ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Названа так И.Г. Цейтеном.

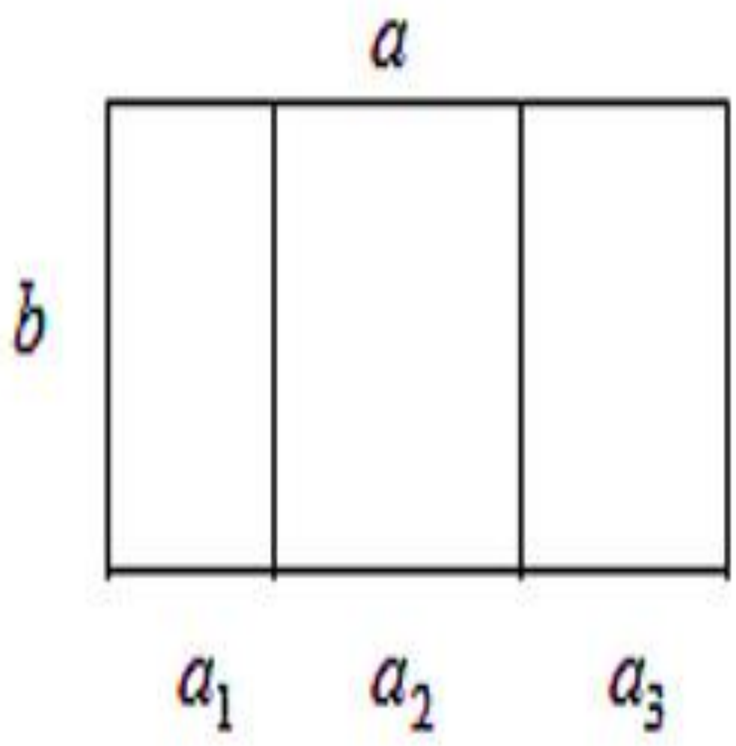
Изложена во II-й книге «Начал» Евклида. Также ее предложения встречаются в VI и XIII книгах.

Все величины – отрезки. Их можно складывать, вычитать, умножать. При умножении повышается размерность произведения, поэтому был введен принцип однородности.

Вместо деления отрезка на отрезок рассматривалось отношение двух отрезков. Делить же площадь на отрезок было возможно.

В рамках геометрической алгебры можно доказывать некоторые алгебраические тождества и решать некоторые уравнения.

II книга «Начал» Евклида

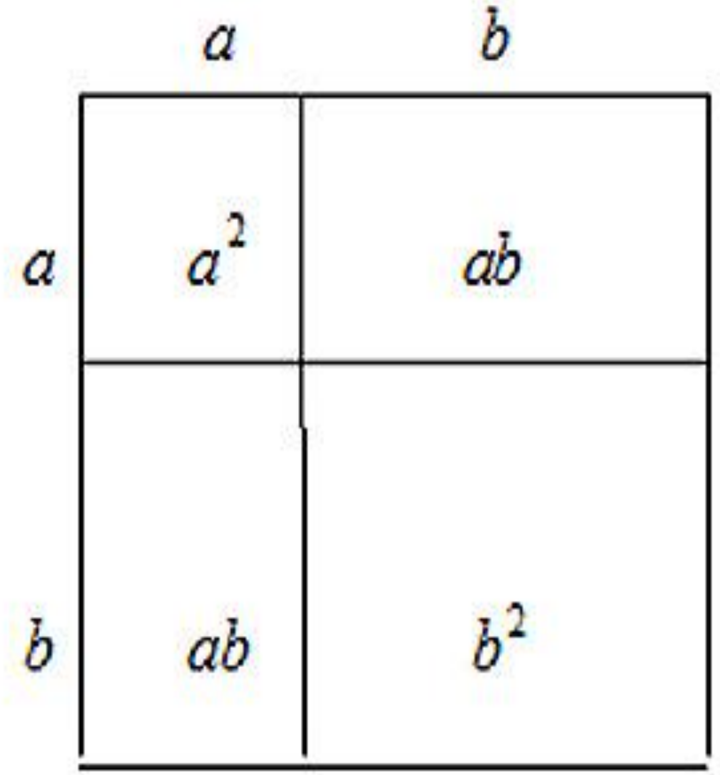


Предложение 1.

Если имеются две прямые и одна из них рассечена на сколько угодно отрезков, то прямоугольник, заключающийся между этими двумя прямыми, равен (вместе взятым) прямоугольникам, заключенным между нерассеченной прямой и каждым из отрезков.

$$b(a_1 + a_2 + a_3) = ba_1 + ba_2 + ba_3$$

В предложениях 2-3 – частные случаи.



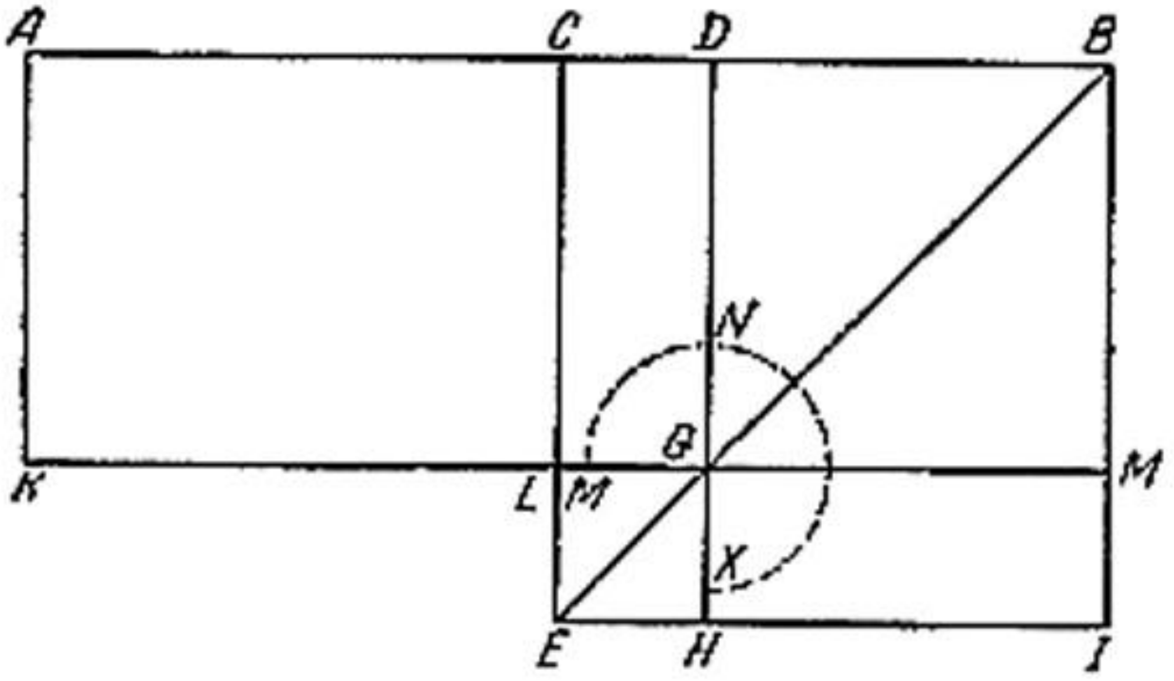
Предложение 4.

Если прямая линия как-либо рассечена, то квадрат на всей (прямой) равен квадратам на отрезках вместе с дважды (взятым) прямоугольником, заключенным между отрезками.

В предложениях 5-6 – формула разности квадратов.

В предложении 7 – формула квадрата разности.

Предложение 5.
Если прямая линия рассечена на равные и неравные (отрезки), то прямоугольник, заключенный между неравными (отрезками) всей прямой, вместе с квадратом на отрезке между сечениями равен квадрату на половине (прямой).



