

История математики

3 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2025 года

Математика в древнем Вавилоне



Периодизация

- 3000 до н.э. Шумерские города-государства (Аккад, Лагаш, Ларса) *Клинопись, шестидесятеричная система*
- XXIII в. до н. э. Объединение государств Двуречья
- XIX - XVIII в. до н. э. возвышение нового царства, со столицей в Вавилоне. *Таблицы для деления и умножения. Расцвет алгебры и геометрии.*
- 747 до н.э. Начало астрономической «эры Набонассара». *Регулярные астрономические наблюдения*
- 336 до н.э. захват Двуречья Александром Македонским. После его смерти – эпоха Селевкидов. *Расширенные счетные таблицы. Таблицы движений Луны и планет.*

Источники

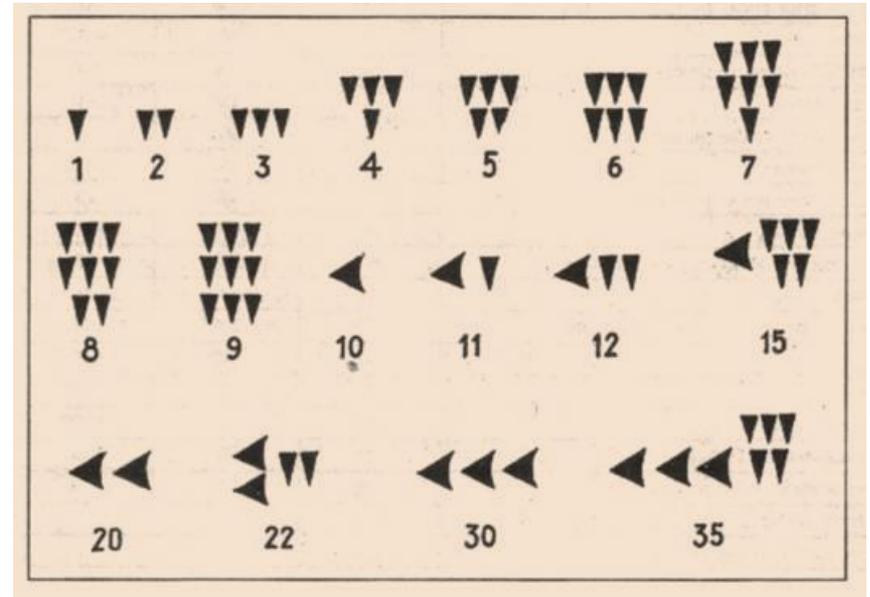
(зарегистрировано около 500 000)

Древневавилонский
клинописный текст
BM 85194.
Изображенная
сторона содержит 16
задач с решениями.
Задачи относятся к
плотинам, валам,
колодцам, водяным
часам и земляным
работам.



Вавилонская система счисления

- Позиционная шестидесятеричная система счисления



The diagram shows the Babylonian numeral for 100,000, which consists of two columns of three left-pointing triangles. This numeral is decomposed into three parts: 27 hundreds (represented by two columns of three left-pointing triangles), 46 tens (represented by two columns of three left-pointing triangles), and 40 units (represented by two columns of three inverted triangles). The equation is:

$$= 27 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 40 = 100000$$

Вычислительная техника

- Сложение и вычитание производилось так же, как в десятичной позиционной системе целых чисел и дробей.
- При умножении возникало затруднение, связанное с большим основанием системы. Это затруднение преодолевалось с помощью специальных таблиц.
- Деление производилось с помощью таблиц обратных величин

