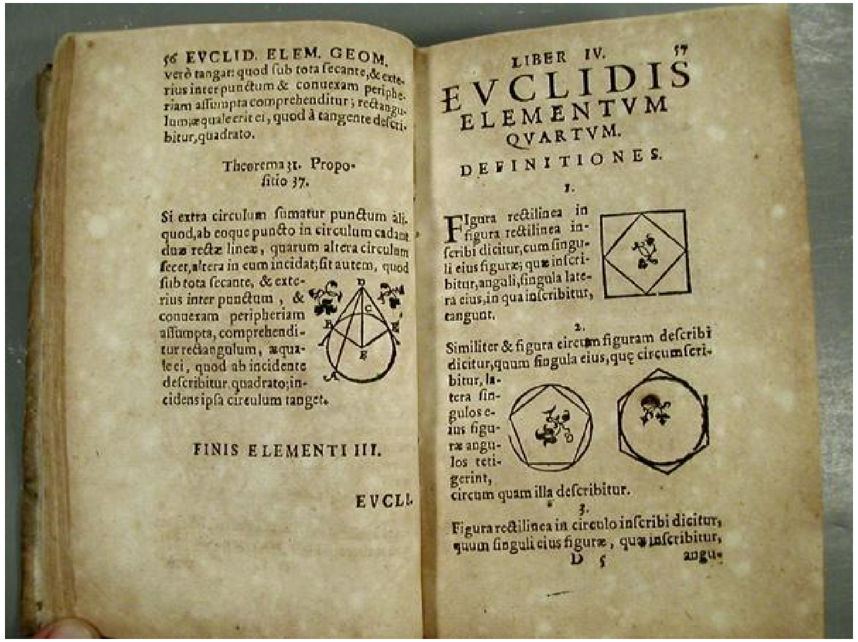
Евклид (365 – ок. 300 до н.э.)

Архимед (287 – 212)

Аполлоний (260 – 170)

«Начала» Евклида





«Начала» Евклида

1-я – 2-я книги – планиметрия и геометрическая алгебра. Обе книги восходят к пифагорейцам.

3-я книга – свойства круга, его касательных и хорд. Восходит к Гиппократу Хиосскому.

4-я книга – построение правильных n-угольников для n = 3, 4, 5, 10, 15. Построение 15-угольника, вероятно, принадлежит Евклиду.

5-я книга – теория отношений Евдокса.

6-я книга – учение о подобии и его приложение к задачам геометрической алгебры, экв. решению квадратных уравнений.

7-я – 9-я книги – теория чисел. Строится исчисление чисел-отрезков. «Алгоритм Евклида». Бесконечность мн. простых чисел.

10-я книга классификация квадратичных иррациональностей (Теэтет).

11- я книга – стереометрия

12-я книга – с использованием метода исчерпывания

доказываются теоремы о площадях кругов, об объёмах шаров и др. тел.

13-я книга – теория правильных многогранников

«Начала» Евклида

14-я книга – сравнение объёмов и площадей поверхностей додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну сферу; автор – Гипсикл (II век до н.э.)

15-я книга – теоремы, касающиеся правильных многогранников; составлена в школе Исидора Милетского (VI век) – строителя Св. Софии в Константинополе

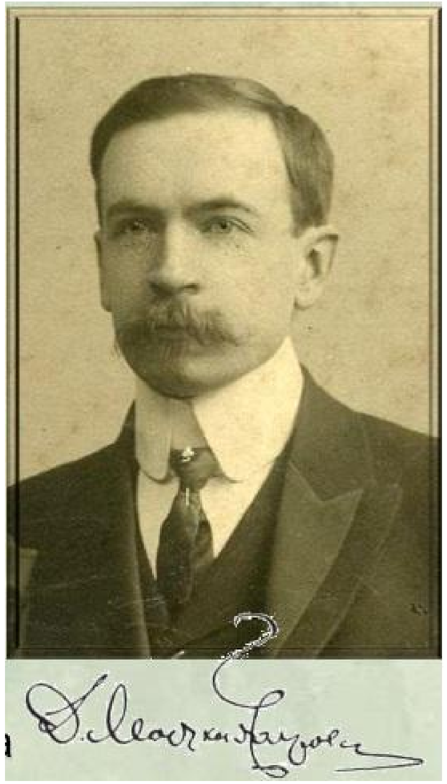
VIII – IX вв. – арабские переводы;

Начиная с XII века – пер. с арабского на латынь

XV в. – первый перевод с греческого Бартоломео Дзамберти; опубл.в Венеции в 1505 г.