Обозначим

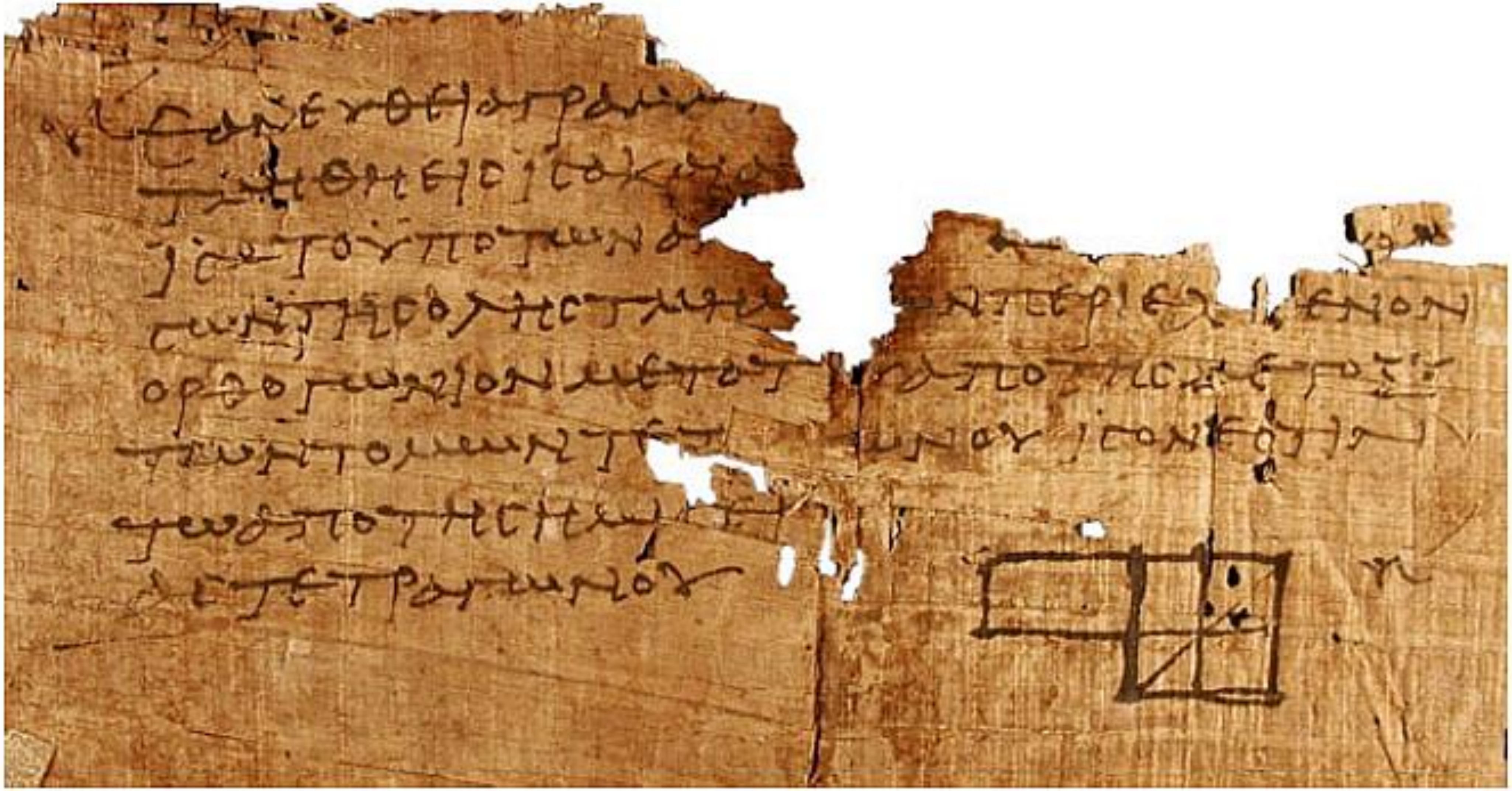
$AC = a$, $CD = b$, тогда

$AB = 2a$, $DB = a - b$.

Тогда предложение 5 может быть записано как

$$\mathbf{(a+b)(a-b) + b^2 = a^2},$$

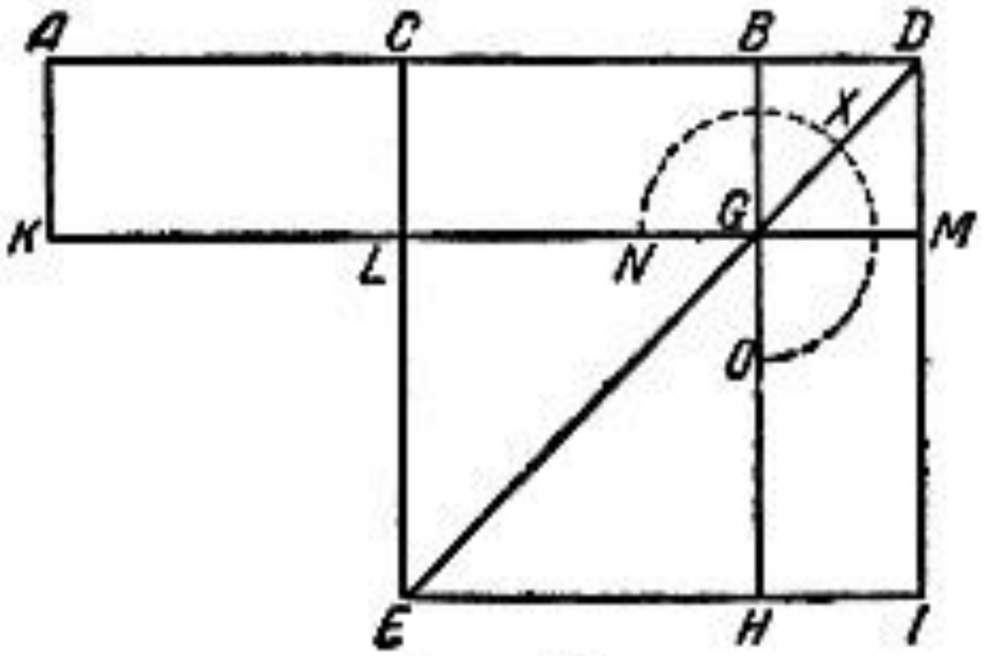
откуда следует формула разности квадратов.



Fragment of Euclid's 'Elements' (Papyrus from 75-125 AD, one of the oldest diagrams from Euclid's Elements of Geometry. The diagram accompanies Proposition 5 of Book II of 'Elements')

Предложение 6

Если прямая линия рассечена пополам и к ней «по прямой» приложена какая-либо другая прямая, то



Черт. 6.

прямоугольник, заключённый между всей прямой с приложенной и самой приложенной, вместе с квадратом на половине равен квадрату на ⟨прямой⟩, составленной из половины и приложенной.

Это тождество лежит в основе **метод**а древних пифагорейцев для **решения квадратных уравнений** (книга VI «Начал»).

Если обозначить $AD = u$, $BD = v$, получим

$$AC = CB = (u+v)/2, \quad CD = (u-v)/2.$$

Тогда предложение Евклида можно записать как:

$$uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Правую часть тождества можно интерпретировать как квадрат катета прямоугольного треугольника с заданными гипотенузой и другим катетом, и именно эта идея используется в геометрических методах решения квадратных уравнений в Древней Греции.

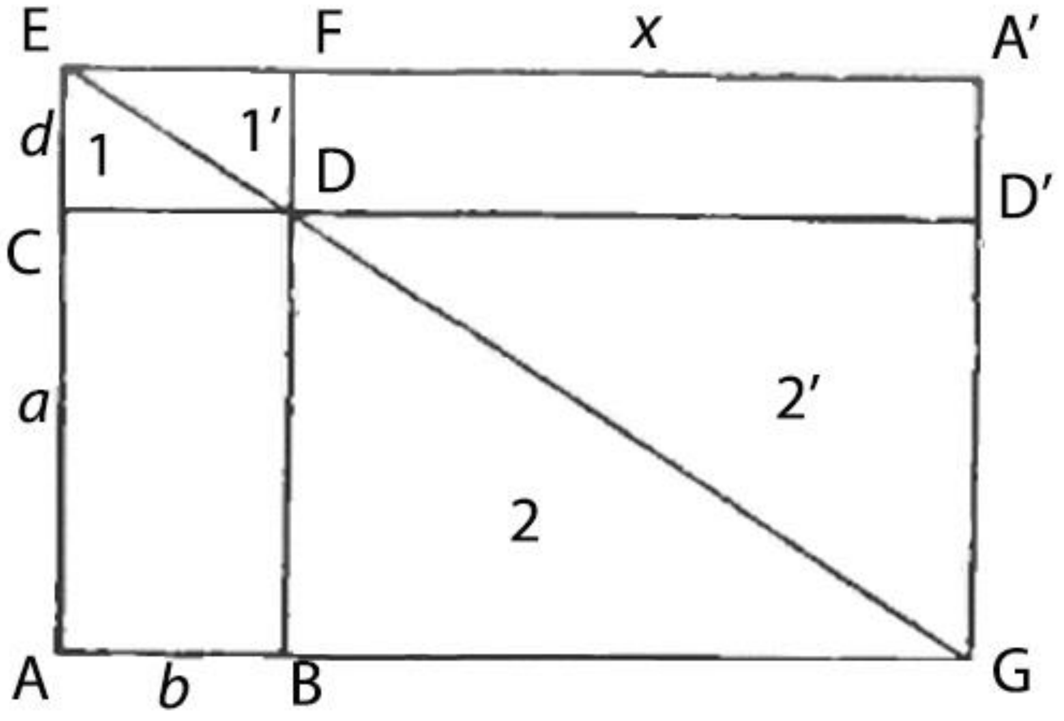
Приложение площадей.