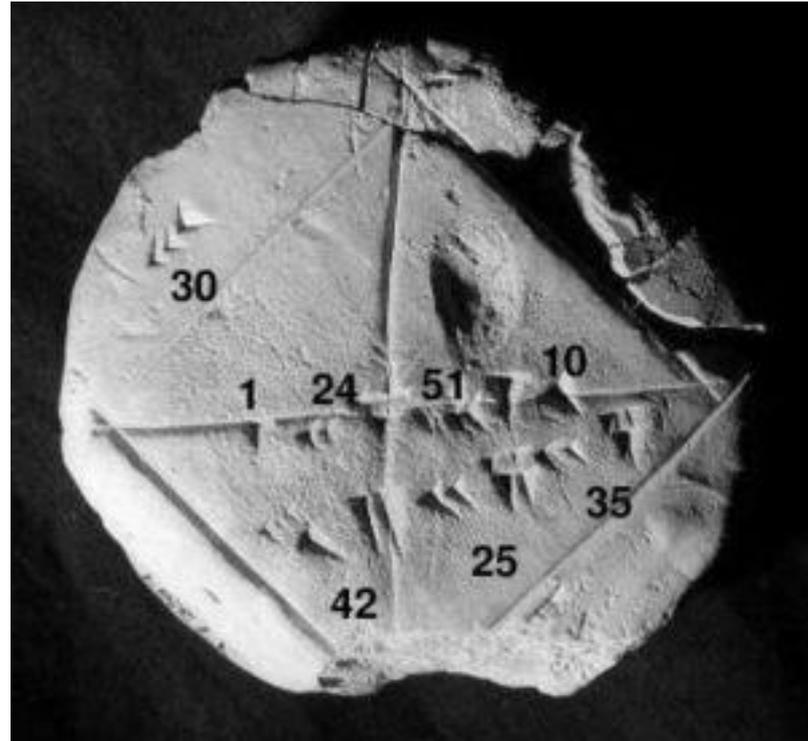
Пример таблицы обратных величин

1 : 2 = 30	16	3,45	45	1,20
3 = 20	18	3,20	48	1,15
4 = 15	20	3	50	1,12
5 = 12	24	2,30	54	1,6,40
6 = 10	25	2,24	1	1
8 = 7,30	27	2,13,20	1,4	56,15
9 = 6,40	30	2	1,12	50
10 = 6	32	1,52,30	1,15	48
12 = 5	36	1,40	1,20	45
15 = 4	40	1,30	1,20	44,26,40

Вычисление корня из двух

Изображен квадрат с диагоналями. Сторона равна 30. На диагонали надписано число, выражающее отношение диагонали к стороне 1, 24, 51, 10. Под диагональю стоит ее длина – 42, 25, 35

Получаем приближение:
 $\sqrt{2} = 1; 24, 51, 10.$



Вавилонская алгебра

Пример 1. (Текст АО 8862, эпоха Гаммурапи)

«Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади; 3, 3 получилось у меня. Затем я длину и ширину сложил: 27. Спрашивается длина, ширина и площадь.»

(Даны) 27 и 3,3 суммы

(Результат) $\left. \begin{array}{l} 15 \text{ длина} \\ 12 \text{ ширина} \end{array} \right\} 3,0 - \text{площадь}$

Ты делаешь так: $27 + 3,3 = 3,30$

$$2 + 27 = 29$$

Возьми половину от 29 (это дает 14;30)

$$14;30 \times 14;30 = 3,30;15$$

$$3,30;15 - 3,30 = 0,15.$$

0; 15 имеет 0;30 квадратный корень.

$$14;30 + 0;30 = 15 \text{ длина}$$

$$14;30 - 0;30 = 14 \text{ ширина}$$

Отними 2, которые ты прибавил к 27, от ширины 14; 12 истинная ширина. 15 длину, 12 ширину я перемножил:

$$15 \times 12 = 3,0 \text{ площадь}$$

$$15 - 12 = 3$$

$$3,0 + 3 = 3,3 \text{»}$$

Формулы сокращенного умножения

- Пример 2 (BM 85194)

Задача требует построить профиль насыпи в виде равнобедренной трапеции, для которой дается основание a , наклон $\beta = \frac{a-b}{2h}$ и площадь $S = \frac{a+b}{2}h$. Если умножить 2β на $2S$:

$$4\beta S = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

то можно найти $b^2 = a^2 - 4\beta S$. Все это было бы непонятным, если допустить, что формула $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ была вавилонянам неизвестна.

Также вавилоняне знали формулы:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Пример 3 (ВМ 13901)

- «Площади двух моих квадратов я сложил: 25,25. (Сторона) второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5.»

- Таким образом,
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25,25 \\ y = \frac{2}{3}x + 5 \end{cases}$$

Чтобы подставить y из второго уравнения в первое, необходимо воспользоваться формулой $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$(0; 40x + 5)^2 = 0; 40x^2 + 2 \cdot 0; 40x \cdot 5 + 5^2.$$

После этого для x получалось квадратное уравнение $ax^2 + 2bx = c$.

