История математики
4 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Панорама развития математики в древней Греции и в эпоху эллинизма. Пифагорейцы. Открытие несоизмеримости.

Греция и Малая Азия, 431 г. до н.э.

Периодизация. Математика древней Греции

- - VI-V вв до н.э. - «греческое чудо»
- - ок. 585 г. до н.э. – Фалес, милетская школа
- - ок. 550 г. до н.э. – Пифагор
- - ок. 490 г. до н.э. – Зенон
- - ок. 430 г. до н.э. – Гиппократ Хиосский, Демокрит
- - ок. 370 г. до н.э. – Евдокс
- - ок. 350 г. до н.э. - Менехм

Периодизация. Математика в эпоху Эллинизма

- ок. 300 г. до н.э. – Евклид
- ок. 280 г. до н.э. – Аристарх
- ок. 250 г. до н.э. – Архимед
- ок. 240 г. до н.э. – Эратосфен, Никомед
- ок. 210 г. до н.э. – Аполлоний
- Ок. 150 г. до н.э. – Гиппарх
- Ок. 60 г. – Герон

Далее: Менелай, Птолемей, Диофант, Папп

Греческая система счислений

Аттическая (геродианова)

До IV-III вв. до н.э., впервые описана греческим историком Геродианом, II-III вв н.э.

Аддитивная, непозиционная, близка к римской с.с.

Ионическая (буквенная)

- Непозиционная, буквенная

Аттическая и ионическая с.с.

1	2	3	4.	5	6	7	8	9
I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII
10	100	1000	10000	50	500	5000		
Δ	H	X	M	𐅄	𐅅	𐅆		

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ

Греческая нумерация

1	2	3	4.	5	6	7	8	9
I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII
10	100	1000	10000	50	500	5000		
Δ	H	X	M	Γ^{Δ}	Γ^{H}	Γ^{X}		

$\Gamma^{\Delta} = 50$

$\Gamma^{X} = 5000$

$H\Delta\Delta\Gamma\mathrm{III}$ = 128

$\mathrm{MM}\Gamma^{X}\Delta\Delta\Delta\Delta$ = ?

Алфавитная греческая нумерация

Α,	α′,	1.	Ι,	ι′,	10.	Ρ,	ρ′,	100.
Β,	β′,	2.	Κ,	κ′,	20.	Σ,	σ′,	200.
Γ,	γ′,	3.	Λ,	λ′,	30.	Τ,	τ′,	300.
Δ,	δ′,	4.	Μ,	μ′,	40.	Υ,	υ′,	400.
Ε,	ε′,	5.	Ν,	ν′,	50.	Φ,	φ′,	500.
	ϛ′,	6.	Ξ,	ξ′,	60.	Χ,	χ′,	600.
Ζ,	ζ′,	7.	Ο,	ο′,	70.	Ψ,	ψ′,	700.
Η,	η′,	8.	Π,	π′,	80.	Ω,	ω′,	800.
Θ,	ϑ′,	9.	Ϙ,	ϟ′,	90.		ϡ′,	900.

Пифагорейцы. Открытие несоизмеримости; геометрическая алгебра; знаменитые задачи древности.

Бронников.

Гимн пифагорейцев восходящему солнцу

Математика:

арифметика

геометрия

астрономия

музыка

Арифметика среди прочих наук выделяется совершенством знания.