I. Задачи, эквивалентные **линейным уравнениям**:

К данной прямой (d) приложить прямоугольник, равновеликий заданному (ab).

Требуется найти сторону x прямоугольника, площадь которого (*ab*) и одна сторона (*d*) заданы, то есть, требуется решить уравнение

dx = ab:



II. Три вида квадратных уравнений

1. Построить квадрат равновеликий данному прямоугольнику: $x^2 = ab$.

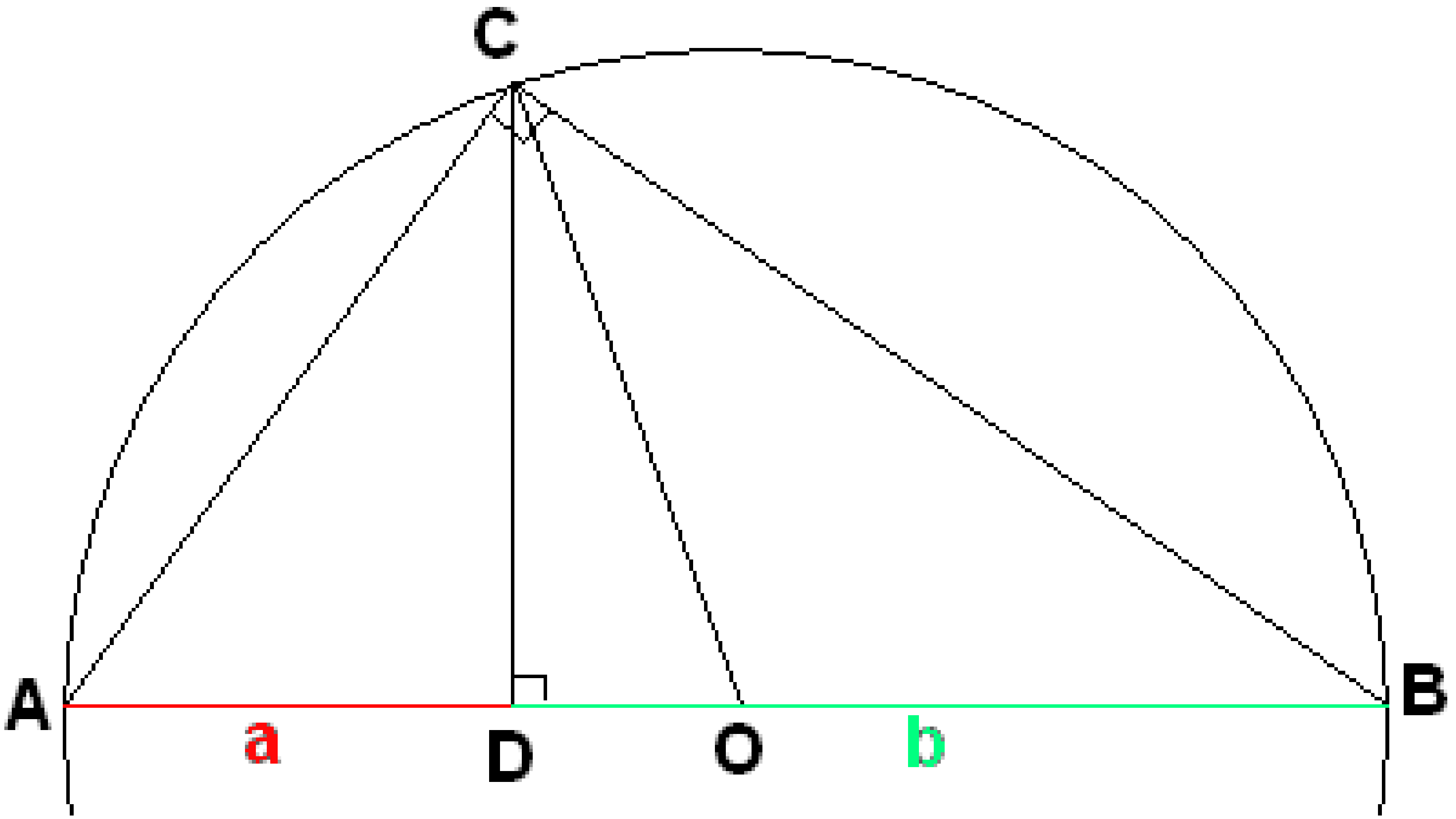
2. Дана некоторая площадь S и отрезок $2a$. Приложить площадь S к отрезку $2a$ так, чтобы недостаток (ἐλλειψις) был квадратом: $x(2a - x) = S$.

Для решения задачи этого типа было найдено условие существования действительного положительного корня:

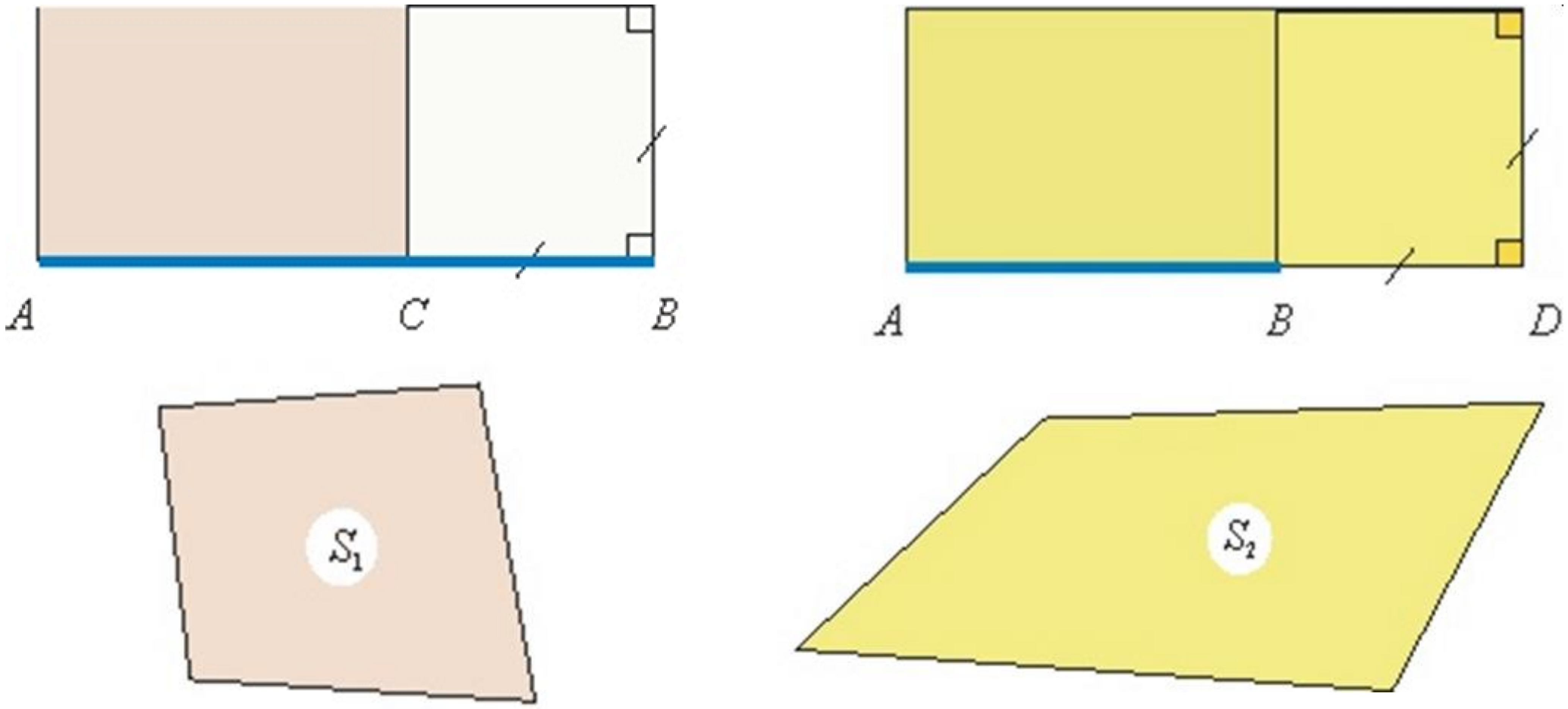
$$S^2 \leq a^2.$$

3. Дана некоторая площадь S и отрезок $2a$. Приложить площадь S к отрезку $2a$ так, чтобы избыток (ηύπερβολή) был квадратом: $x(2a + x) = S$.

1. Построить квадрат равновеликий данному прямоугольнику: $\boldsymbol{x^2 = ab}$.



