История и методология механики

Лекция № 2

Часть 1

Евгений Алексеевич Зайцев
e_zaitsev@mail.ru

Лекция 2

Развитие геометрической статики. Труды Архимеда по механике

1. Закон рычага Архимеда
2. Гидростатика Архимеда. Проблемы геостатики.
3. Проблема сведения простых машин к рычагу (античность)

Часть 1

Закон рычага Архимеда

Введение

Ж.-Л. Лагранж о трех подходах к проблеме равновесия. Три принципа, из которых могут быть выведены законы равновесия

«Статика – это наука о равновесии сил. …

Равновесие получается в результате уничтожения нескольких сил, которые *борются* и взаимно сводят на нет действие, производимое ими друг на друга; статика имеет своей целью дать законы, согласно которым происходит это уничтожение.

Эти законы основаны на общих принципах, которые можно свести к трем:

I. Принцип рычага,

II. Принцип сложения сил и

III. Принцип виртуальных скоростей».

Ж.-Л. Лагранж, «Аналитическая механика» (1788)

Отдел первый. О различных принципах статики (исторический обзор)

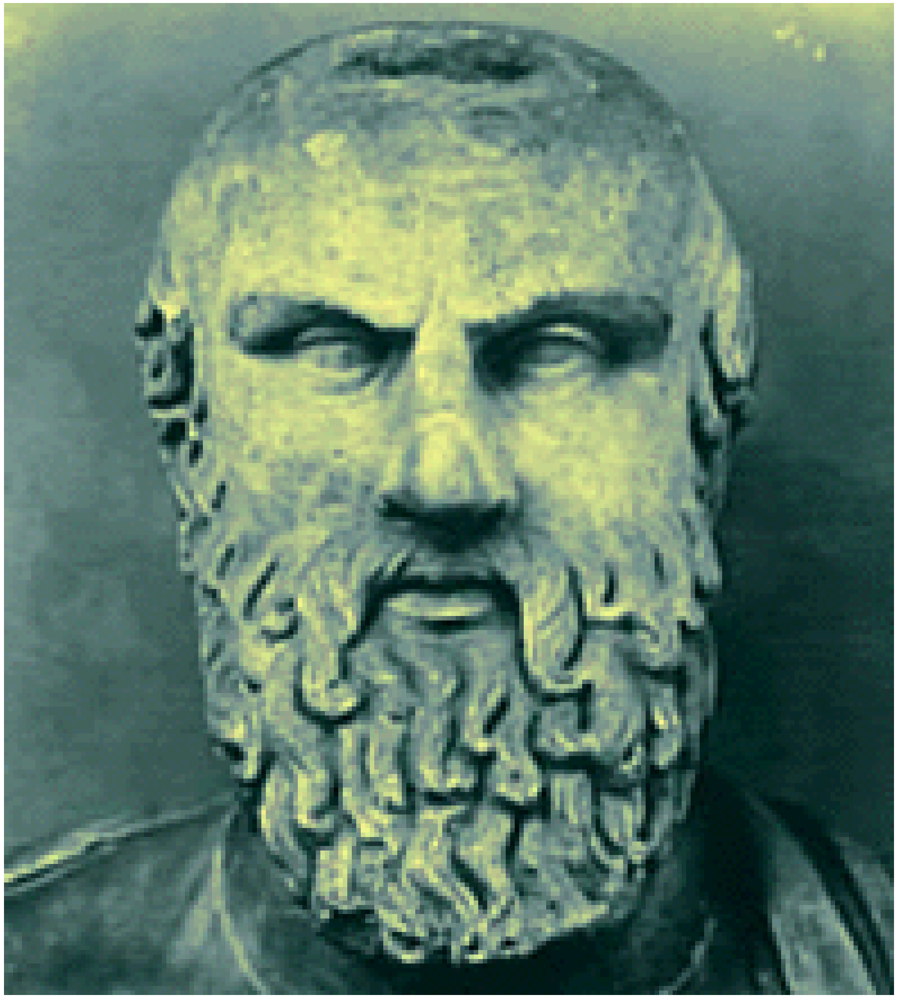
Принцип рычага (по Лагранжу)

«Принцип рычага, как его знают все механики, заключается в следующем. Если прямолинейный рычаг нагрузить с обеих сторон от точки опоры какими-либо двумя грузами таким образом, чтобы расстояния этих грузов от точки опоры были обратно пропорциональны самим грузам, то рычаг останется в равновесии, а нагрузка на точку его опоры будет равна сумме обоих грузов.

Для случая, когда грузы равны и находятся на равном расстоянии от точки опоры, Архимед принимает этот принцип в качестве очевидной аксиомы механики или, по меньшей мере, в качестве опытного закона.

К этому простому и первичному случаю он сводит случаи, когда на рычаге помещены неравные грузы».

Архимед (287—212 до н. э.) – крупнейший математик и механик Античности



Родился и бо́льшую часть жизни прожил в городе Сиракузы на Сицилии (греческая колония).

Учился в Александрии – главном научном центре эллинистической эпохи.

Будучи блестящим математиком, Архимед был также выдающимся механиком-практиком .

Сведения о жизни Архимеда дошли благодаря авторам, жившим значительно позднее. Поэтому их достоверность обычно ставится под сомнение.

Трактаты Архимеда, относящиеся к механике (дошедшие до нашего времени)

- «О равновесии плоских фигур» (статика)
- «О плавающих телах» (гидростатика)
- «Послание к Эратосфену о механическом методе» или «Эфод».