Архит

Арифметика пифагорейцев

- Число – собрание единиц

Мистика цифр:

- 10 – совершенное число, 10=1+2+3+4
- 8 – смерть, т.к. сумма цифр чисел, кратных 8, уменьшается от 8 до 1
- 1 – матерь всех чисел
- 2 – линия
- 3 – треугольник
- 4 – пирамида

Учение о гармонии

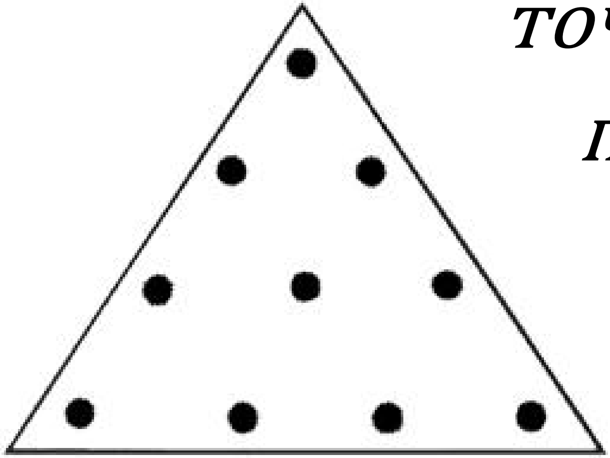
1:2 октава

2:3 кварта

3:4 квинта

1+2+3+4=10

монохорд



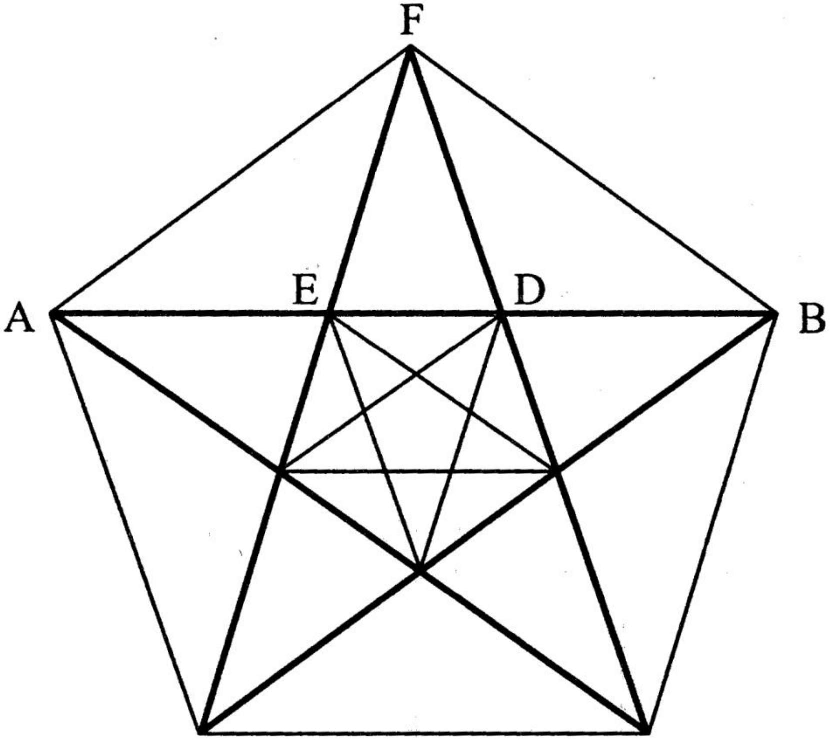
точка

прямая

плоскость

пространство

Пентаграмма



Среднее арифметическое

$$AD = \frac{AB+ED}{2}$$

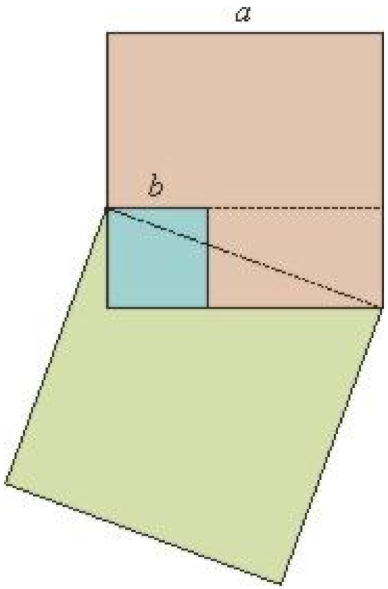
Среднее геометрическое

$$AD = \sqrt{AB \cdot AE}$$

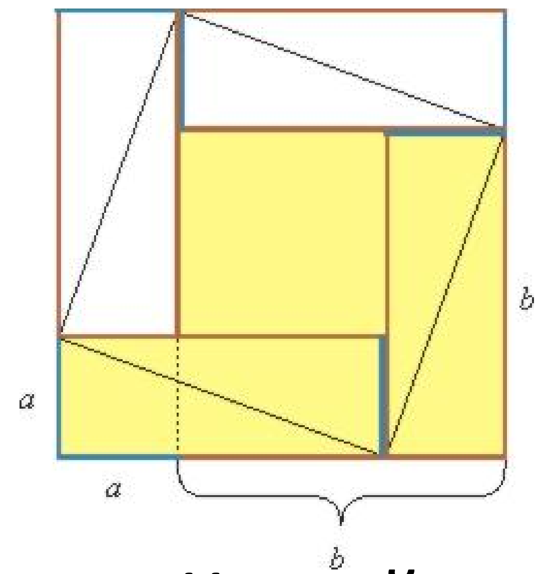