Приложение площадей



Решение квадратного уравнения эллиптического типа

Задано уравнение $\boldsymbol{x(2a-x)=S}$

Чтобы использовать формулу разности квадратов (1), обозначим

$$u = 2a - x, \quad v = x,$$

тогда для разложения площади S в разность квадратов нам нужны отрезки $\frac{u+v}{2} = a, \quad \frac{u-v}{2} = a - x.$

Формула (1) приобретает вид:

$$\boldsymbol{(a-x)^2 = a^2 - S}.$$

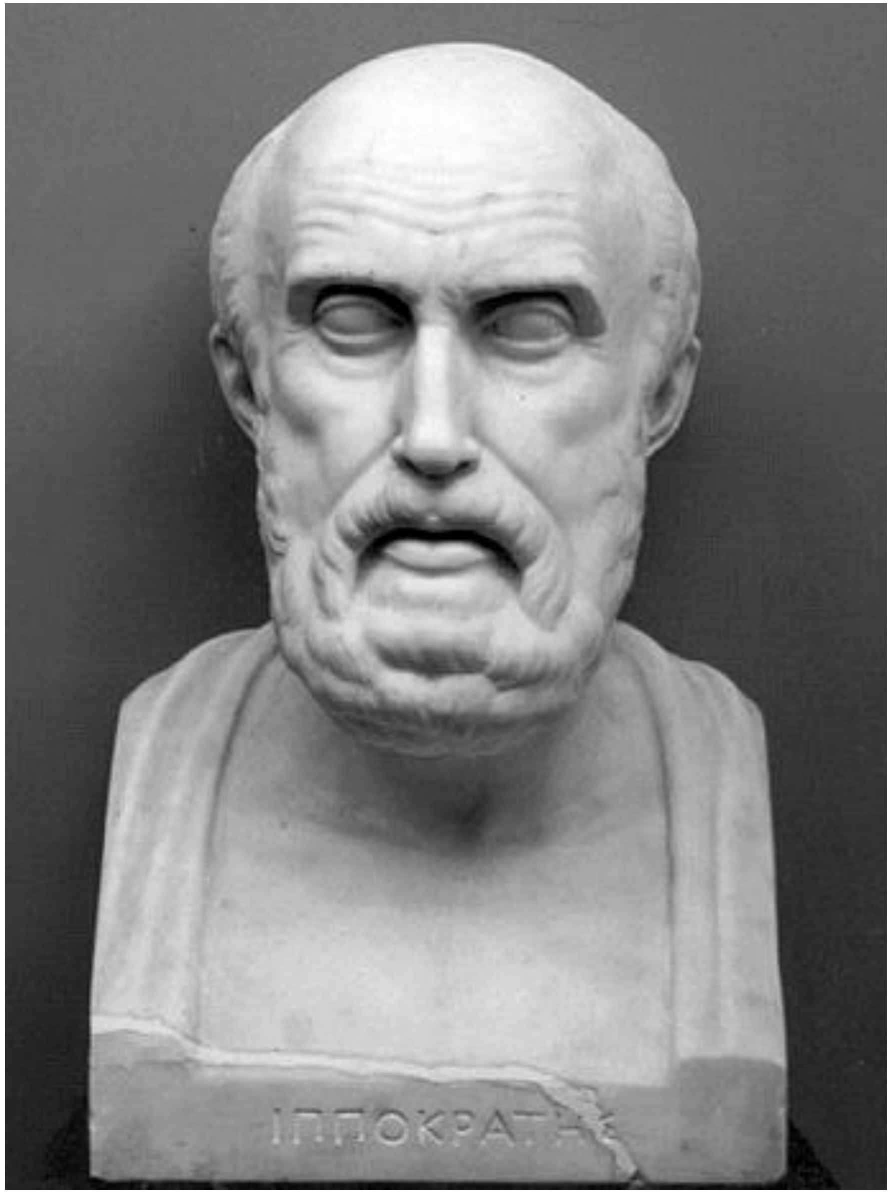
Таким образом, алгоритм решения:

1) заданную площадь $\boldsymbol{S}$ преобразовать в квадрат $\boldsymbol{t^2}$ (квадратное уравнение типа 1),
2) отрезок $a - x$ (= CD на чертеже к предложению 5 книги II) будет *катетом прямоугольного треугольника с известными сторонами* a *и* t . Откуда легко найти искомый отрезок *x*.

Какие задачи можно решить с помощью циркуля и линейки?

ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ

Задача удвоения куба $x^3 = 2a^3$



1. Гиппократ Хиосский (вт. пол. V в. до н.э.) –

ионийский философ, не пифагореец, автор первой книги по математике «Начала геометрии»; в философии рассматривал «не практические, но теоретически существующие вопросы», жил до Платона.

Обобщил: «Построить куб, равновеликий параллелепипеду с квадратным основанием», т.е. $x^3 = a^2 b$. При $b = 2a$ возникает удвоение куба.

Предложил искать решение с помощью двух средних пропорциональных: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$

или $x^2 = ay, \ \ y^2 = bx, \ \ xy = ab.$

2. **Архит из Тарента** (V–IV вв. до н.э.) – великий полководец и математик, друг Платона, создатель погремушки.

«*x можно найти как пересечение конуса, цилиндра и вырожденного тора*». Отсюда следует, что **решение существует**, но находить его крайне сложно (нет и речи о практической реализации).

Решение Архита из Тарента мы можем записать в современной символике как пересечение следующих тел:

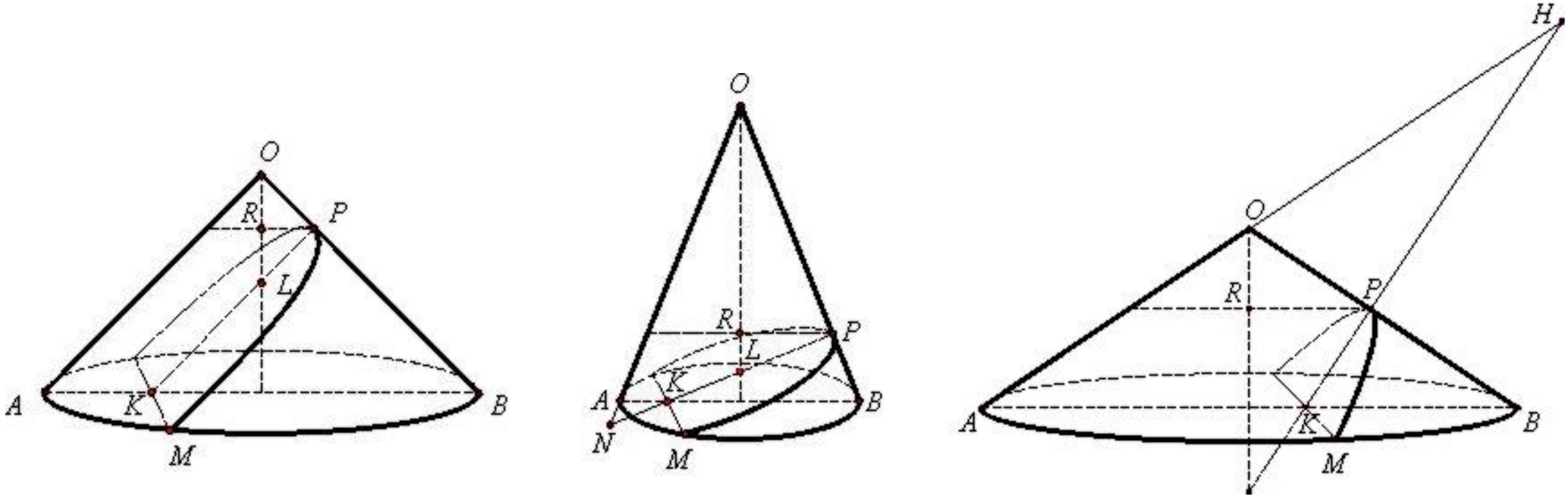
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2} & (3) \end{cases}$$

(1) – цилиндр, (2) – конус, (3) – вырожденный тор. Средние пропорциональные Гиппократа здесь

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\sqrt{x^2 + y^2}$.