Отрывки механических произведений Архимеда сохранились в «Механике» Герона Александрийского (I в. н.э) «Математическом собрании» Паппа Александрийского (III в. н.э.)(8-ая книга).

Архимед «О равновесии плоских фигур или о центрах тяжести плоских фигур»

«Трактат «О равновесии плоских фигур» занимает особое место в творчестве Архимеда.

Если в его математических трудах все построения базируются на фундаменте, заложенном задолго до их написания, в этом трактате он занимается изучением самих оснований выстраиваемой теории.

Кроме того, он покидает сферу чистой математики, чтобы перейти к исследованию вопросов естествознания, которые трактует с точки зрения математики.

Архимед формулирует постулаты, на основе которых строит теорию равновесия; он тем самым становится первым, кто устанавливает тесную связь между математикой и механикой.

Это достижение Архимеда имело далеко идущие последствия как для физики, так и для математики».

E.J. Dijksterhuis, “Archimedes” (1956, p. 286)

Архимед , «О равновесии плоских фигур или о центрах тяжести плоских фигур»

Трактат состоит из двух книг.

Кн. 1 посвящена нахождению центра тяжести плоских фигур (параллелограмма, треугольника, трапеции).

Кн. 2 посвящена определению центра тяжести параболического сегмента.

Трактат предполагает знакомство с понятием центра тяжести (в нем самом определение центра тяжести отсутствует). Отрывки их «Механики» Герона и «Математического собрания» Паппа позволяют его реконструировать:

Центром тяжести тела называется расположенная внутри него точка, обладающая тем свойством, что если за нее мысленно подвесить тяжелое тело, то оно останется в покое и сохраняет первоначальное положение.

Подробнее о понятии центра тяжести по Архимеду, о доказательстве его существования и единственности, а также доступное изложение способа нахождения центра тяжести параболического сегмента см. И.Н. Веселовский «Очерки по истории теоретической механики» (М., 1974, с. 27-29).

Архимед «О равновесии плоских фигур»

Допущения (постулаты), из которых выводятся законы равновесия, включая закон рычага.

«1. Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются, на неравных же длинах не уравновешиваются, но перевешивают тяжести на большей длине.

2. Если при равновесии тяжестей на каких-нибудь длинах к одной из тяжестей будет что-нибудь прибавлено, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, к которой было прибавлено.

3. Точно так же если от одной из тяжестей будет отнято что-нибудь, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, от которой не было отнято».

Постулаты статики Архимеда (продолжение)

«4. При совмещении друг с другом равных и подобных плоских фигур совместятся друг с другом и их центры тяжести.

5. У неравных же, но подобных фигур центры тяжести будут подобно же расположены.

Под подобным расположением точек в подобных фигурах мы подразумеваем такое, в котором прямые, проведенные из этих точек к вершинам равных углов, образуют равные углы с соответственными сторонами.

6. Если величины уравновешиваются на каких-нибудь длинах, то на тех же самых длинах будут уравновешиваться и равные им.

7. Во всякой фигуре, периметр которой везде выпукл в одну и ту же сторону, центр тяжести должен находиться внутри фигуры».

Архимед «О равновесии плоских фигур»

Закон рычага - ключевой результат, лежащий в основе статики

Предложение 6.

«Соизмеримые величины (А и В) уравновешиваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям».

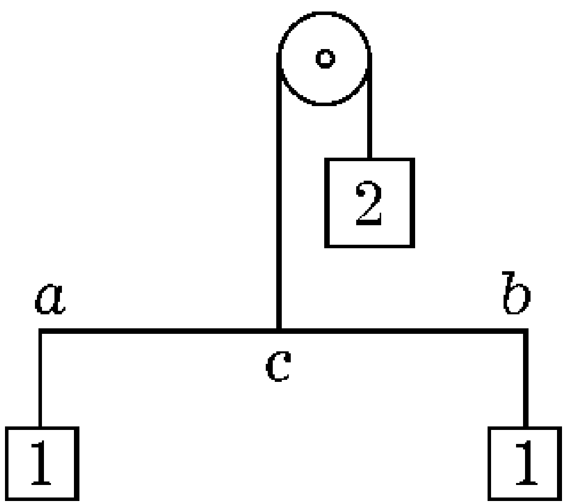
Идея доказательства для случая A : B = 2 : 1

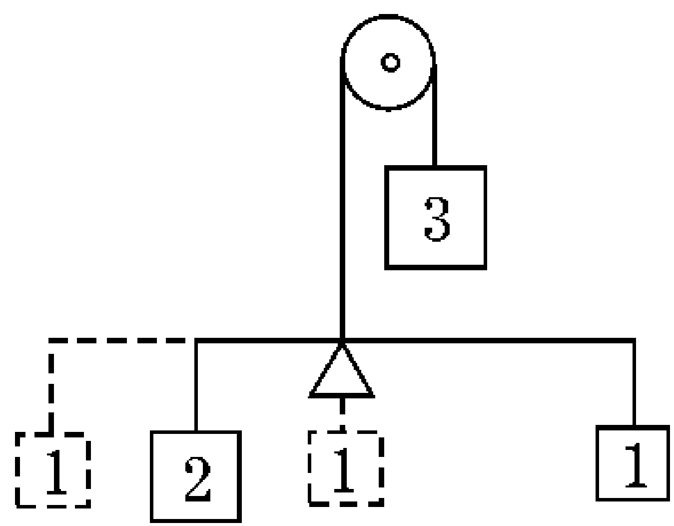
Э. Мах, «Механика. Историко-критический опыт ее развития» (1883)

Постулат 1. Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются …

Пусть A : B = 2 : 1. Разделим плечо от A=2 до B=1 на 3 равные части.

