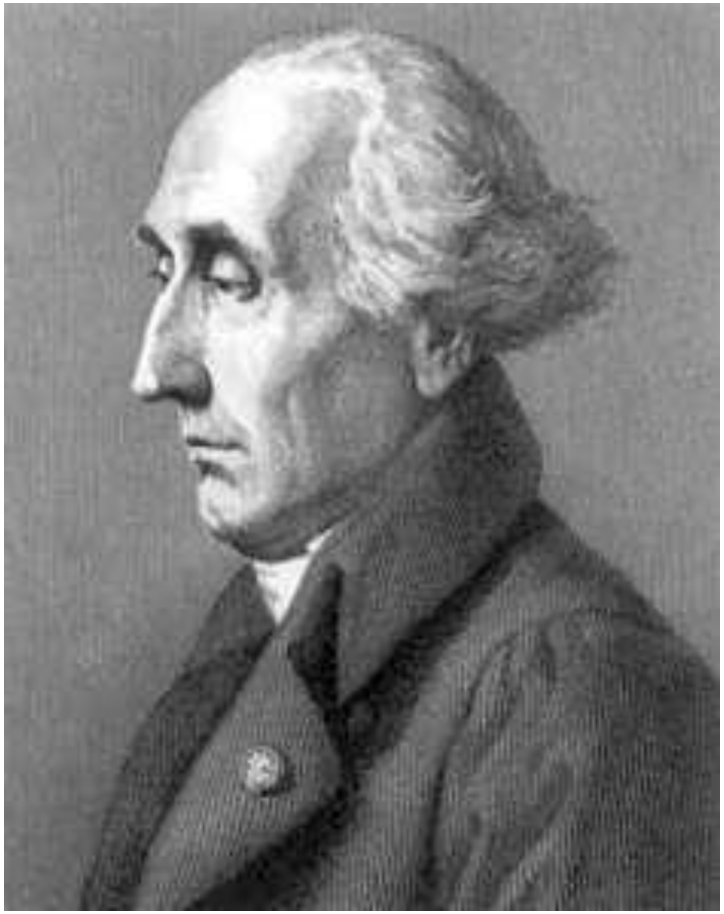
Лекция 4

Разработка принципа виртуальных скоростей в творчестве
Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813)



Ж. Лагранж (L.Lagrange) (1736-1813)

Ж.Л.Лагранж (1736-1813)

- Родился 25 января 1736г. В Турине
- Туринский университет; «Записки Туринской академии наук» (статья о распространении звука)
- Переписка с Л. Эйлером
- 1756 – ин. член Берлинской АН
- 1764- «Исследование о либрации Луны» (1-я премия Парижской королевской академии наук)
- 1766-1787 – директор физ-мат класса Берлинской АН
- 1766 – иссл-е о двжении спутников Юпитера (премия Парижской королевской академии наук)
- 1772 – поч. чл. Парижской королевской АН
- 1776 – поч. член Петербургской АН

- **1788 – «Аналитическая механика»**
- 1787 – переезд во Францию
- Бюро консультаций по вопросам прикладного искусства и ремесел (организованного якобинским Конвентом),
- Комиссия по разработке метрической системы,
- Лагранж был мобилизован на решение проблем обороны Франции
- администратор Монетного двора Франции

- Участие в создании (по замыслу Конвента) Нормальной и Политехнической школ,
- 1797 -«Теория аналитических функций»
- 1801 -«Лекции по исчислению функций»
- 1813 - орден Почетного легиона.
- 10 апреля 1813г. Лагранж скончался.