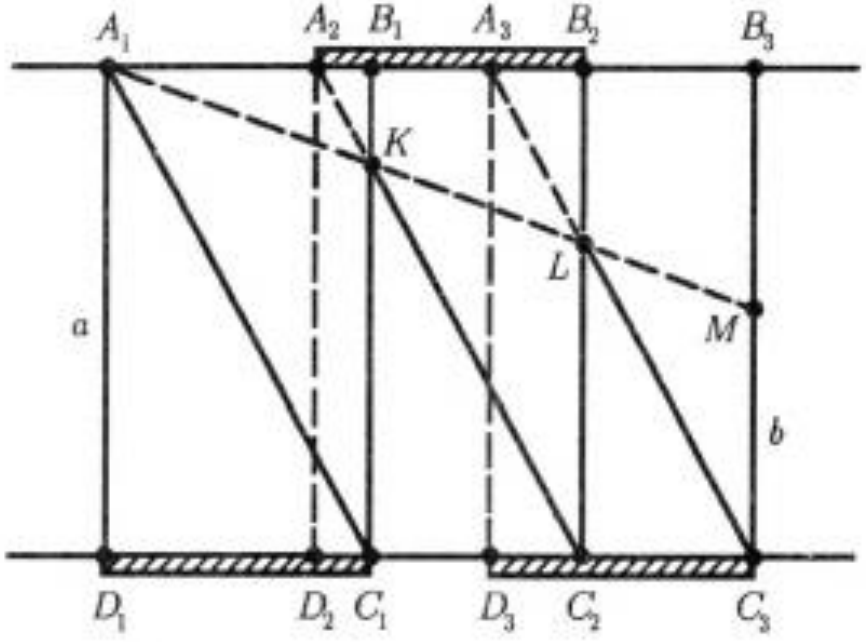
3. Менехм (IV в. до н.э.) – ученик Евдокса представил средние пропорциональные Гиппократа как **плоские сечения конусов** вращения.

Тем самым Менехм **доказал**, что эти сечения – **непрерывные линии**.



Появляются симптомы кривых.

4. Существовали и другие попытки решить эту задачу (Евдокс, Никомед и др.). В эпоху эллинизма изобретаются различные **специальные инструменты** для решения. Например, у Эратосфена: по двум параллельным прямым перемещаются три равных прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ и $A_3B_3C_3D_3$ с диагоналями A_1C_1, A_2C_2 и A_3C_3



Решение задачи Гиппократа получается в тот момент, когда трапеции $A_1KC_1D_1$, KLC_2C_1, LMC_3C_2 подобны: $a:x = x:y = y:b$, где $x = KC_1$, $y = LC_2$.

Строгое доказательство неразрешимости задачи удвоения куба с помощью циркуля и линейки получено П.Л. Ванцелем в **1837 г.**

Если из малого куба двойной замышляешь устроить,
Друг, или данный объем к форме другой привести,
Чтоб хорошо удалось тебе это, вздумал ли погреб
Ты измерять, или ров, или широкую пасть
Глуби колодца, возьми на смежных концами пластинках
Средние линии две, сжатые между таблиц.
Не прибегай для того ты к тяжелым цилиндрам Архита,
Конуса ты не секи, корня Менехма триад;
Также не надо держать с богоравным Евдоксом совета,
Выгнутых линий его формы не надо чертить.
С этими ж ты табличками тысячи средних построишь,
Двигайся смело вперед, с меньших из данных начав.

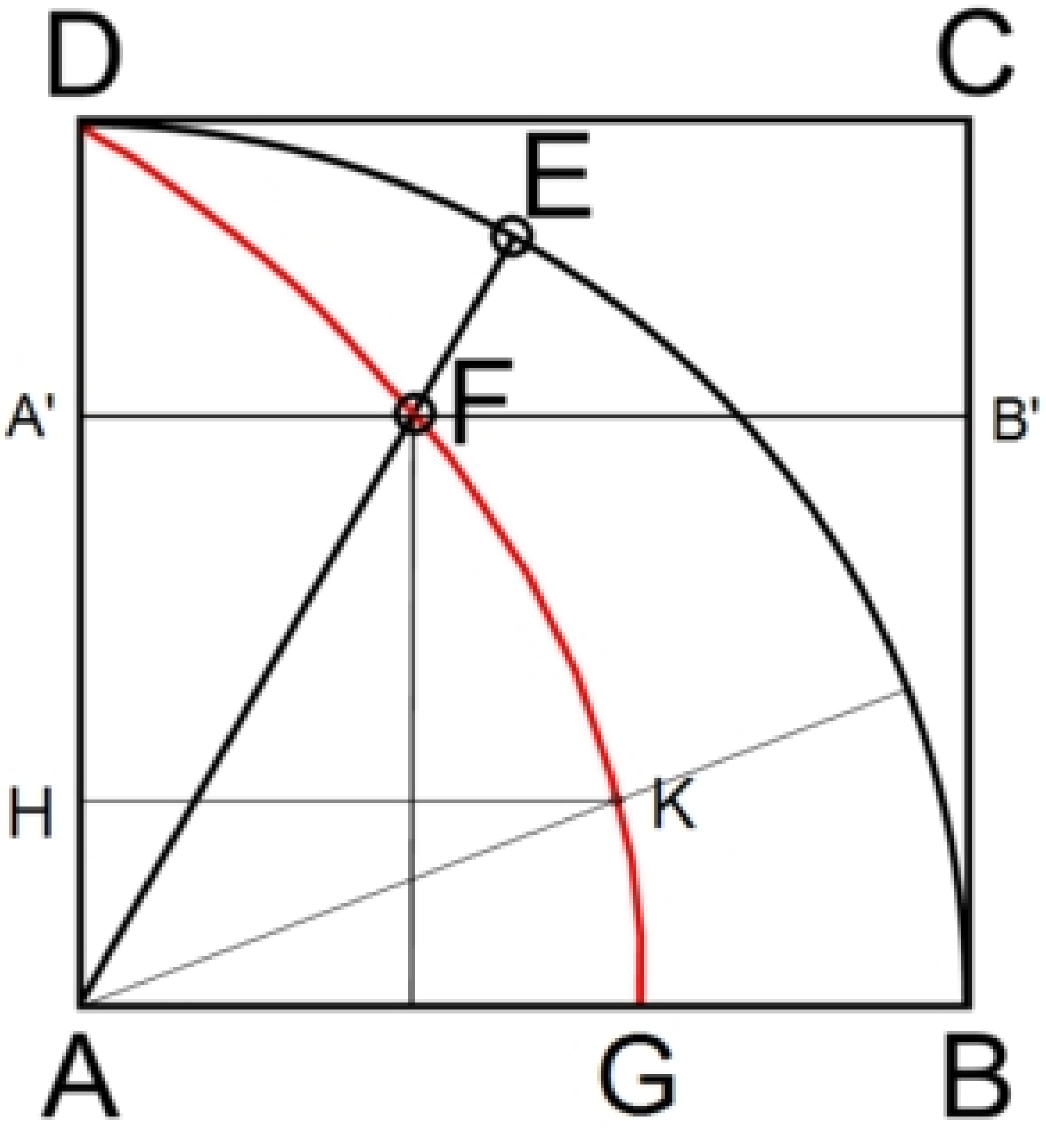
. . .

Пусть же свершится все это, и каждый смотрящий пусть скажет:
«Это Кирены сын выдумал Эратосфен».