Среднее гармоническое

$$AE = \frac{2AB \cdot ED}{AB+ED}$$

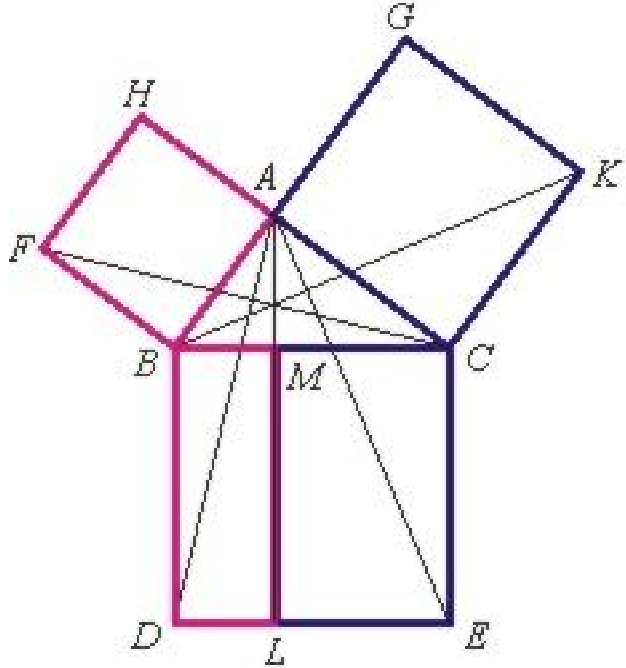
Теорема Пифагора



Индия



Китай



Евклид «Начала»

Совершенные числа

Совершенное число – это число, у которого сумма его делителей равна ему самому.

6 = 1+2+3

28, 496, 8128 (Никомах)

Если сумма $1 + 2 + \ldots + 2^n = p$ – простое число, то $2^n p$ – совершенное число.

Эйлер: других четных совершенных чисел не существует.

Нечетные совершенные числа - ?

Дружественные числа

Дружественные числа – это такие, каждое из которых равно сумме делителей другого.

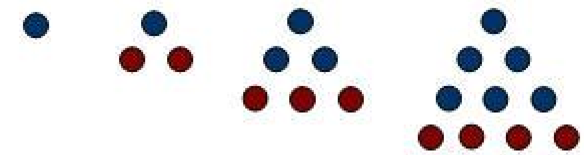
Например, 284 и 220.