Ж.Л.Лагранж (1736-1813)

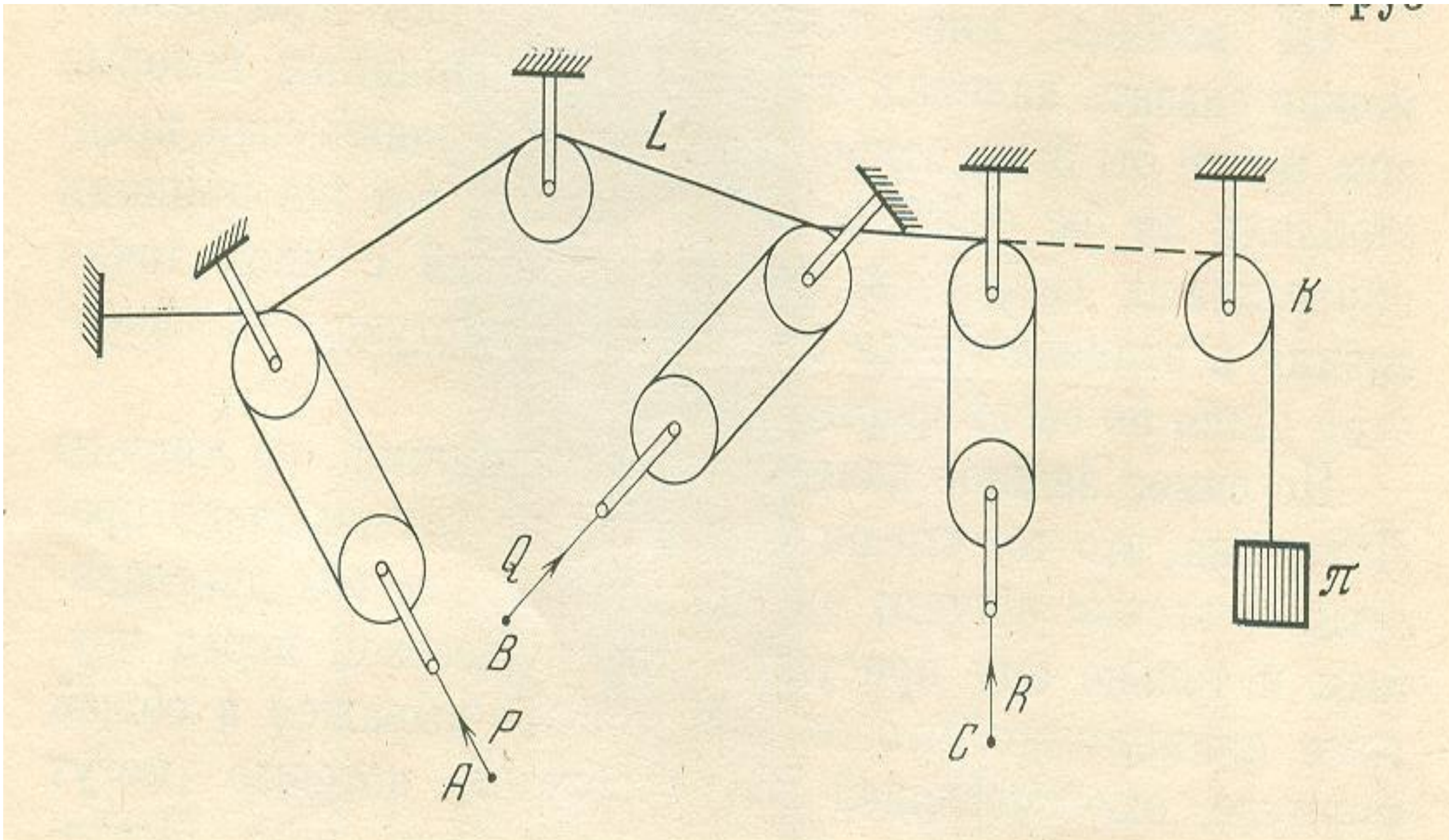
- Для обоснования принципа возможных перемещений Лагранж использует идею вводить **заменяющую схему грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины**

- Трактат Лагранжа **«Аналитическая механика»(1788)** начинается со статики, с научно-исторического исследования «О различных принципах статики». Проследив историю развития основных принципов статики — принципа рычага, принципа сложения и разложения сил, принципа виртуальных скоростей, Лагранж приходит к выводу, что два первых принципа могут быть выведены из третьего — самого общего принципа статики.