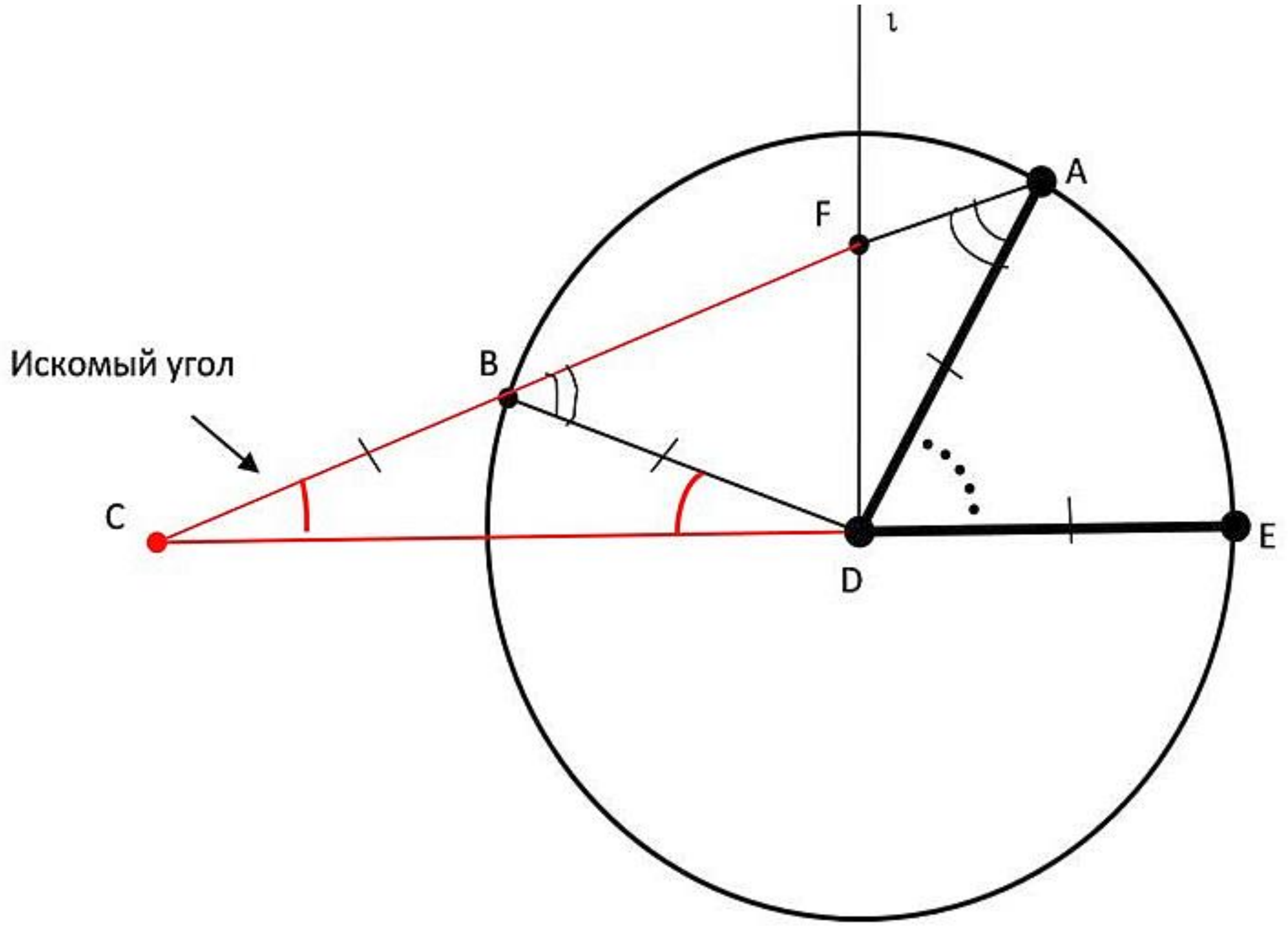
Трисекция угла

1. Гиппий из Элиды (V в. до н.э.) с помощью первой **трансцендентной кривой** «квадратрисы», задаваемой механически.

Нетрудно показать, что трисекция угла приводит к кубическому уравнению, и, следовательно, не может быть решена с помощью циркуля и линейки (П.-Л. Ванцель, 1837 г.)



2. Архимед (III в. до н.э.) из Сиракуз решил задачу трисекции угла с помощью «**вставки**». (На этом пути вновь возникает конхоида Никомеда, которая так и была введена).



Квадратура круга $x^2=\pi R^2$
– первая трансцендентная задача.

Задача была очень популярна:

– Анаксагор решал ее, сидя в тюрьме;

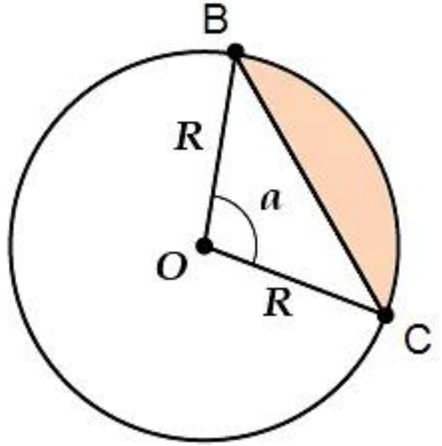
– обсуждается в комедии Аристофана «Птицы»;

– известны попытки решения софистами Антифоном, Бризоном и др.

– существовала и в Индии: алтари разной формы, но одинаковой площади.

Квадрируемые луночки Гиппократа Хиосского.

Самые древние греческие математические тексты – отрывки из сочинения Гиппократа о луночках:



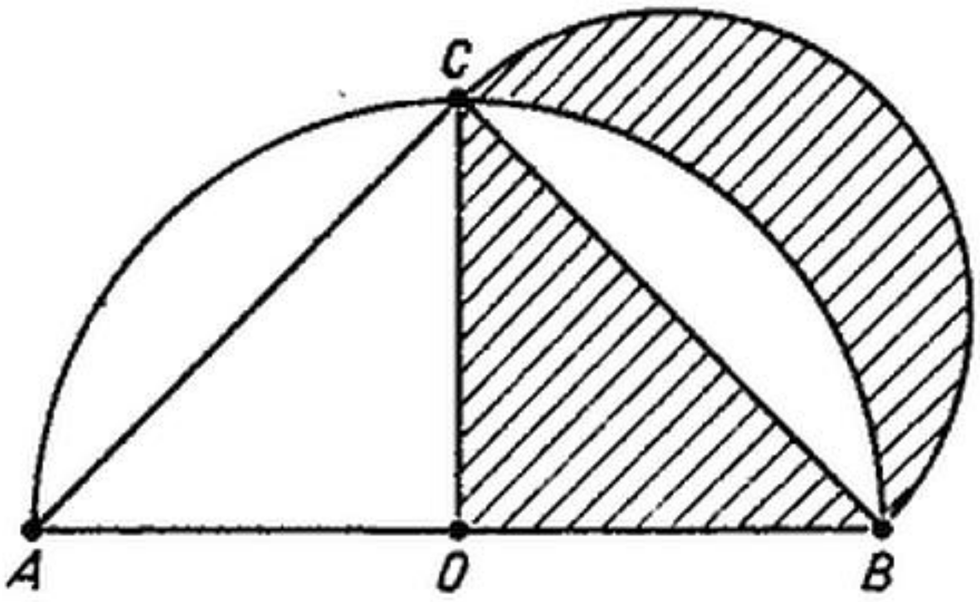
Теорема 1. Площади кругов относятся как квадраты их диаметров.

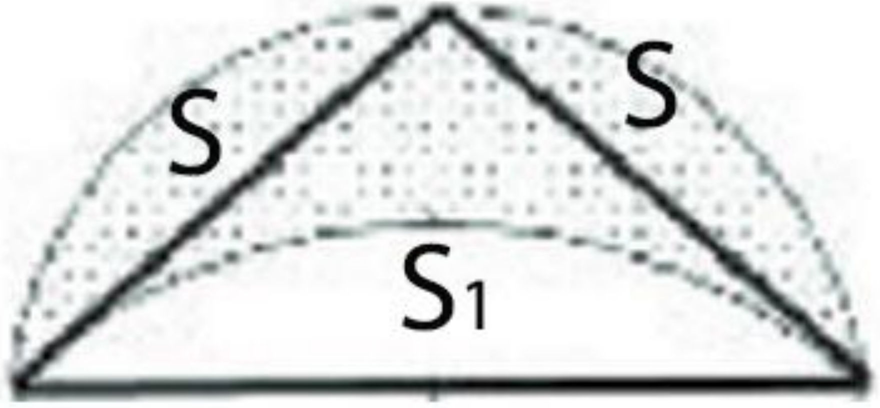
Теорема 2. Площади подобных сегментов относятся как квадраты стягивающих хорд.

Теоремы о луночках, в которых получены **три типа квадрируемых** луночек:

1) луночка равна треугольнику, внешняя дуга равна ***половине*** круга;
2) луночка равна трапеции и при этом внешняя дуга ***больше половины*** круга.
3) луночка равна трапеции и при этом внешняя дуга ***меньше половины*** круга.

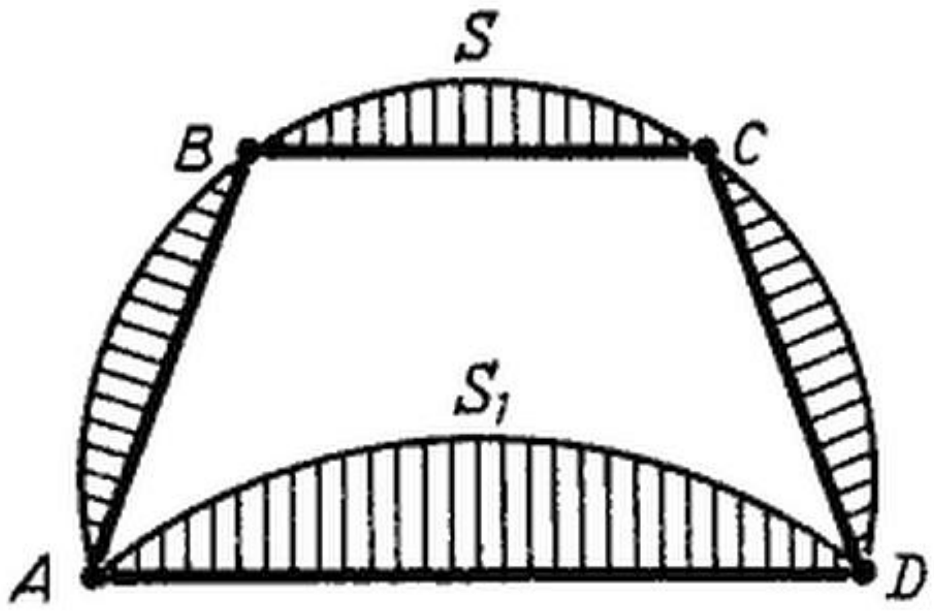
1. Луночка равна треугольнику, ее внешняя дуга равна *половине* круга.