Оригинальная рукопись до наших дней не дошла. Тексты дошедших до нас копий совпадают не полностью.

«Начала» Евклида



1739 – первое русское издание

1948 – 1950 – перевод Д.Д. Мордухай-Болтовского (1876 – 1952), последнее издание на русском

Мордухай-Болтовской Дмитрий Дмитриевич

(1876 – 1952)

Окончил Петербургский ун-т (1898). В 1898 – 1914 работал в Варшаве (в Политехническом ин-те и университете). В 1915 – 1949 в ун-те в Ростове-на-Дону, в 1950 – 1952 в Пятигорском пед. ин-те. Автор более 300 работ математическому анализу, теории чисел, дифференциальной и проективной геометрии, теории дифференциальных уравнений, математической логике,

истории и философии математики, методике преподавания математики.

Евдокс Книдский
(ок.406 г. до н.э. – ок.355г. до н.э)

Евдокс – математик, астроном, врач, географ, философ и оратор.

Согласно «Хронике» Аполлодора «расцвет» Евдокса относится приблизительно к 386 г. до н.э., т.е. родился он около 400-406 г. до н.э.

Родился и умер в городе Книде, в Малой Азии, но на протяжении жизни много путешествовал.

Изучал математику у Архита в Таренте, медицину – у Филистиона на Сицилии.

В 23 года приехал в Афины изучать философию и риторику в академии Платона.

Евдокс Книдский
(ок.406 г. до н.э. – ок.355г. до н.э)

В астрономии Евдокс занялся задачей, поставленной Платоном, и успешно решил ее. До этого астрономия носила описательный характер.

Платон предложил астрономам сконструировать модель, в которой видимые движения Солнца, Луны и планет получались бы путем комбинации равномерных круговых движений.

Модель Евдокса состояла из 27 концентрических сфер, в центре которых находилась Земля. Каждая из сфер (кроме внешней, предназначенной для неподвижных звезд) совершала равномерное круговое движение, причем сферы делились на группы (три сферы — для описания движения Солнца, три — для Луны, по четыре — для каждой из пяти планет), движения которых были связаны между собой.

Евдокс Книдский
(ок.406 г. до н.э. – ок.355г. до н.э)

Евдокс основал собственную научную школу в Кизике на Мра-морном море, там же была построена обсерватория, в которой впервые в Элладе систематически велись наблюдения. В Кизике был составлен первый в Греции звездный каталог.

Евдокс знал уже, что Солнце больше Земли, но считал, что отношение их диаметров равно 9:1. Ему же приписывают первое определение длины земного меридиана.

Теория **числовых** отношений, VII-IX книги «Начал» Евклида

Материалы VII книги восходят к Теэтету, VIII – к Архиту

VII книга «Начал»: Две пары чисел (A, B) и (C, D) **пропорциональны**, если у A и B существует общий делитель F, а у C и D общий делитель G такие, что

$$A = mF \qquad C = mG$$

$$B = nF \qquad D = nG$$

Пифагорейцы знали, что отношение пропорциональности транзитивно.

Пусть (A_0, B_0) - наименьшая пара.

Доказано:

1. Если $A: B = A_0: B_0$, то $A = kA_0,\ B = kB_0$ (VII, 20)

2. Если A_0, B_0 взаимно просты, то это наименьшая пара из всех, имеющих с ней одинаковое отношение (VII, 21)

3. Если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они взаимно просты. (VII, 22)

4. Если $A\colon B = F\colon G$ и $B : C = G\colon H$, то

$$A\colon C = F\colon H$$ (закон композиции) (VII, 14)

5. $(A_1 A_2\colon B_1 B_2) = (A_1\colon B_1) \otimes (A_2\colon B_2)$,

где $\otimes$ - операция составления отношений (VIII, 5)

6. Чтобы составить отношения $(A\colon B)$ и $(C\colon D)$, надо найти наименьшие числа F, G, H такие, что $A\colon B = F\colon G$ и $C\colon D = G\colon H$. Тогда

$$(A\colon B) \otimes (C\colon D) = (F\colon G) \otimes (G\colon H) = (F\colon H)$$

(VIII, 4-5)

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

В основе этой теории - **новая**, более общая **концепция величины**.