17296 и 18416 (Ферма)

Фигурные числа

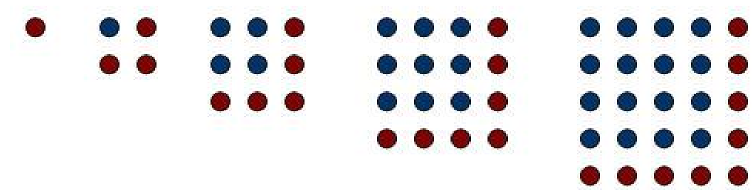
Треугольные числа

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$



Квадратные числа

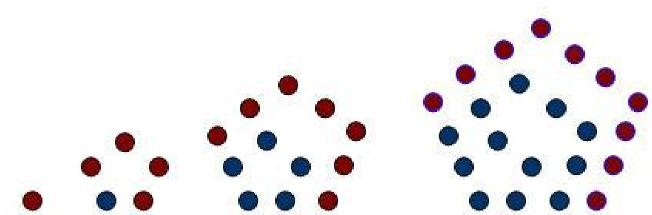
$$1 + 3 + 5 + \ldots (2n-1) = n^2$$



Прямоугольные числа

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$$

Пятиугольные числа



$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$$

Признаки делимости

p – простое число – линейное;

$p_1 \cdot p_2$ - плоское число;

$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ - телесное число;

Учение о чете и нечете

10 пар противоположностей:

предел	беспредельное
покой	движение
нечет	чет
прямое	кривое
единое	множество
свет	тьма
правое	левое
хорошее	дурное
мужское	женское
квадрат	параллелограмм

Чет-нечет

Основные результаты:

Произведение делится на два тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей делится на два.

Всякое четное число представляется в виде $N = 2^k \cdot N_1$

Теоретико-числовые задачи

1. Задача о нахождении совершенных чисел.

2. Пифагоровы тройки $x^2 + y^2 = z^2$

Решение: $x = (m^2 - n^2)$

$$y = 2mn$$

$$z = (m^2 + n^2)$$

Арифметика дробей

Дробь $\frac{m}{n}$ - это пара чисел (m,n) $\sim$ интервал это пара высот.

Действия:

- *+/- путем приведения в общему знаменателю*
- *сокращение*
- **/:*

Классы эквивалентности (A,B)

Две пары чисел (A, B) и (C, D) **пропорциональны**, если у A и B существует общий делитель F, а у C и D общий делитель G такие, что

$A = mF \qquad C = mG$

$B = nF \qquad D = nG$

Пифагорейцы знали, что отношение пропорциональности транзитивно.

Пусть (A_0, B_0) - наименьшая пара.

Доказано:

1. Если $A: B = A_0: B_0$, то $A = kA_0,\ B = kB_0$.

2. Если A_0, B_0 взаимно просты, то это наименьшая пара из всех, имеющих с ней одинаковое отношение.

3. Если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они взаимно просты.

4. Если $A: B = F: G$ и $B : C = G: H$, то

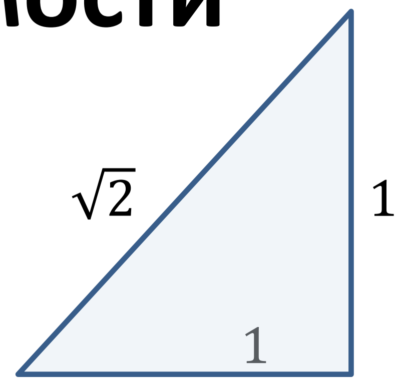
$A: C = F: H$ (закон композиции)

5. $(A_1 A_2: B_1 B_2) = (A_1: B_1) \otimes (A_2: B_2)$

6. Чтобы составить отношения $(A: B)$ и $(C: D)$, надо найти наименьшие числа F, G, H такие, что $A: B = F: G$ и $C: D = G: H$. Тогда

$$(A: B) \otimes (C: D) = (F: G) \otimes (G: H) = (F: H)$$

Открытие несоизмеримости



Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, причем $(m, n) = 1$

$2n^2 = m^2$

m^2 - четное $\Rightarrow$ $m = 2k$ – тоже четное

При этом n нечетное, иначе $(m, n) \neq 1$

$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$

$n^2 = 2k^2$ четное $\Rightarrow$ n четное.

Противоречие.