В тексте сначала вычисляются коэффициенты a , b , c и затем решается квадратное уравнение по правильной формуле:

$$x = a^{-1} \left(\sqrt{ac + b^2} - b \right),$$

А затем определяется y .

Заключение по алгебре и арифметике

- Уравнения с одним неизвестным

$$ax = b; x^2 = a; x^2 + ax = b; x^2 - ax = b; x^3 = a; \\ x^2(x + 1) = a.$$

- Системы уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

- Были известны формулы:

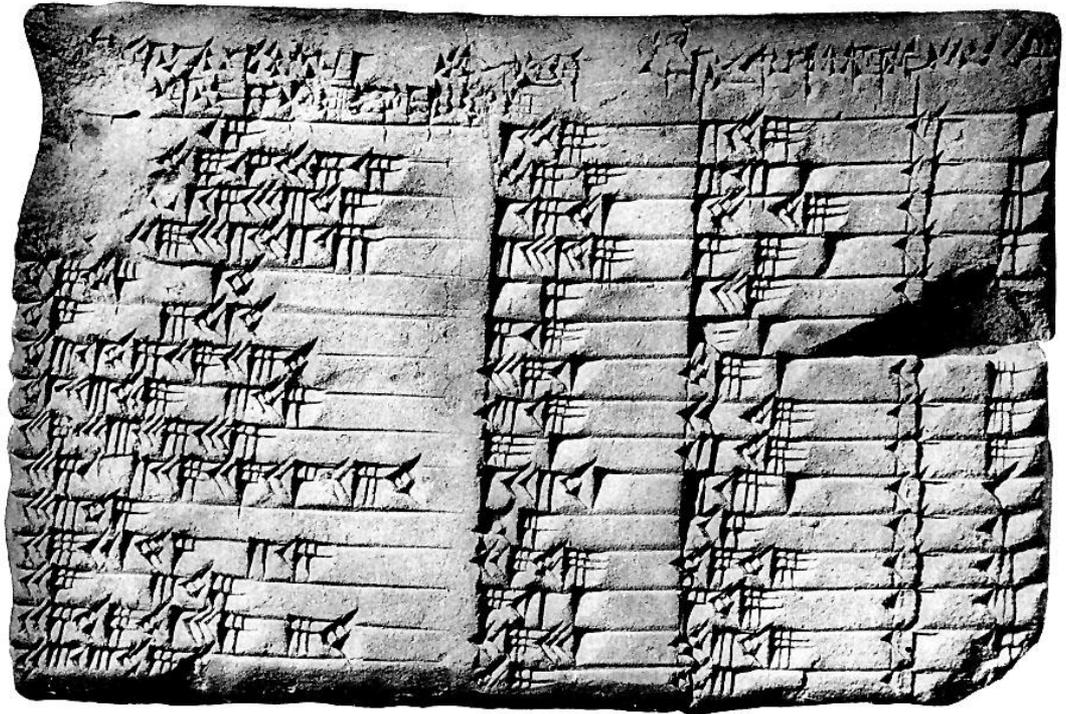
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ а также}$$

формула суммирования арифметических прогрессий

Прямоугольные треугольники с рациональными сторонами

Математический текст Plimpton 322 содержит перечень прямоугольных треугольников с рациональными сторонами



Теорема Пифагора

- В древневавилонском тексте BM 85196 имеется следующая задача:

«(Балка) длины $0;30$ (прислонена к стене). Ее верхний конец опустился на $0;6$. Как далеко отодвинется ее нижний конец?»

По геометрии в древнем Вавилоне знали:

- Пропорциональность для параллельных линий
- Теорема Пифагора
- Площади треугольника и трапеции
- Площадь круга $3r^2$, длина окружности $6r$
- Объем призмы и цилиндра
- Объем усеченного конуса (неправильно)
- Объем усеченной пирамиды с квадратным верхним и нижним основанием (неправильно)

Литература:

1. О.Нейгебауэр «Лекции по истории античных математических наук. Догреческая математика», гл.1, 5
2. А.П.Юшкевич «История математики с древнейших времен до начала Нового времени», т.1, гл.3.
3. Б.Л.Ван дер Варден «Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции», гл.3