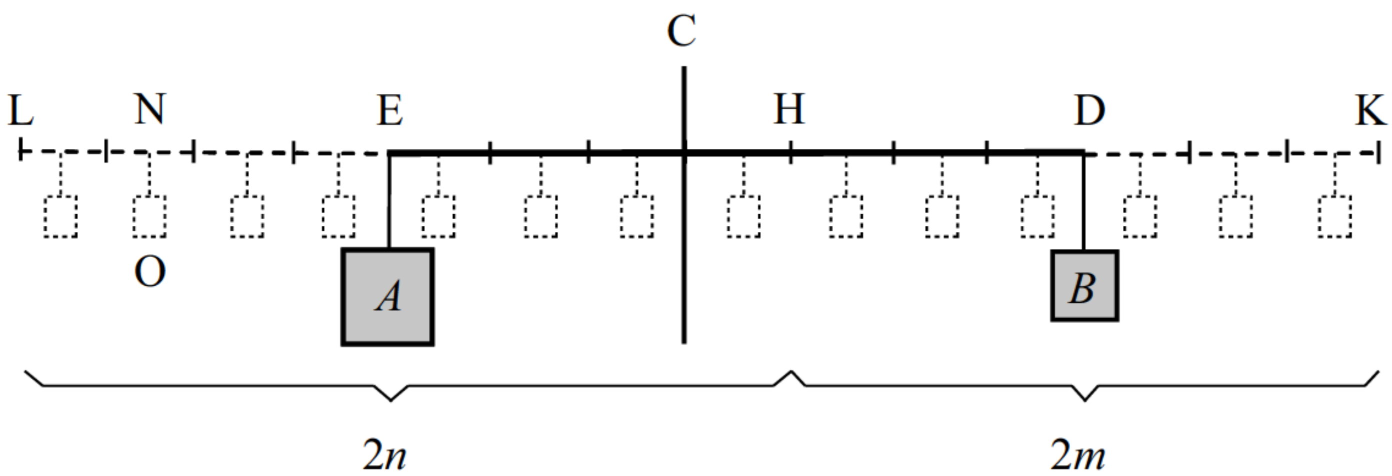
Покажем, что точка опоры (подвеса) делит плечо в отношении 1: 2.





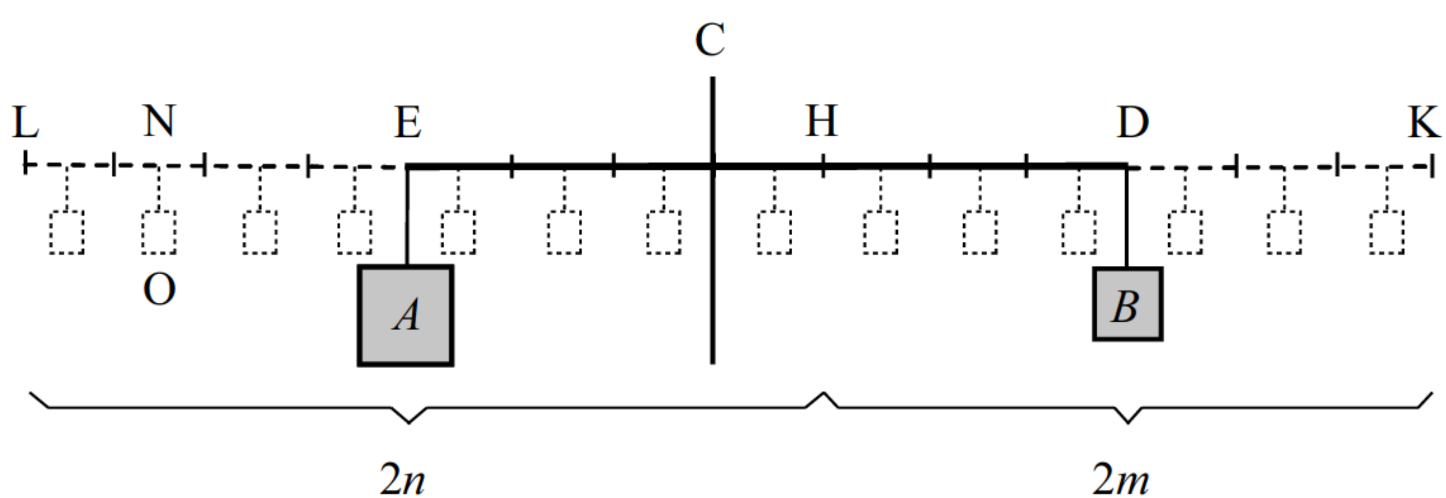
Идея доказательства для случая $A : B = 4 : 3$ (реконструкция Э. Маха).

- Дано: плечо ED, на концах которого подвешены грузы $A = 4$ и $B = 3$.
- Разделим плечо ED на 7 равных отрезков (назовем их «единичными»).
- Рассмотрим точку C, отстоящую от точки подвеса *A* на 3 «единичных» отрезка.
- Покажем, что точка C является центром тяжести системы грузов *A* и *B*.



