История математики
6 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2024 года

Математика Древней Греции.

Апории Зенона
Аксиоматическое построение математики в «Началах» Евклида.
Структура и содержание «Начал»

Бесконечность в математике - 1

С открытием несоизмеримости в математику вошла ***тема бесконечности***.

Основной вопрос, где эта тема проявилась с неожиданной силой, это комплекс проблем, связанных с понятием действительного числа.

До открытия несоизмеримости полагали, что нахождение отношения любых отрезков $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сводится к нахождению их общей меры $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{b} = n\boldsymbol{f}$. Тогда $\boldsymbol{a} / \boldsymbol{b} = m / n$.

По-видимому, первым, кто положил алгоритм Евклида в основание критерия соизмеримости отрезков, был Теэтет (IV в. до н.э.

Бесконечность в математике - 2

Другой задачей, при рассмотрении которой в математику вторгалась ***бесконечность***, стала ***проблема меры***.

Согласно распространённому в те времена учению непрерывное (например, отрезок) состоит из бесконечного числа неделимых частиц. Если размеры этих неделимых – например, длины составляющих отрезок – равны нулю, то сумма нулей (то есть длина отрезка) будет нулём, что вовсе не так. Если же они имеют конечный (пусть сколь угодно маленький !) размер, то в сумме они, взятые в бесконечном числе, дадут бесконечную величину, что также нелепо.

Одним из решений возникшей трудности было предположить конечность числа составляющих непрерывное неделимых. Такую конечную математику строил по преданию великий философ-атомист **Демокрит** (V – IV вв. до Р.Х.). Однако, как мы понимаем сегодня, это не был выход из положения (к тому же такая дискретная математика – в XXI веке мы это знаем – дисциплина чрезвычайно сложная для построения).

Бесконечное в математике

Размышления над проблемами бесконечного довольно быстро привели греков к пониманию их необычайной сложности. Например, к пониманию того, что на бесконечное нельзя автоматически переносить приёмы, которыми мы привыкли пользоваться при действиях с конечными объектами. Нельзя также переносить свойства членов бесконечной последовательности на величину, полученную в пределе.

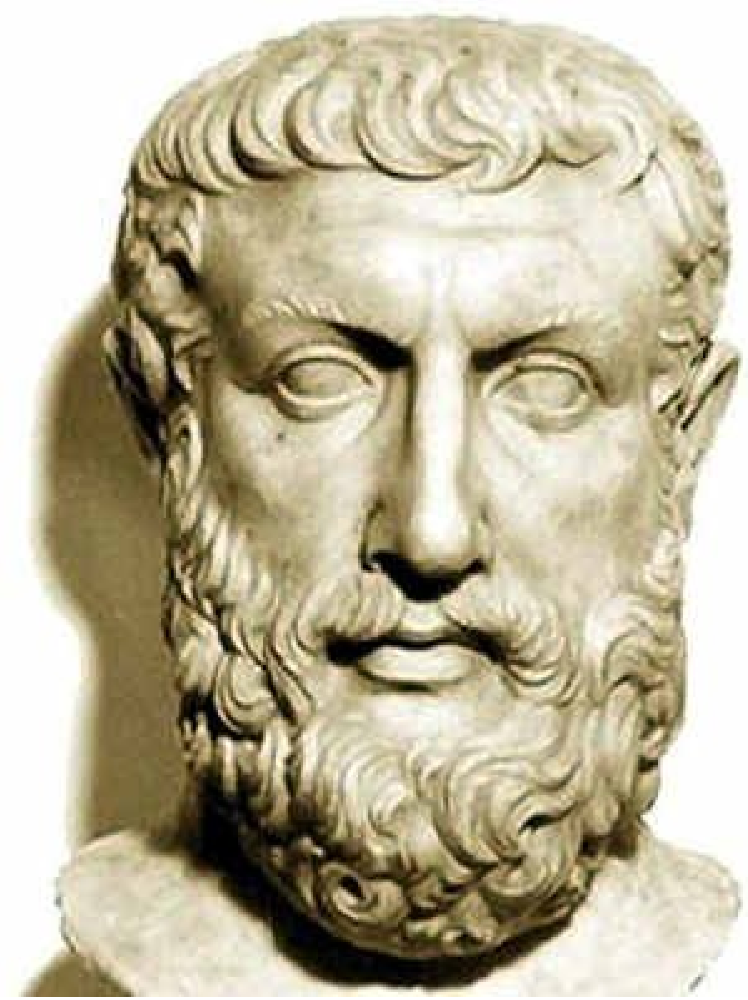
Бесконечное в математике

В V-ом веке до н.э. в греческом мире стала модной проблема квадратуры круга. Одно из её решений, предложенное тогда ***Антифоном***, выглядело так:

- в круг вписывается треугольник; построить с помощью циркуля и линейки равновеликий ему квадрат – задача элементарная; будем вписывать в этот круг многоугольники, постепенно удваивая число сторон, начиная с треугольника – для каждого из таких многоугольников мы без труда построим равновеликий ему квадрат; исходный круг является пределом такой последовательности вписанных многоугольников и, если для каждого из них проблема построения равновеликого квадрата решается, то – заключал Антифон – решается она и для круга, который можно рассматривать как многоугольник с бесконечным числом сторон. Уже ***Аристотель*** (384 – 322 до Р.Х.) в своей «Физике» приводит квадратуру Антифона как пример порочного умозаключения. Проблемы, возникающие в этой связи – прежде всего проблемы множественности и движения – стали тогда предметом глубоких размышлений.

Парменид (V в. до н.э.)

- Основатель школы элеатов в философии
- Логические законы тождеств
- Закон исключения третьего



Парменид (V в. до н.э.)

Школа элеатов. Глава школы – Парменид (Παρμενίδης). Согласно Пармениду в мире следует различать два естества – «истинно сущее» и «мнимо сущее». Первое постигается разумом с помощью логических рассуждений, основывающихся на строгой дедукции. «Истинно сущее» вечно, неподвижно, едино и неделимо. Таковы, например, теоремы геометрии. «Мнимо сущее» – то, что «существует лишь во мнении» и о чём мы судим на основании наших ощущений, Поэтому суждения эти носят вероятностный характер и в них нет «подлинной достоверности». Итак «истинно сущее» познаётся с помощью науки логики, Существовать для него означало быть непротиворечивым. Он первый высказал ***законы тождества*** и ***исключённого третьего*** и применял их в своих рассуждениях, обосновывая утверждение путём сведения к абсурду его отрицания.

Зенон

(ок.490-ок.430гг до н.э.)

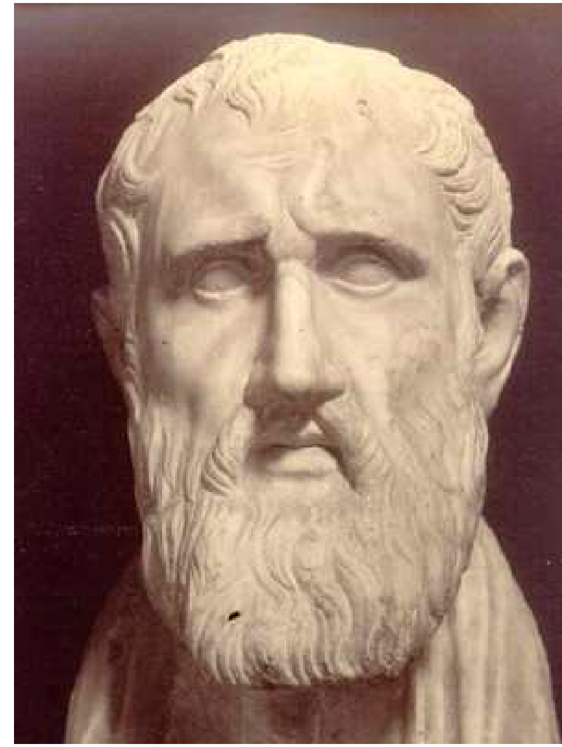
Самые известные апории:

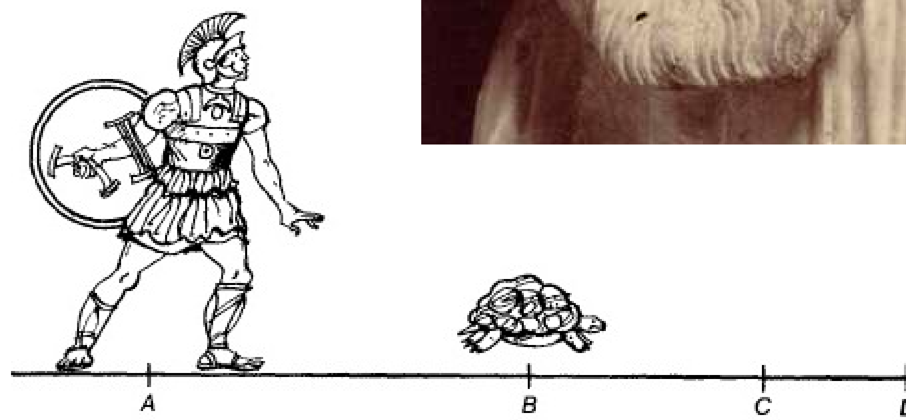
Дихотомия

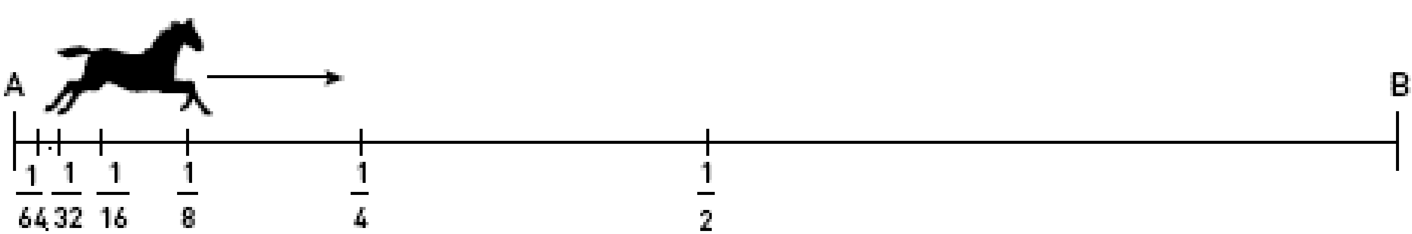
Стадий

Ахиллес и черепаха

Стрела







Апории Зенона - 1

Ученик Парменида Зенон Элейский (Ζήνων; 490? – 430?) мастерски развил диалектику Парменида.

С её помощью он вскрыл глубокие противоречия, таившиеся в понимании концепций множественности и движения. Для этого он предложил более 40 апорий, из которых ***до нас дошло девять***. Так как дошли они в пересказах, то их истинный смысл зачастую лишь реконструировать. Начнём с самых известных.

Апории движения

- Ахиллес и черепаха
- Дихотомия
- Летящая стрела
- Стадион

Дихотомия

«Дихотомия» (рассечение пополам): пусть тело движется вдоль единичного отрезка AB из точки A в точку B, тогда оно никогда не достигнет конечной точки B своего пути, так как вначале оно должно достичь его середины A_1, затем середины оставшейся половины A_2 и т.д., то есть пробежать бесконечное множество «середин» A_n . То есть оно никогда не достигнет точки B.

Апории Зенона - 2

Можно, конечно, вслед за известным французским математиком ***Полем Леви***, объявить это рассуждение нелепостью. «*Почему воображать себе*, – писал он, – *что время остановит свой ход вследствие того, что некий философ занимается перечислением членов сходящегося ряда*?» П.Леви имеет в виду ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

– по мнению автора апория разрешается тем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

«*Признаюсь, я никогда не понимал, как люди, в других отношениях вполне разумные, могут оказаться смущёнными этим парадоксом, и ответ, который я только что наметил, есть тот самый ответ, который я дал, когда мне было одиннадцать лет, старшему, рассказавшему мне этот парадокс, или, точнее, есть тот самый ответ, который я резюмировал такой немногословной формулой: «Этот грек был идиотом». Я знаю теперь, что нужно выражать свои мысли в более вежливой форме и, что, быть может, Зенон излагал свои парадоксы только для того, чтобы проверить разумность своих учеников. Но моё удивление перед умами, смущаемыми понятием сходящегося ряда, осталось тем же*».