Рассмотрим полукруг с диаметром *AB*. Пусть *O* – середина отрезка *AB*, *C* – середина дуги *AB*. Построим также полукруг на катете *BC* прямоугольного треугольника *ABC*. Тогда площадь заштрихованной луночки равна площади прямоугольного треугольника *BOC*: площадь сектора *BOC* и площадь полукруга с диаметром *BC* равна половине площади полукруга с диаметром *AB*. Поэтому, вырезав из этих фигур их общую часть – сегмент *BC*, получим равновеликие фигуры.

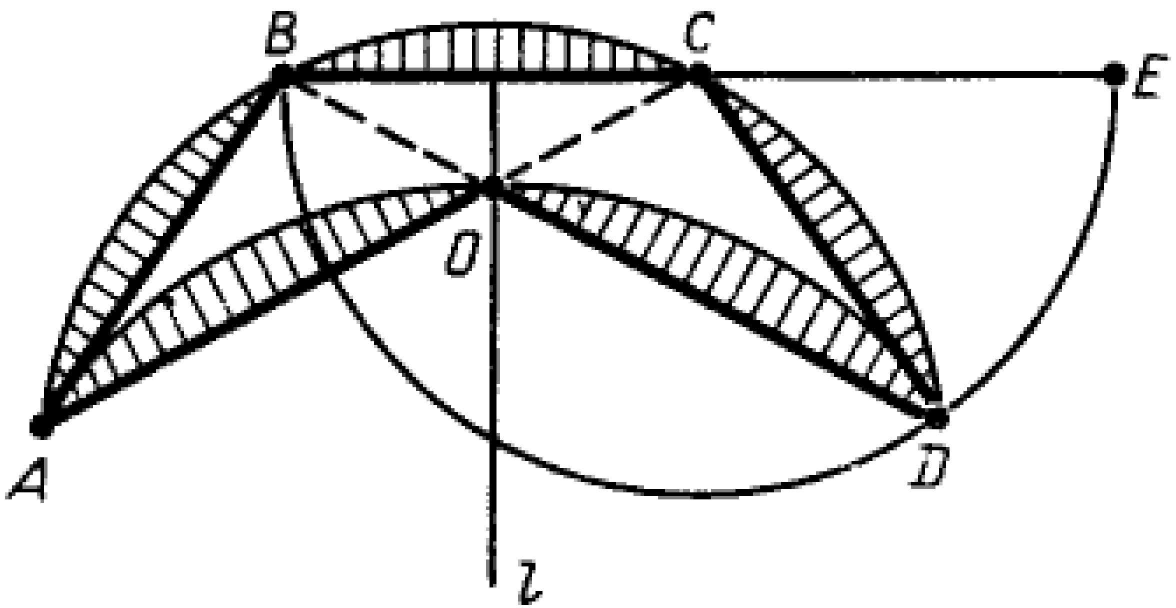
2. Луночка равна трапеции и при этом внешняя дуга *больше половины* круга.



Для построения второго примера Гиппократ взял равнобедренную трапецию *ABCD*, основания *BC* и *AD* которой равны 1 и $\sqrt{3}$, а боковые стороны *AB* и *CD* равны 1.

Рассмотрим луночку, ограниченную описанной окружностью *S* трапеции *ABCD* и окружностью S_1, полученной из окружности *S* при гомотетии, переводящей отрезок *BC* в отрезок *AD*. Площадь сегмента *AD* в три раза больше площади каждого из сегментов *AB*, *BC* и *CD*, т. е. она равна сумме их площадей. Поэтому площадь луночки равна площади трапеции *ABCD*.

3. Луночка равна трапеции и при этом внешняя дуга *меньше половины* круга.



Для построения третьего примера Гиппократ взял трапецию *ABCD*, в которой основание *BC* и боковые стороны *AB* и *CD* равны 1 и, кроме того, *AO* = *OD* = √(3/2), где *O* – точка пересечения диагоналей.

Здесь *S* – каждая из луночек с внешней дугой *AB* = *BC* = *CD*, а S_1 – каждая из луночек с внешними дугами *AO* = *OD*.

Пусть **$S : S_1 = m : n$**.

Тогда Гиппократ изучал луночки следующих типов:

1. m=1, n=2
2. m=1, n=3
3. m=2, n=3

Позже были найдены еще две квадрируемые луночки:

1766	Валлениус	m=1, n=5
1840	Клаузен	m=3, n=5

В 1934 Н.Г. Чеботарев и А.В. Дороднов методами теории Галуа доказали, что других квадрируемых луночек с нечетными *m* и *n* не существует.

1766 г. И. **Ламберт** доказал **иррациональность** числа π.

1844 г. Ж. **Лиувилль** доказал теорему о том, что алгебраическое иррациональное число невозможно слишком хорошо приблизить рациональной дробью. В той же работе он построил конкретные примеры («числа Лиувилля») трансцендентных чисел. Тем самым было доказано их существование.

Лиувиллево число – иррациональное число x, при приближении которого рациональным числом $\frac{p}{q}$ ошибка составляет не более некоторой степени знаменателя: $\exists\, C, \alpha > 0 \,\vdots\, \forall\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \left| x - \frac{p}{q} \right| \le \frac{C}{q^{\alpha}}$

По теореме Лиувилля о приближении алгебраических чисел, всякое алгебраическое иррациональное число является диофантовым (изменить в определении лиувиллева числа знак неравенства на противоположный). Следовательно, любое лиувиллево число трансцендентно, что позволяет явно строить трансцендентные числа как суммы сверхбыстро сходящихся рядов рациональных чисел. Например,

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

1873 г. Ш. **Эрмит** доказал **трансцендентность** числа *e*.

1882 г. Ф. фон **Линдеман** доказал невозможность решения квадратуры круга циркулем и линейкой после того, как им (и Эрмитом) была доказана трансцендентность числа π.

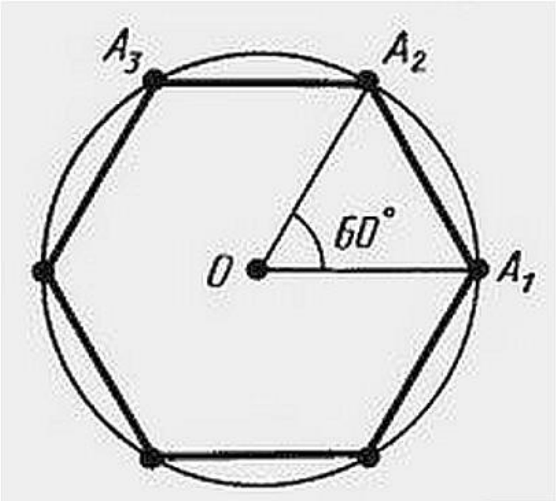
7-я проблема Гильберта:

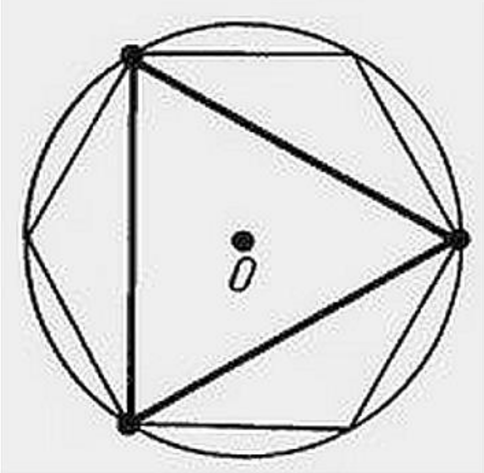
Выяснение **природы чисел вида** α^{β} при алгебраическом $\alpha \neq 0,1$ и алгебраическом и иррациональном β.