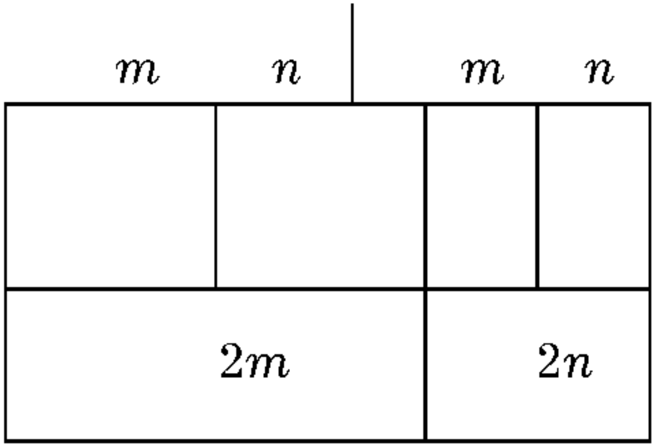
<u>Доказательство</u> (продолжение).

Увеличим плечо ED слева от груза *A* на 4 единичных отрезка (LE), а справа от *B* – на три (DK). Получим плечо LK, длина которого равна 14 «единичным» отрезкам. Разделим груз *A* на 8 равных частей, а *B* – на 6; обозначим их через О. Распределим все 14 весовых частей О равномерно по длине плеча LK, подвесив в центрах «единичных» отрезков). Из соображений симметрии следует, что центр тяжести системы будет находиться в середине плеча LK – в точке, совпадающей с точкой C (Архимед строго доказывает этот факт, опираясь на постулаты и вспомогательные предложения). Объединив 8 весовых частей О в эквивалентный груз *A*, и 6 – в груз *B*, приходим к выводу о том, что равновесие наступит, если опора находится точке C.

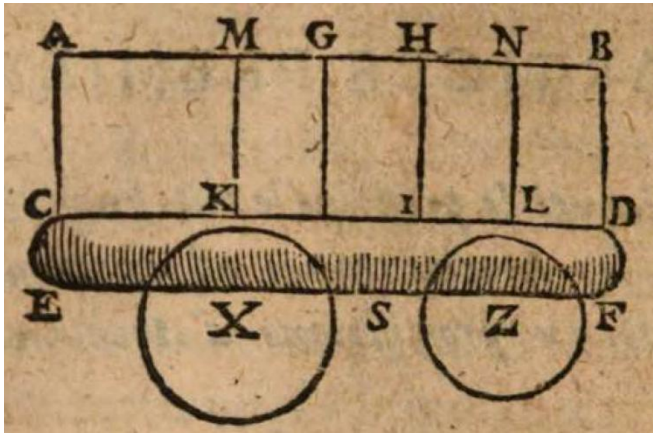


Закон рычага. Доказательство (Стевин, 1586; Галилей, ок. 1593)

Однородный тяжелый цилиндр (или балка) CDFE подвешен к концам стержня AB такой же длины. Стержень повешен в середине G, и система находится в равновесии. Пусть длина цилиндра равна 2(m + n). Разрежем цилиндр вдоль линии HI так, что длина его левой части будет равна $2m$, а правой – $2n$. Если прикрепить концы обеих частей цилиндра у самого разреза HI нитями к стержню, то равновесие не нарушится.



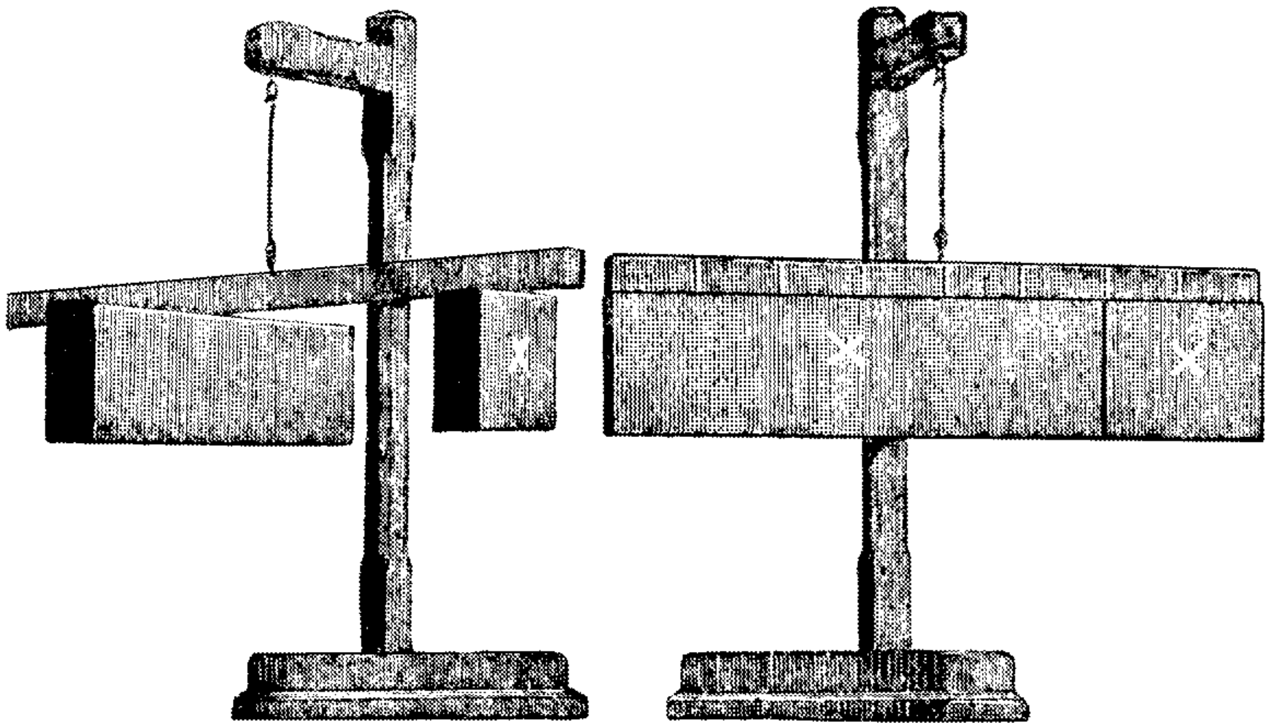
Подвесим оба цилиндра за середины K и L нитями к стержню, после чего удалим остальные нити. Так как длина цилиндра равна 2(m + n), то каждая его половина равна $m + n$. Расстояние GN точки подвеса правого цилиндра от точки G равно m, а левого GM – n.