Апории Зенона - 3

Выдающийся немецкий мыслитель и математик Г. Вейль (1885 – 1955) выдвинул такое возражение против «удивления» П. Леви (1886 – 1971): «Если бы, в соответствии с парадоксом Зенона, отрезок длины 1 можно было составить из бесконечного количества отрезков длины $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, …, взятых каждый как отдельное целое, то непонятно, почему какая-нибудь машина, способная пройти эти бесконечно многие отрезки в конечное время, не могла бы совершить в конечное время бесконечное множество актов решения, давая, скажем, первый результат через $\frac{1}{2}$ минуты, второй – через $\frac{1}{4}$ минуты, после этого третий – через $\frac{1}{8}$ минуты после второго и т.д. Таким образом, оказалось бы возможным, в противоречие с самой сущностью бесконечного, чисто механическим путём рассмотреть весь ряд натуральных чисел и полностью разрешить все соответствующие проблемы существования» (например Великую теорему Ферма). Ясно, что сооружение такой машины является предприятием невыполнимым. Тогда почему оказывается возможным, что тело, движущееся из точки *A* достигает конечной точки *B*, предварительно «отсчитав» счётное множество промежуточных точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$?»

Апории Зенона - 4

Вопрос этот имеет много аспектов. Мы остановимся на одном из них, носящим математический характер. Допустимо ли пользование актуальной бесконечностью ? Можно ли рассматривать весь натуральный ряд как уже построенный и ввести новое число, следующее за всеми натуральными числами – трансфинитное число ω, как это сделал в конце XIX века Г. Кантор ? Мы теперь уже знаем, что такая практика приводит к теоретико-множественным парадоксам, и что свободное пользование актуально бесконечными множествами (даже счётными) неправомерно. Интересно, что греческие мыслители пришли к этому выводу уже в V веке до Р.Х. и сделали из этого определённые выводы в своей математической практике.

Апории Зенона - 5

«Ахиллес и черепаха» : быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленно ползущую черепаху, ибо, если исходное расстояние между ними *a* и Ахиллес бежит в *k* раз быстрее черепахи, то пока он будет преодолевать это расстояние *a* , черепаха отползёт ещё на расстояние $\frac{a}{k}$, когда он пробежит и это расстояние, черепаха отползёт ещё на расстояние $\frac{a}{k^2}$ и т.д. То есть между ними всегда остаётся некоторое отличное от нуля расстояние.