Необходимое условие равновесия сил, приложенных к механической системе

«Если какая-либо система любого числа тел, или точек, на каждую из которых действуют любые силы, находится в равновесии и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными»

Основанием для принципа виртуальных скоростей Лагранж считает принцип блоков, или принцип полиспастов.



Лагранж обозначает через α, β, γ... возможные бесконечно малые смещения точек системы вдоль линии действия сил P, Q, R... Тогда высота h, на которую груз мог бы опуститься, выражалась бы так:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = \frac{h}{2}.$$

Необходимым условием равновесия системы является равенство нулю величины h, т. е.

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0.$$

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

Достаточность этого условия Лагранж доказывает только для двусторонних связей.

Если допустить, что это равенство имеет место, то оно должно удовлетворяться

как положительными перемещениями, так и отрицательными, и, таким образом, не существует никаких оснований для того, чтобы равновесие было нарушено в ту или другую сторону.

Следовательно, должно иметь место равновесие.

Общая формула статики:

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = 0$$

Сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю

- Далее Лагранж поясняет, как пользоваться этой формулой для расчета состояния равновесия системы: сначала рассматривается случай системы, допускающий поступательное или вращательное движение без изменения относительного взаимного расположения точек системы.
- В отделе третьем Лагранж вводит функцию *П*, являющуюся потенциальной энергией системы, хотя он этого термина не употреблял.
- Необходимое и достаточное условие равновесия системы под действием консервативных сил характеризуется экстремумом этой функции. При этом Лагранж доказывает, что положение равновесия, соответствующее *минимуму* функции *П*, *устойчиво*, а *максимуму — неустойчиво*.

В отделе четвертом Лагранж выводит условия равновесия для систем со связями и дает метод, называемый сейчас методом неопределенных множителей Лагранжа.

В отделе пятом рассматривается применение этого метода и общей формулы статики к решению отдельных конкретных задач о системах материальных точек, связанных нитями или стержнями, жесткими или упругими, о равновесии упругой пластинки, о равновесии твердого тела под действием любой системы сил.

В последующих отделах излагается гидростатика.

- Учение о равновесии механической системы, включая гидростатику идеальной (несжимаемой и сжимаемой жидкости), изложено Лагранжем единообразным методом, с большим числом разработанных им приложений.

- Этот новый системный метод получил после Лагранжа широкое распространение и именуется **аналитической статикой**.

- Отметим, что обобщенные силы у Лагранжа не являются векторами, поэтому вопросы приведения систем к простейшему виду полностью выпадают из рассмотрения. Связи у Лагранжа являются связями идеальными. Поэтому совершенно естественно, что на практике к изложению Лагранжа пришлось добавить большое количество материала весьма разнородного качества: произошло разделение механики на теоретическую и техническую.
- Принцип виртуальных скоростей Лагранжа был создан не в 1788 г., когда вышла «Аналитическая механика». Первое упоминание о нем встречается в мемуаре о либрации Луны (1764 г.), помещенном в трудах Парижской Академии.

Исследование основных законов статики системы со связями в трудах Политехнической школы

В начале XIX века

Парижская Политехническая школа (1794)

- Современниками, коллегами Лагранжа по Парижской Политехнической школе, его учениками продолжалась разработка аналитической статики и учения о связях.

Ж. Фурье (1768 - 1830)

- **Оригинальным и чрезвычайно ценным начинанием Ж.Б. Фурье было введение им условия равновесия некоторых систем с неудерживающими связями.**

В 1798 г. в журнале Политехнической школы Фурье опубликовал «Мемуар о статике».