Заменим цилиндры на произвольные тела X и Z, имеющие те же веса ($2m$ и $2n$), и подвесим их к стержню в тех же точках K и L. Равновесие не нарушится.

Эти точки отстоят от G на расстоянии n и m, соответственно. Закон рычага доказан.

И еще один вариант доказательства (Гюйгенс, 1693)



Равновесие не нарушится, если обе отрезанные части балки повернуть вокруг осей на любые углы. Действие груза, приложенного в данной точке, определяется только его величиной и не зависит от формы или ориентации этого груза.

Самый простой вариант того же доказательства (Лагранж, 1788)

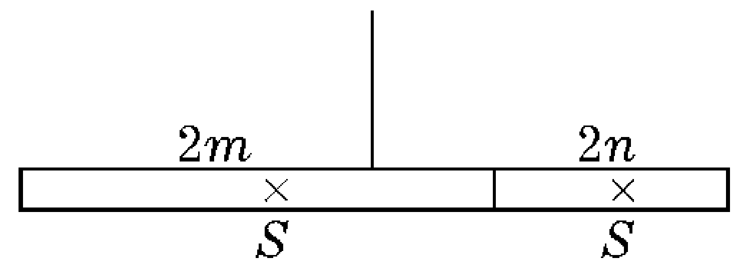
Рассмотрим однородную горизонтальную призму, подвешенную посредине. Пусть эта призма разделена на две части, длиной *2m* и *2n.* Система будет находиться в равновесии.

Обозначим через *S* центры тяжестей этих частей. Точки *S* находятся на расстояниях *n* и *m* от точки подвеса.

Если подвесить к точкам *S* грузы, пропорциональные 2*m* и 2*n*, то система останется в равновесии. Правило рычага доказано.

«Такой краткий вывод возможен только для ума, привычного к математическому воззрению».

Э. Мах, «Механика. Историко-критический опыт ее развития» (1883)



Вопрос: существует ли связь теории Архимеда с античной практикой взвешивания на неравноплечных весах?

- Условие: необходимым условием выполнения закона рычага является невесомость плеч.

- У всех античных весов плечи явно весомые. Можно обойти эту трудность, учтя веса плеч слева и справа от точки подвеса (в предположении об их однородности) и локализовав их в центрах тяжести плеч.

- Однако, такой подход годится только для определенного типа весов – для римского безмена.

- Во времена Архимеда наиболее распространенным был другой тип весов – «датский» безмен (bismar). Римский безмен стал использоваться позднее.