Согласно Аристотелю, ***в «старой» теории отношений*** (она была основана на применении алгоритма Евклида, т.е. на сравнении непрерывных дробей) ***основные предло-жения приходилось доказывать отдельно для чисел, отрезков и площадей***. Отсюда видно, что эта теория не опиралась на общее понятие величины, ее приходилось, по существу, отдельно строить для разных родов величин.

Кроме того, в «старой» теории не удавалось определить общим образом операции над отношениями. Поэтому-то она и была оставлена.

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Понятие величины, по Евдоксу, охватывает и числа и непрерывные величины: отрезки, площади, объемы.

Оно вводится с помощью определений и аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства.

Определение 3: Отношение есть некоторая связь по величине между однородными величинами.

Определение 4: (Аксиома Архимеда) Говорят, что величины находятся друг к другу в некотором отношении, если они, будучи взяты подходящее число раз кратными, могут превзойти одна другую.

Пример неархимедовых величин: роговидные углы

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Определение 5. Говорят, что величины находятся в том же самом отношении, первая ко второй и третья к четвертой, если любые одинаковые кратные первой и третьей будут одновременно обе или больше, или равны, или меньше любых одинаковых кратных второй и четвертой, взятых в соответствующей последовательности.

То есть,

$a : b \equiv c : d \Leftrightarrow \forall$ натуральных m, n верно одно из трех утверждений:

$ma > nb \Leftrightarrow mc > nd$ *или*

$ma < nb \Leftrightarrow mc < nd$ *или*

$ma = nb \Leftrightarrow mc = nd$

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Определение 6

Величины, имеющие то же отношение, называются пропорциональными

Определение 7

Если для тех же самых кратностей кратное первой величины будет больше кратного второй, но кратное третьей не будет больше кратного четвертой, то говорят, что первая имеет ко второй ***большее отношение***, чем третья к четвертой.

То есть, если

$ma > nb$, но $mc < nd$, где m и n натуральные числа, то

$$a : b > c : d$$

Общая теория отношений Евдокса
V книга «Начал» Евклида

Аксиомы:

1) Равные одному и тому же равны между собой.

2) И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3) И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.

4) И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5) И целое больше части» .

Общая теория отношений Евдокса V книга «Начал» Евклида

Отношения выполняют при этом ту же функ-цию, что и «***сечения***» в теории действительных чисел ***Дедекинда***.

Р. Липшиц через несколько лет после выхода в 1872 г. работы Дедекинда «***Непрерывность и иррациональные числа***» высказал мнение, что они отличаются лишь по форме.

Дедекинд в переписке с Липшицем в 1876 г. показал, что эти две теории имеют много общего, но наряду с этим и существенные отличия. Одно из основных отличий состоит в том, что в теории Дедекинда область действи-тельных чисел оказывается непрерывной в силу того, что каждое сечение мно-жества рациональных чисел производится некоторым рациональным или ир-рациональным числом (вся конструкция Дедекинда имела целью обеспечить эту непрерывность). Между тем ***в теории Евдокса непрерывность не обеспечена*** и нельзя утверждать, что любое сечение в области соизмеримых отношений или рациональных чисел производится каким-либо отношением.

Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд (1831-1916)

Рихард Дедекинд. «***Непрерывность и иррациональные числа***» Stetigkeit und irrationale Zahlen / пер. с нем. С. О. Шатуновского. Матезис, 1923.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Феодор из Кирены (конец V- нач. IV в. до н.э.)

Диоген Лаэрций называет его учителем Платона.

Но больше всего мы знаем о нем из диалога Платона ***«Теэтет».*** В упомянутом диалоге, действие которого происходит в 399 го-ду, Феодор Киренский выступает уже седовласым старцем; зна-чит, он должен был быть современником Гиппократа и Демокрита.

«Теэтет. Вот Феодор начертил нам нечто о площадях квадратов и показал, что трёхфутовая и пятифутовая по длине несоизмеримы с однофутовой. Так, перебирая их одну за другой, он дошёл до семнадцатифутовой. Тут его что-то остановило».

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Согласно диалогу Платона «Теэтет», пифагореец Феодор из Кирены доказал, что стороны квадратов с площадями 3, 5,6, 7,..., 17 не-соизмеримы со стороной единичного квадрата.

Нам неизвестно, как про-водил доказательства Феодор, но ясно, что он рассматривал каждый слу-чай отдельно.

Опять же, согласно Платону, первое общее учение об иррациональностях при-надлежит юному ученику Феодора — **Теэтету (ок.415 г. до н.э. – 369 г. до н.э.)**.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Теэтет су-мел общим образом охарактеризовать первый бесконечный класс иррацио-нальностей, а именно таких, которые мы теперь обозначаем $\sqrt{N}$, где *N*—це-лое число, не являющееся полным квадратом.