$$S_{\text{А}} = a + \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots$$

$$S_{\text{ч}} = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \ldots$$

$$1 + \alpha = \alpha$$

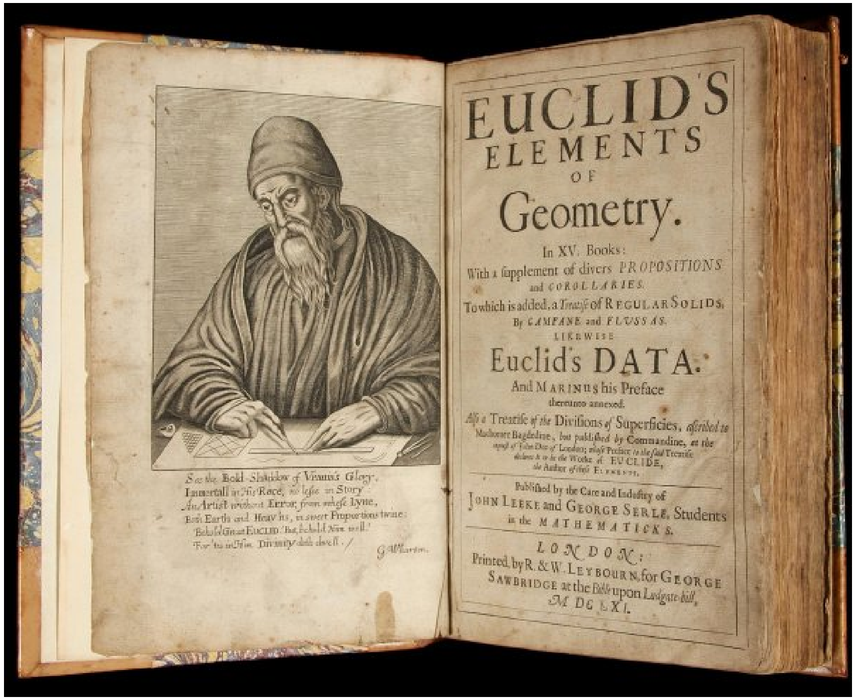
Апории Зенона - 6

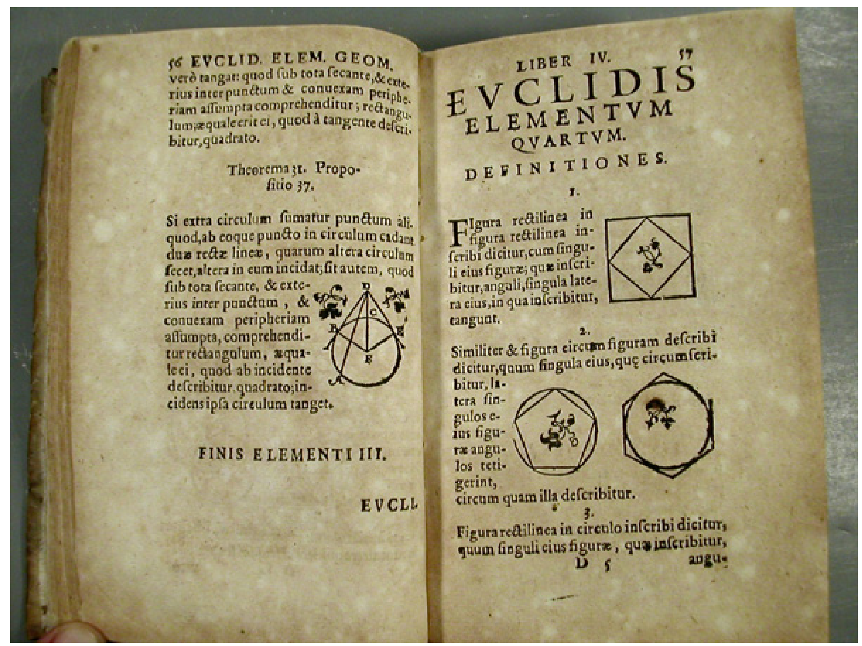
Над смыслом этого затруднения – «часть равна целому» – размышляли древние греки, оно опять привлекло к себе внимание в эпоху Возрождения (Николай Кузанский, Галилей), первое крупное продвижение в понимании феномена бесконечного в Новое время принадлежит великому чешскому философу, богослову и математику Бернарду Больцано (B. Bolzano; 1781 – 1848).

Другие апории

- Апория множественности
- Апория меры
- Апория о месте
- Апория о медимне зерна

«Начала» Евклида





«Начала» Евклида
13 книг:

«Начала» Евклида, 13 книг

1-я и 2-я книги – планиметрия и геометрическая алгебра. Обе книги восходят к пифагорейцам.

3-я книга – свойства круга, его касательных и хорд. Восходит к Гиппократу Хиосскому.

4-я книга – построение правильных n-угольников для n = 3, 4, 5, 10, 15. Построение 15-угольника, вероятно, принадлежит Евклиду.

«Начала» Евклида - 1

5-я книга – теория отношений Евдокса.

6-я книга – учение о подобии и его приложение к задачам геометрической алгебры, экв. решению квадратных уравнений.

7-я – 9-я книги – теория чисел. Строится исчисление чисел-отрезков. «Алгоритм Евклида». Бесконечность мн. простых чисел.

10-я книга классификация квадратичных иррациональностей (Теэтет).

11- я книга – стереометрия

12-я книга – с использованием метода исчерпывания

доказываются теоремы о площадях кругов, об объёмах шаров и др. тел.

13-я книга – теория правильных многогранников

«Начала» Евклида

«14-я книга» – сравнение объёмов и площадей поверхностей додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну сферу; автор – Гипсикл (II век до н.э.)

«15-я книга» – теоремы, касающиеся правильных многогранников; составлена в школе Исидора Милетского (VI век) – строителя Св. Софии в Константинополе

VIII – IX вв. – арабские переводы; Р. Рашед

Начиная с XII века – лат. пер. с арабского

XV в. – первый перевод с греческого Бартоломео Дзамберти; опубл.в Венеции в 1505 г.