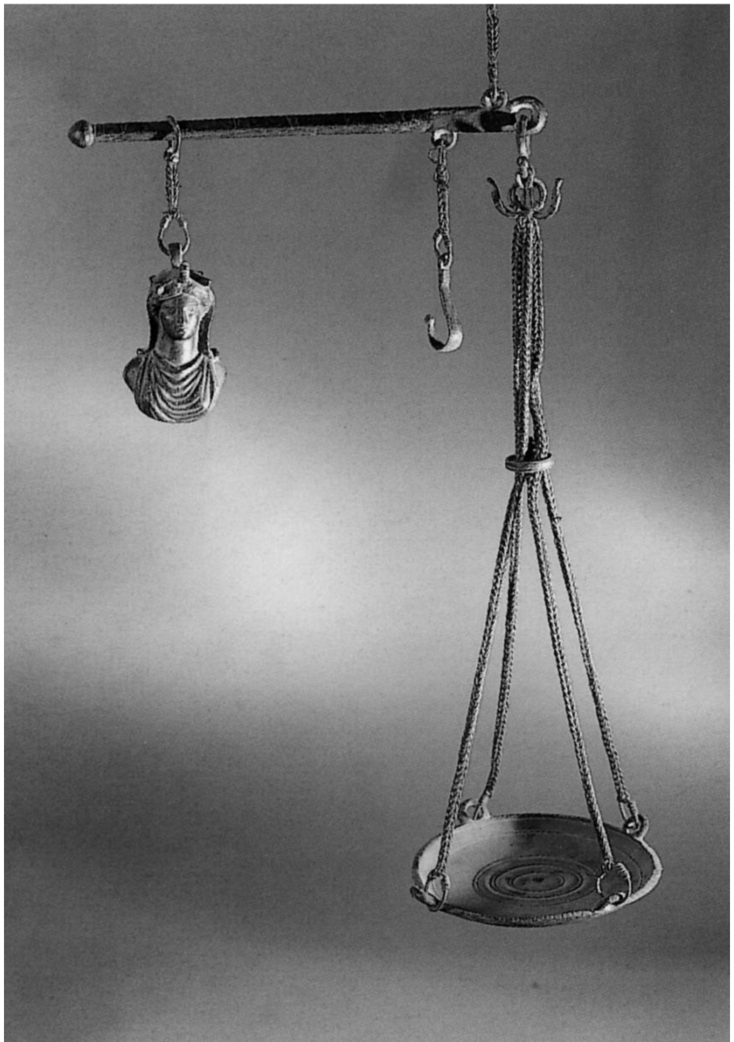
Неравноплечные весы Античности

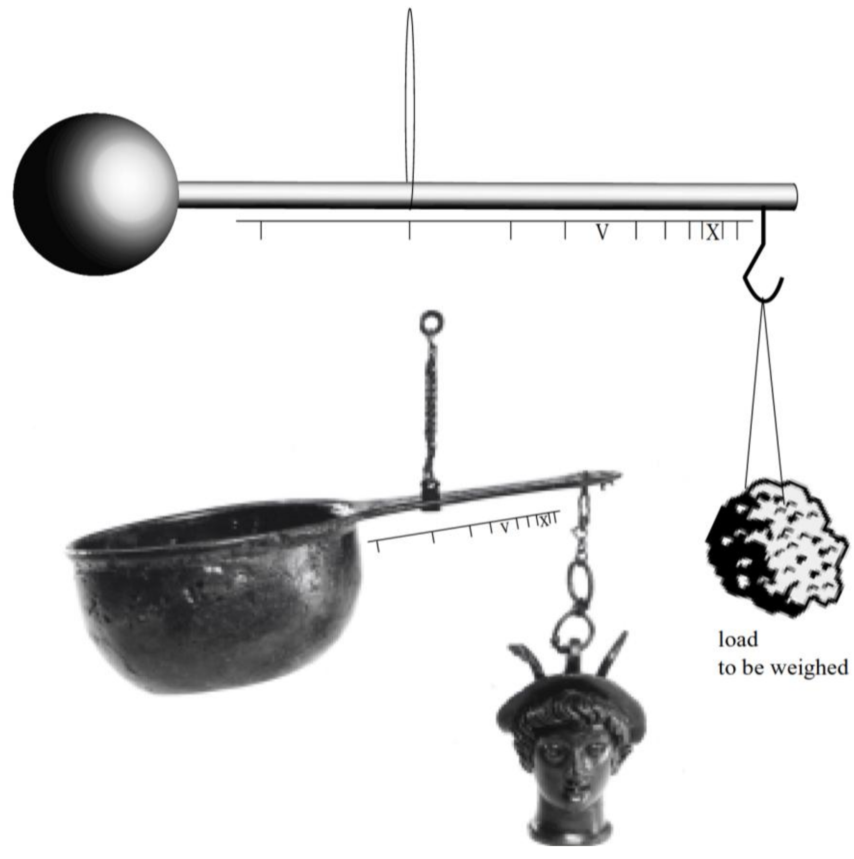
Римский безмен

Точка подвеса фиксированная
Подвижная гиря постоянного веса
Линейная шкала

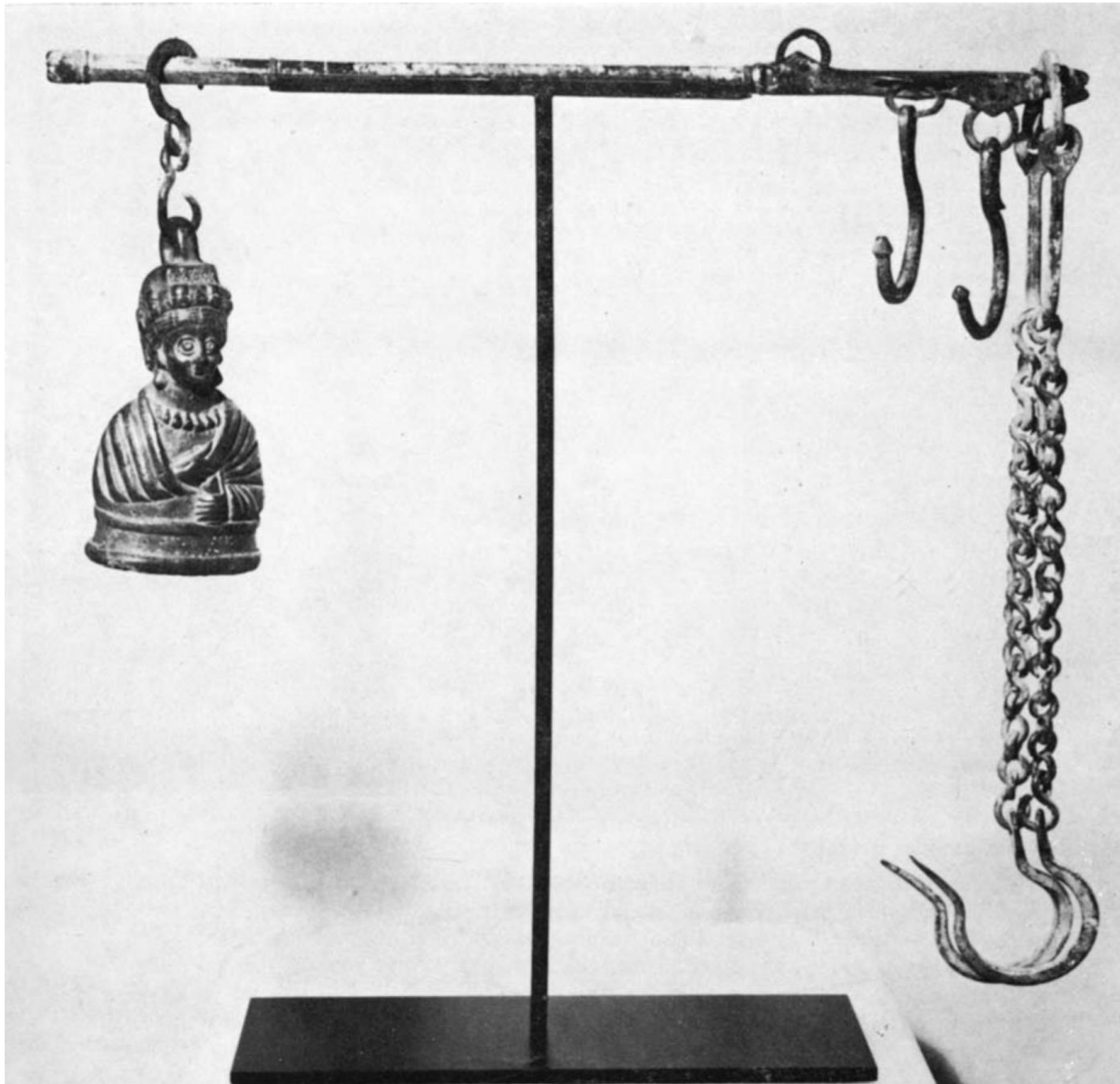
Датский безмен (bismar).