Ж. Фурье (1768 - 1830)

- **Условием равновесия гибкой нерастяжимой нити под действием сил, приложенных к ее концам, является неположительность суммы элементарных работ всех сил на возможных перемещениях точек их приложения.**
- **Еще в качестве примера рассматривается случай равновесия двух жестких поверхностей, прижимаемых друг к другу равными и противоположными силами, приложенными в точке соприкосновения поверхностей перпендикулярно к обеим поверхностям.**

Ж. Фурье (1768 - 1830)

- **Фурье повторяет, что для систем с освобождающими «условиями» полный момент сил будет неотрицательным для всех перемещений с освождением («полный момент сил» у него означал суммарную работу активных сил, взятую со знаком минус).**

Ж. Фурье (1768 - 1830)

- Критерий устойчивости найден Фурье в виде требования положительности квадратичной части приращения «полного момента сил» на виртуальном перемещении точек приложения сил, при равенстве нулю линейной части этого приращения.

- В современной терминологии такое условие обеспечивает минимум потенциальной энергии системы активных сил, так как «полный момент сил» - сумма виртуальных работ, взятая со знаком минус.

А. Ампер (1775-1836)

- «**Общее доказательство принципа виртуальных скоростей, освобожденное от рассмотрения бесконечно-малых» (1806).** Он указывает на возможность построения такой **вспомогательной заменяющей системы точек, в которой смещения точек были бы таковы, что выражения для «моментов сил» и условия равновесия данной и вспомогательной системы совпадали бы.**

А. Ампер (1775-1836)

- **Ампер добивается того, что вспомогательная система сводится к паре точек, соединенных жестким стержнем, при силах, приложенных вдоль стержня к его концам и равных по величине.**

(Док-во Ампера является лишь вариантом сведения принципа возможных перемещений к принципу сложения и разложения сил).

П.С. Лаплас (1749-1827)

- **Разработка понятия идеальных связей была начата П.С. Лапласом в 1798-99гг. в трактате «Небесная механика»** (5 томов**).**
- **Общая формула статики (принцип виртуальных скоростей) трактуется Лапласом как следствие уравнений равновесия материальной системы, известных в геометрической статике.**

Лаплас «Об общих законах равновесия и движения»

- Материальную точку механической системы, остающуюся на некоторой поверхности или линии, можно рассматривать как свободную, добавив к действующим на нее силам еще силы реакции поверхности (линии).

П.С. Лаплас (1749-1827)

- **Условие равновесия всех сил в данной точке, мысленно изолированной от других точек системы, записывается в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на данную координатную ось (на основе принципа сложения и разложения сил в сочетании с законом равенства действия и противодействия).**

П.С. Лаплас (1749-1827)

Получены три уравнения равновесия сходящихся в каждой точке системы сил:

$$\sum(X_i + R_{ix}) = 0, \sum(Y_i + R_{iy}) = 0, \sum(Z_i + R_{iz}) = 0$$

$$\sum(X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i) = -\sum(R_{ix} \cdot \delta x_i + R_{iy} \cdot \delta y_i + R_{iz} \cdot \delta z_i) = 0$$

П.С. Лаплас «Небесная механика»