«Начала» Евклида

1739 – первое русское издание

1948 – 1950 – перевод Д.Д. Мордухай-Болтовского (1876 – 1952)

Мордухай-Болтовской Дмитрий Дмитриевич (1876 – 1952)

Окончил Петербургский ун-т (1898). В 1898 – 1914 работал в Варшаве (в Политехническом ин-те и университете). В 1915 – 1949 в ун-те в Ростове-на-Дону, в 1950 – 1952 в Пятигорском пед. ин-те. Автор более 300 работ математическому

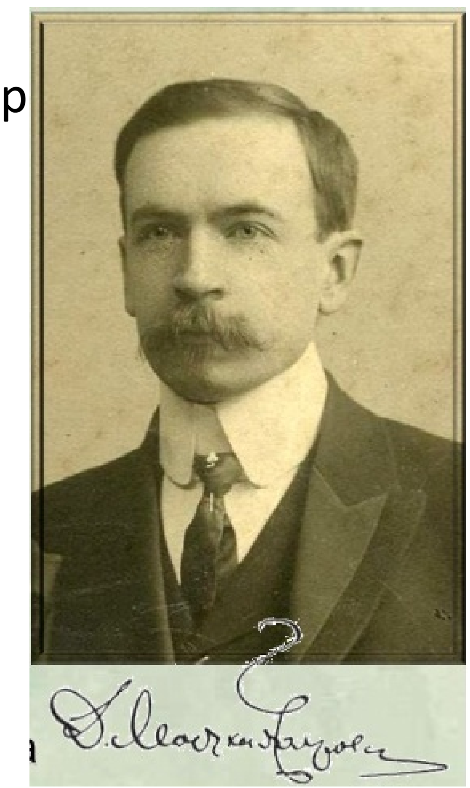
анализу, теории чисел, дифференциальн. и пр

геометрии, теории дифференциальных

уравнений, математической логике,

истории и философии математики,

методике преподавания математики.



N. Bourbaki «Les Éléments»

Аксиомы Евклида:

1) Две величины, порознь равные третьей, равны между собой
2) Если к равным прибавить равные, то суммы будут равны
3) Если от равных отнять равные, то разности будут равны
4) Если величины могут быть совмещены, то они равны
5) Целое больше своей части

Постулаты Евклида:

- 1.От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
- 2.Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
- 3.Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.
- 4.Все прямые углы равны между собой

5 постулат:

- Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы в сумме меньше двух прямых.

5 постулат в формулировке Прокла

Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определенной этой точкой и этой прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую заданной.

Пятый постулат Евклида в формулировке Плейфера

Если в данной плоскости находятся прямая и точка, не лежащая на этой прямой, то через данную точку можно провести единственную прямую, не пересекающую данной прямой.

Пятый постулат у Лобачевского:

Если в данной плоскости находится прямая и не лежащая на ней точка, то через эту точку можно провести бесконечно много прямых, не пересекающих данную прямую.

Теорема Паша

Предположим, точки A, B, C, и D лежат на прямой и известно, что B лежит между A и C, а C лежит между B и D, тогда B лежит между A и D.