Ему принадлежит, по-видимо-му, следующая замечательная теорема:

если площадь квадрата выражается целым неквадратным числом, то его сторона несоизмерима со стороной еди-ничного квадрата.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на основное пред-ложение теории делимости: произведение двух целых чисел *AB* делится на простое число *p* тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей делится на *p.*

На основании этого предложения иррацио-нальность $\sqrt{N}$, если *N* не является полным квадратом, доказывается точ-но также, как и иррациональность $\sqrt{2}$.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Доказательство распадается на геометрическую и теоретико-числовую части.

Из предположения соизмеримости сторон следовало бы сначала геометрически вывести, что стороны относятся между собой, как два числа p и q, а площади получаю-щихся квадратов—как их квадраты p^2 и q^2 таким образом, $n : 1 = p^2 : q^2$ (1)

или, что то же, $p^2 = nq^2$ (2)

После того методами теории чисел следовало бы доказать, что из (1) и (2) вытекает, что n будет квадратным числом. Аналогично и для третьих степеней.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Геометрическая часть этого доказательства находится в X книге «Начал». Предложения 5, 6, и 9 этой книги гласят:

X, 5. *Соизмеримые величины относятся друг к другу, как одно число к другому*.

X, 6. *Если две величины относятся друг к другу, как одно число к другому, то они соизмеримы*.

X, 9. *Квадраты на двух соизмеримых по длине отрезках отно-сятся, как одно квадратное число к другому квадратному числу. И квадраты, относящиеся как одно квадратное число к другому, имеют также соизмеримые по длине стороны*.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Теэтет ввел точные понятия о «соизмеримом по длине» и о «соизме-римом в квадрате», которые дали основы для разделения отрез-ков прямой на соизмеримые «длины» и «несоизмеримые» «стороны квадратов», а в предложении X, 9 он сформулировал необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять два квад-рата для того, чтобы их стороны были соизмеримы по длине. На основании этого он мог ответить на вопрос, какие из этих сторон будут соизмеримы с единицей длины, и тем самым дать общее реше-ние задачи, которая была решена Феодором только для сторон квадратов с площадями от 3 до 17 квадратных футов.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Евклид в X,21, X,36 и X,73 определяет три основных рода иррациональных отрез-ков: ***медиаль***, ***биномиаль*** и ***апотому****).*

Медиальной площадью называется площадь прямоугольника *ab*, стороны *a* и *b* которого выразимы, но друг с другом несоизмеримы.

Мы бы сказали, что это—площадь, равная$\sqrt{r}$, где *r* - рациональ-ное число.

Отрезок, квадрат на котором имеет медиальную площадь, называется *медиальным* отрезком, мы сказали бы—отрезком $\sqrt[4]{r}$*.* Длина этого отрезка удовлетворяет уравнению $x^2 = ab$ и, таким образом, является средней пропорциональной между *a* и *b,* откуда и имя—**медиаль**.

Классификация иррациональностей, X книга «Начал» Евклида

Сумма *a+b* двух выразимых, но друг с другом несоизмеримых отрезков называется *биномиалью* («двухименной»), а разность

a—b—апотомой («отсеченной»).

В книге X доказывается, что эти новые виды отрезков все «не-выразимы» и взаимно исключают друг друга, а кроме того, что биномиаль только единственным образом может быть представлена в виде суммы *a+b*, а апотома—единственным образом в виде разности *a — b* двух выразимых отрезков.

Все эти доказательства базируются на одной и той же основной мысли, которая красной нитью проходит через всю книгу: ***чтобы показать свойства каких- либо отрезков, строят на этих отрезках квадрат и исследуют свой-ства этого квадрата*.**

Теория правильных многогранников, XIII «Начал» Евклида. Теэтет.

«В этой, тринадцатой книге разбираются пять так называемых Плато-новых тел, которые, однако, открыты не Платоном, ибо три из названных пяти тел, а именно куб, пирамида и додекаэдр, происходят от пифагорейцев, а октаэдр и икосаэдр введены Теэтетом. По имени Платона они названы пото-му, что он упоминает их в „Тимее". Эта книга носит также имя Евклида, пото-му что он принял ее в свои „Начала"».

- Смысл этой последней фразы, очевидно, в том, что Евклид не сам обработал эту книгу, а взял ее целиком из более древнего про-изведения.