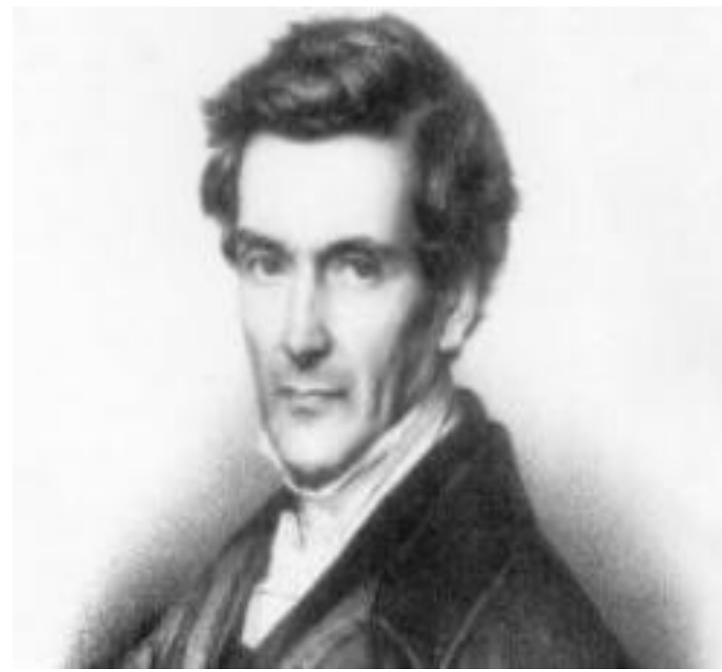
- Лаплас утверждает равенство нулю суммы произведений проекций сил реакции на проекции возможных перемещений точек по всем трем осям координат
- Он объясняет это равенство ортогональностью сил реакций поверхности (или двух поверхностей в случае линии их пересечения) возможным перемещениям точки по своим поверхностям.
- (Использование абстракции «идеальных связей»)

П.С. Лаплас (1749-1827)

- **Отбрасыванием суммы элементарных работ сил реакций связей на возможных перемещениях точек их приложения Лаплас получает общую формулу статики Лагранжа, или аналитическую запись принципа виртуальных скоростей, считая, что эта формула является простым следствием принципов геометрической статики**

$$\sum(X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i) = 0$$

С.Д.Пуассон (1781-1840), Ж.В.Понселе (1788-1867), Г. Кориолис (1792-1843)



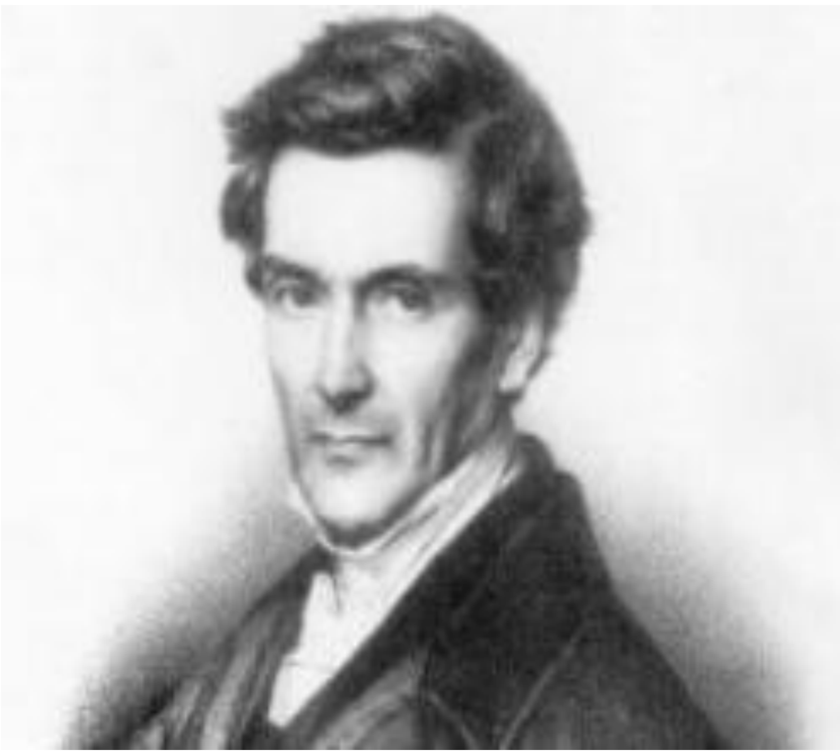
С.Д.Пуассон (1781-1840)

- Пуассон - видный деятель Парижской политехнической школы, член Парижской АН, почетный иностранный член Петербургской АН (1826)
- «Трактат механики» (1811)

Ж.В.Понселе (1788-1867)

- «Курс механики, приложенной к машинам» (1826)
- «Курс индустриальной механики» (1829)
- Вместо лагранжева термина «момент силы» вводится «работа силы»

Г. Кориолис (1792-1843)



- «Трактат механики твердых тел и вычисления эффекта машин» (1829).
- Вводится наименование **суммы произведений возможных перемещений на проекции сил на эти перемещения термином** «работа сил».