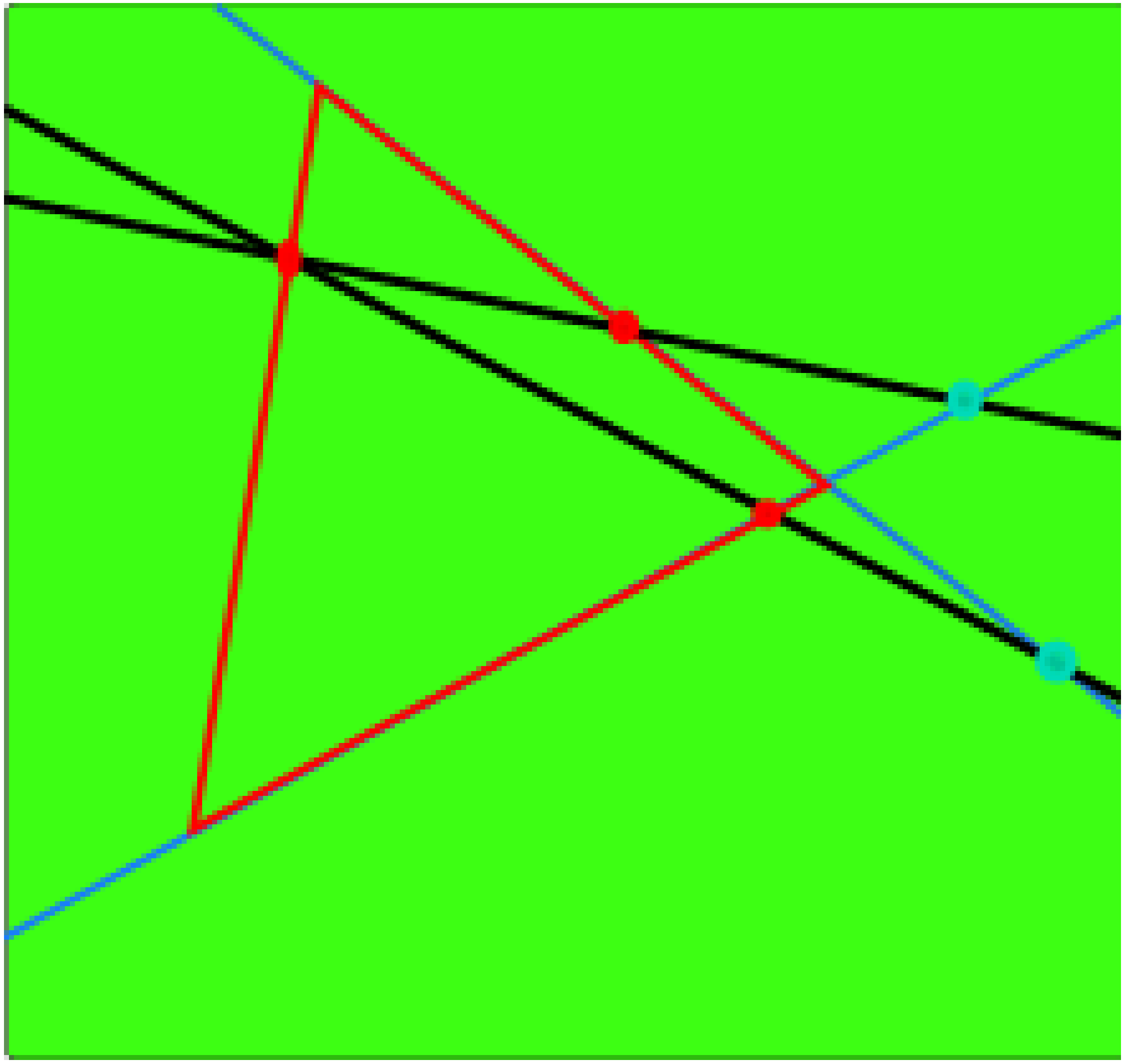
Pasch, Moritz. Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig, 1882)

Аксиома Паша

- Если прямая пересекает одну сторону треугольника, тогда она пересекает и вторую его сторону, а также продолжение третьей стороны, если только прямая не проходит через вершину треугольника.

- *Pasch, Moritz. Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig, 1882)*

Аксиома Паша



Аксиоматика Гильберта

- Неопределяемые понятия:
- - точка
- - прямая
- - линия
- – плоскость

Аксиоматика Гильберта

- Взаимные отношения:, кот.определяются аксиоматикой:
- - лежат
- - между
- - параллельный
- - конгруэнтный
- - непрерывный

Аксиоматика Гильберта

- 5 групп аксиом:
- 1) 1-8 аксиомы сочетания
- 2) 1-4 аксиомы порядка
- 3) 1-5 аксиомы конгруэнтности
- 4) аксиома параллельности
- 5) 1-2 аксиомы непрерывности

Аксиомы сочетания:

1) Две различные точки А и В всегда определяют прямую а.
2) Любые две различные точки прямой определяют эту прямую
3) На прямой всегда существует по меньшей мере две точки; в каждой плоскости существует всегда по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой

Аксиомы сочетания:

4) Три не лежащие на одной и той же прямой точки А, В и С всегда определяют плоскость

5)Любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, определяют эту плоскость

6)Если две точки прямой а лежат в плоскости, то и всякая точка прямой а лежит в этой плоскости

Аксиомы сочетания:

- 7) если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по меньшей мере еще одну общую точку
- 8) существует по меньшей мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости

Аксиомы порядка:

- 1) Если A, B и C – точки одной прямой, B лежит между A и C, то B лежит также и между C и A.
- 2) Если A и C – точки одной прямой, то существует по крайней мере одна точка B лежащая между A и C, и по крайней мере одна точка D, такая что C лежит между A и D.