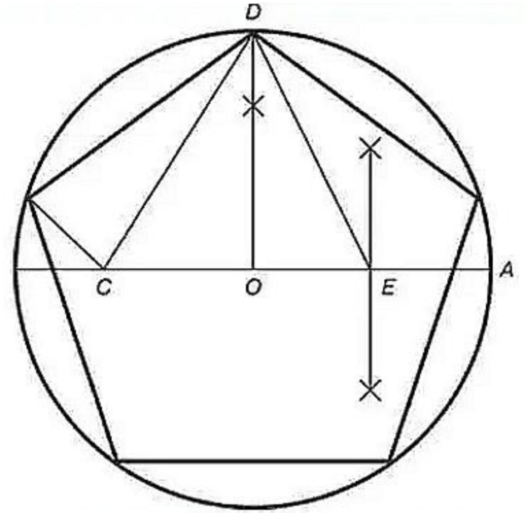
В 1934 г. профессор механико-математического факультета МГУ Александр Осипович ***Гельфонд*** *(фото справа) и немецкий математик Теодор* ***Шнайдер*** *(фото слева) независимо друг от друга доказали трансцендентность чисел такого вида.*

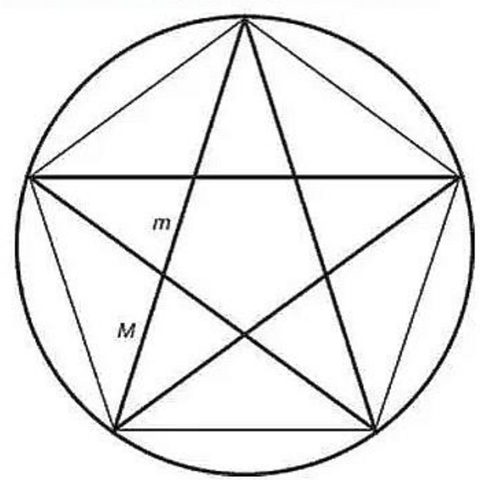
Построение вписанных правильных многоугольников

Были известны способы построения с помощью циркуля и линейки для треугольника, квадрата, пятиугольника и тех многоугольников, которые получаются из них удвоением сторон.





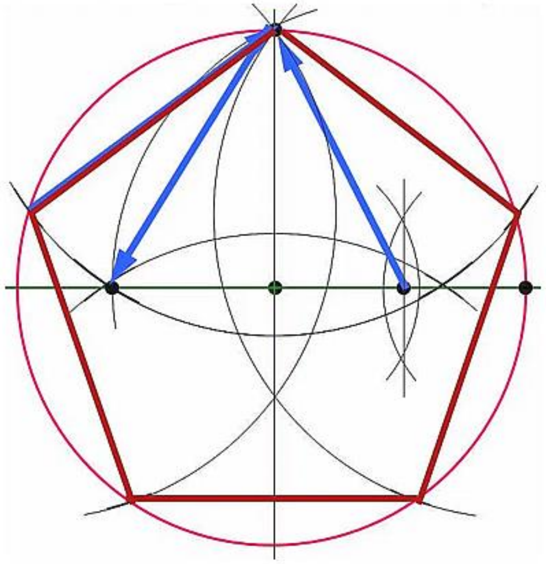




точка E: OE=EA

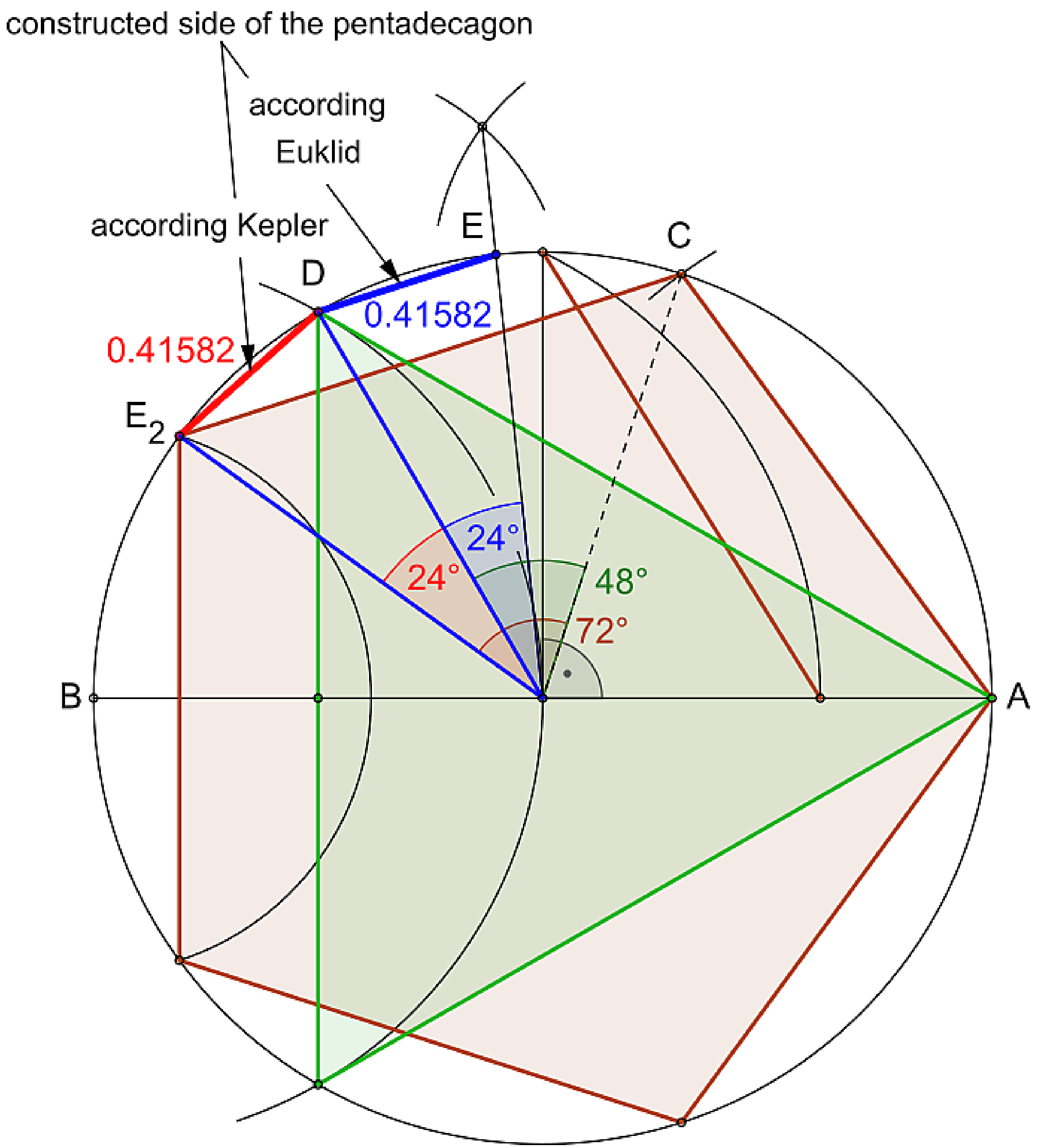
точка C: ED=EC

CD – сторона



В «Началах» Евклида есть построение правильного 15-угольника, вписанного в окружность (см. чертеж справа).

В арабском переводе Архимеда есть построение правильного 7-угольника, но с помощью вставки.



При каких *n* можно построить с помощью циркуля и линейки?

Решил К.Ф. **Гаусс** (1777–1855) в конце 18 века.

Связал с уравнением деления круга $\frac{x^p-1}{x-1}=0$ при простом показателе *p*.

Показал, что оно должно сводится к цепочке квадратных $\Longrightarrow p=2^{2^s}+1$ (число Ферма), но такие числа не все простые.

Ранее **Эйлер** показал, что при *s* = 5 число *p*=4294967297 делится на 641. Сейчас известно, что все числа Ферма от s = 5 до s = 32 составные.

Есть ли другие простые числа Ферма (кроме s = 0, 1, 2, 3, 4), до сих пор неизвестно.

Позже П.-Л. Ванцелем доказано (*теорема Гаусса-Ванцеля*), что вписать в окружность многоугольник можно $\Leftrightarrow p=2^k\cdot F_1\cdot F_2\cdot\dots\cdot F_k$, где F_i – простое число вида $2^{2^s}+1$.

Древнегреческие математики и философы

Зенон Элейский	490? – 430? до н.э.
Геродот (историк)	ок.485 – 425 до н.э.
Гиппократ Хиосский	вторая пол. V в. до н.э.
Гиппий из Элиды	ок. 460 до н.э.
Феодор из Кирены	ок.470 – 420 до н.э.
Сократ	469 – 399 до н.э.
Демокрит	ок.460 – 370 до н.э.
Архит Тарентский	ок.428 – 365 до н.э.
Платон	429 – 348 до н.э.
Евдокс Книдский	ок.406 – 355 до н.э.
Теэтет Афинский	ок.415 – 369 до н.э.
Менехм	ок. 360 до н.э.
Аристотель	384 – 322 до н.э.