К.Ф.Гаусс (1777-1855)

- «Об одном новом общем основном законе механики».
- Гаусс пишет об **актуальности обобщения теории принципа возможных перемещений на случай неудерживающих связей.**

Равновесие системы со связями в трудах М.В.Остроградского

(1801-1861)

Михаил Васильевич Остроградский (1801-1861)

- В 1820 г. М В. Остроградский окончил Харьковский университет, но диплома не получил
- 1822-Париж - его учителями были П.Лаплас, О.Коши, С.Пуассон, Ж.Фурье

«**Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне» (1826).**

- Член Петербургской АН (1830; адъюнкт с 1828)
- Член-корреспондент Парижской АН (1856)
- Член Национальной академии дем Линчеи в Риме (1853) и ряда др. зарубежных академий

- Родился 12 (24) сентября 1801 года в деревне Пашенная Кобелякского уезда Полтавской губернии, в семье помещика из дворянского рода Остроградских.
- В детстве был чрезвычайно любознателен к естественно-научным явлениям, хотя не проявлял тяги к учёбе.
- С 1816 года был вольнослушателем (с 1817 — студентом) физико-математического факультета Харьковского университета, где учился у Т. Ф. Осиповского.

В 1820 году Остроградский с отличием сдал кандидатские экзамены. Однако реакционная часть харьковской профессуры добилась лишения юноши аттестата кандидата наук и диплома об окончании университета. Мотивировалось это непосещением лекций по богословию. Он так и не получил учёную степень.

В 1822 году Михаил Васильевич, желая продолжить занятия математикой, был вынужден уехать в Париж, где в Сорбонне и Коллеж де Франс продолжал изучать математику, посещал лекции знаменитых французских учёных — Лапласа, Фурье, Ампера, Пуассона и Коши.

В 1823: приглашён в качестве профессора в коллеж Генриха IV.

1826: первые научные успехи. Остроградский представил Парижской Академии наук мемуар «О распространении волн в цилиндрическом бассейне».

Знаменитый французский математик Коши писал об Остроградском: «Этот русский молодой человек одарён большой проницательностью и весьма сведущий».

-

- В 1828 г. Остроградский возвращается в Россию и преподает в должности профессора математику и механику в Корпусе инженеров путей сообщения, в Педагогическом институте, в Главном инженерном училище, в Главном артиллерийском училище, в Морском кадетском корпусе.
- Научные труды М.В. Остроградского относится к аналитической и прикладной механике (теория притяжения, гидромеханика, проблемы колебания упругого тела, теория удара обобщение принципа виртуальных скоростей, дифференциальные уравнения механики, внешняя баллистика и др.).
- **Он закончил исследование принципа виртуальных перемещений на случай систем с неудерживающими связями в 1834г., которое вышло в 1838г. под названием «Общие соображения относительно моментов сил»**

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Под термином «момент сил» в отличие от Лагранжа и его школы М.В.Остроградский понимал произведение силы на виртуальное перемещение и на косинус угла между ними (в более поздней терминологии это означало работу сил на виртуальном перемещении точки ее приложения). Различие с тем, что понимал Лагранж под термином «момент силы» было в знаке.