Точка подвеса подвижная
Гиря постоянного веса зафиксирована

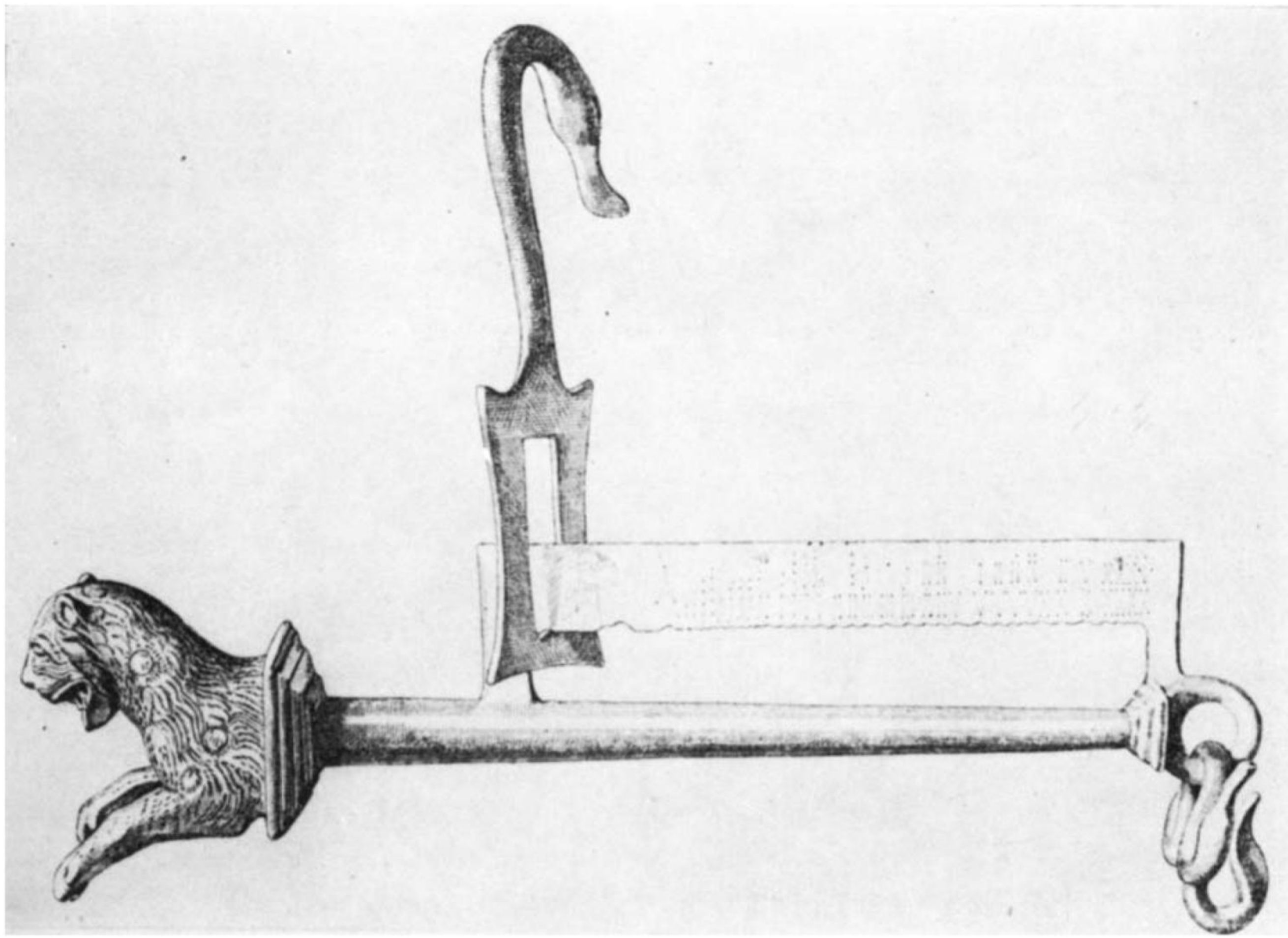




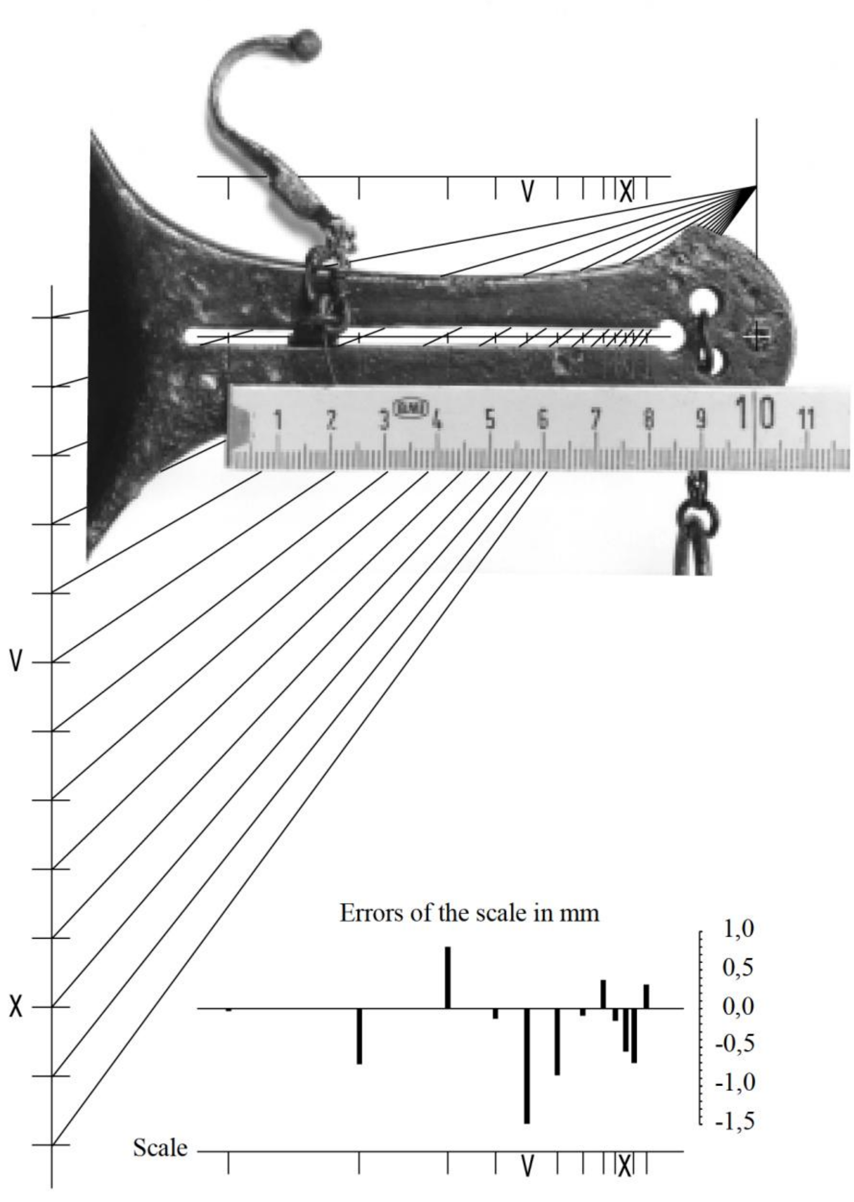
Римский безмен (несколько линейных шкал)



Датский безмен (bismar)



Датский безмен (bismar).
Сложная нелинейная шкала градуировки



Задание для самостоятельной работы

1. Найти геометрический способ градуировки датского безмена.
2. Оценить аналитически изменение расстояния между рисками

Архимед «О равновесии плоских фигур». Продолжение.
Центр тяжести треугольника

Предложение 13.

У всякого треугольника центр тяжести будет на прямой, которая проведена из угла к середине основания.