Аксиомы порядка

3) Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими

4) Пусть A, B, C — три не лежащие на одной прямой точки и a — прямая в плоскости (ABC), не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через точку отрезка AB, то она непременно проходит через точку отрезка AC или точку отрезка BC. (аксиома Паша)

Аксиомы конгруэнтности(тут же понятие движения):

1) Если A и B — две точки на прямой a, A’ — точка на той же прямой или на другой прямой a’, то всегда можно найти по данную от точки A’ сторону прямой a’, одну и только одну такую точку B’, что отрезок A’B’ конгруэнтен или равен отрезку AB. Каждый отрезок конгруэнтен самому себе.

Аксиомы конгруэнтности:

- 2) Если отрезки A’B’ и A"B" конгруэнтны одному и тому же отрезку AB, то они конгруэнтны и между собой.
- 3) Пусть AB и BC — два отрезка прямой a, не имеющие общих внутренних точек, A’B’ и B’C’ — два отрезка той же прямой, или другой прямой a’, также не имеющие общих внутренних точек. Тогда если отрезок AB конгруэнтен отрезку A’B’, а отрезок BC конгруэнтен отрезку B’C’, то отрезок AC конгруэнтен отрезку A’C’.

Аксиомы конгруэнтности:

- 4) Если даны угол ∠ABC и луч B’C', лежащий в плоскости данного угла, тогда существует ровно два луча, также лежащие в плоскости данного угла, B’D и B’E, такие, что ∠DB’C' ≅ ∠ABC и ∠EB’C' ≅ ∠ABC. Каждый угол конгруэнтен сам себе
- 5) Если для двух треугольников ABC и A’B'C' имеют место конгруэнции: AB≅A’B', AC≅A’C', ∠BAC ≅ ∠B’A'C', то всегда имеют место и конгруэнции: ∠ABC ≅ ∠A’B'C' ∠ACB ≅ ∠A’C'B'.

Аксиома параллельности

- Пусть a есть произвольная прямая и A — точка вне её; тогда в плоскости, определяемой точкой A и прямой a, можно провести не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a.

Аксиомы непрерывности

- 1) аксиома Архимеда
- 2) аксиома полноты: элементы геометрии образуют систему вещей, которая при условии сохранения всех указанных выше аксиом, не допускает никакого расширения

Альфред Тарский(1901-1983), Варшава-Беркли

- Полнота аксиоматики Гильберта - 1951 г.
- Аксиоматика Тарского – 1959 г.

Арифметика дробей

Дробь $\frac{m}{n}$ - это пара чисел (m,n) $\sim$ интервал это пара высот.

Действия:

- *+/- путем приведения в общему знаменателю*
- *сокращение*
- **/:*

Классы эквивалентности (A,B)

Две пары чисел (A, B) и (C, D) **пропорциональны**, если у A и B существует общий делитель F, а у C и D общий делитель G такие, что

$A = mF \qquad C = mG$

$B = nF \qquad D = nG$

Пифагорейцы знали, что отношение пропорциональности транзитивно.

Пусть (A_0, B_0) - наименьшая пара.

Доказано:

1. Если $A\colon B = A_0\colon B_0$, то $A = kA_0, B = kB_0$.

2. Если A_0, B_0 взаимно просты, то это наименьшая пара из всех, имеющих с ней одинаковое отношение.

3. Если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они взаимно просты.

4. Если $A\!:B = F\!:G$ и $B : C = G\!:H$, то

$$A\!:C = F\!:H \quad \text{(закон композиции)}$$

5. $(A_1 A_2\!:B_1 B_2) = (A_1\!:B_1) \otimes (A_2\!:B_2)$

6. Чтобы составить отношения $(A\!:B)$ и $(C\!:D)$, надо найти наименьшие числа F, G, H такие, что $A\!:B = F\!:G$ и $C\!:D = G\!:H$. Тогда

$$(A\!:B) \otimes (C\!:D) = (F\!:G) \otimes (G\!:H) = (F\!:H)$$