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Остроградский расширил применение принципа виртуальных скоростей, дав новую более общую формулировку принципа:
- **«Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы дифференциал *Pdp+Qdq+Rdr+…* не был положительным ни при каком возможном перемещении»**

- «Ясно, что для сохранения равновесия этой системы, подверженной действию различных сил, необходимо, чтобы при любом бесконечно малом перемещении системы груз не опускался» (Лагранж)
- Однако Лагранж записал только строгое равенство нулю вариации вертикальной координаты груза.
- **Остроградский предложил записывать общую формулу статики в виде:**

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots \le 0$$

- Лагранж разработал алгоритм использования неопределенных множителей Лагранжа в общем случае равновесия системы материальных точек, подверженной ограничению со стороны неудерживающих связей.
- Метод Остроградского позволяет найти не только величину неопределенного множителя, но и его знак, который был безразличен в случае систем с удерживающими (двусторонними) связями.

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Механический смысл неопределенных множителей - реакции связей – в этом методе приобретает особую отчетливость, так как знак λ позволяет судить о том, какие из связей перестают влиять с некоторого момента времени (освобождают точку)

М.В.Остроградский (1801-1861)

- **Пример**: случай равновесия материальной точки на гладкой освобождающей поверхности, например на поверхности гладкой сферы: $$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Уравнение, которому удовлетворяют координаты материальной точки, запишем в виде:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = C$$

где *C = 0*, если точка находится на сфере, *C > 0*, если точка вне сферы.

Проварьируем уравнение связи:

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = \delta C$$

δC равно нулю, когда точка на сфере, больше нуля, когда она вне сферы

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Условие равновесия точки под действием силы с проекциями, X, Y, Z:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta\pi$$

где $\delta\pi = 0$ для неосвобождающей связи,

$\delta\pi < 0$ для случая освобождения точки от связи.

М.В.Остроградский (1801-1861)

Пусть на точку действует только ее вес,

тогда последнее условие примет вид:

$$-mg\delta z = \delta\pi$$

Умножим вариацию связи на неопределен-ный множитель Лагранжа и сложим с условием равновесия:

$$2\lambda x\delta x + 2\lambda y\delta y + (-mg + 2\lambda z)\cdot\delta z = \delta\pi + \lambda\delta C$$

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Так как виртуальные перемещения точки, не покидающей сферу, входят в число виртуальных перемещений, правая часть равенства равна нулю из условия неопределенности множителя λ и независимости вариаций координат, следует

$$x = 0, y = 0, 2\lambda z = mg$$

- Этот же случай позволяет получить из уравнения связи $z = \pm R$

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Рассмотрим теперь равенство $\delta\pi + \lambda\delta C = 0$

Так как $\delta\pi \leq 0$, то $\lambda\delta C \geq 0$.

Если связь освобождает, то $\delta C > 0$ и $\lambda > 0$

Следовательно, точка на внешней поверхности гладкой сферы под действием веса может находиться в равновесии только при

$$\lambda = mg / 2R$$

т.е. в верхнем положении

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Изменение знака λ при обращении этой величины в нуль означало бы, что точка покидает связь (реакция, проходя через значение нуль, должна изменить знак; давление поверхности должно быть заменено натяжением нити).
- Остроградский рассматривает равновесие веревочного многоугольника, имеющего *n* узлов, в которых приложены заданные силы. Он указывает два метода решения задачи о равновесии гибкой нити, каждый элемент которой находится под действием данных сил.

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Остроградский рассматривает равновесие веревочного многоугольника, имеющего *n* узлов, в которых приложены заданные силы. Он указывает два метода решения задачи о равновесии гибкой нити, каждый элемент которой находится под действием данных сил.

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Ученик Остроградского, его ассистент в Институте инженеров путей сообщения, Карл Яниш в своей работе продолжил развитие и обобщение принципа виртуальных перемещений, дав первое строгое доказательство этой формулы статики в общем случае (требование неположительности суммы элементарных работ сил на виртуальных перемещениях).

- **Ученики**
  - **Н. Д. Брашман,
В. Я. Буняковский,
И. А. Вышнеградский,
Д. М. Деларю,
Д. И. Журавский,
Н. П. Петров,
Ф. В. Чижов и другие**