Предложение 14.

У всякого треугольника центром тяжести будет точка, в которой встречаются прямые, проведенные из углов к серединам сторон.

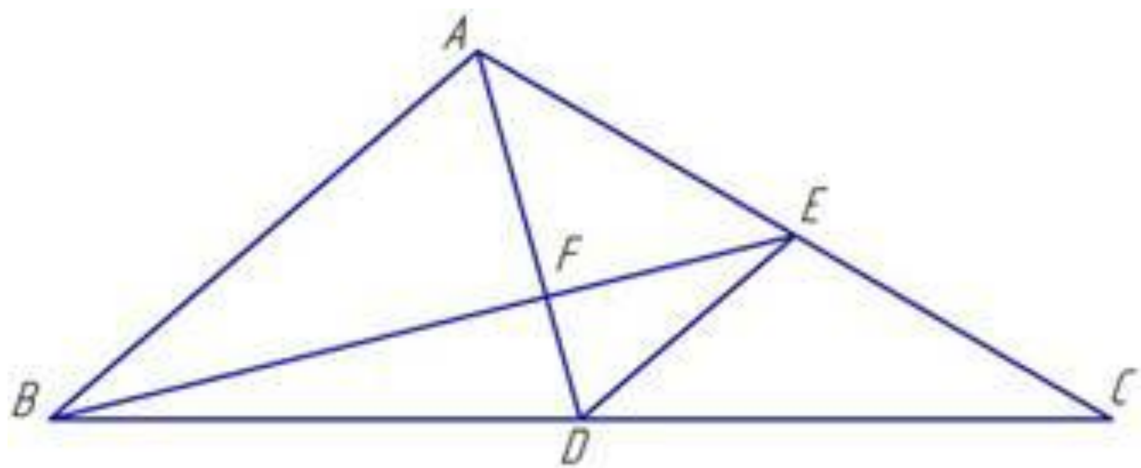
Центр тяжести треугольника

Доказательство

Пусть дан треугольник *ABC* . Разделим линию *BC* пополам в точке *D* и соединим *A* и *D*. Если опереть треугольник на линию *AD*, он не будет иметь момента ни в ту, ни в другую сторону, так как треугольники *ABD* и *ADC* равны.

Точно так же если разделить линию *AC* в точке *E* и соединить точки *B* и *E*, то, если опереть треугольник на линию *BE*, он также не наклонится ни в ту, ни в другую сторону.

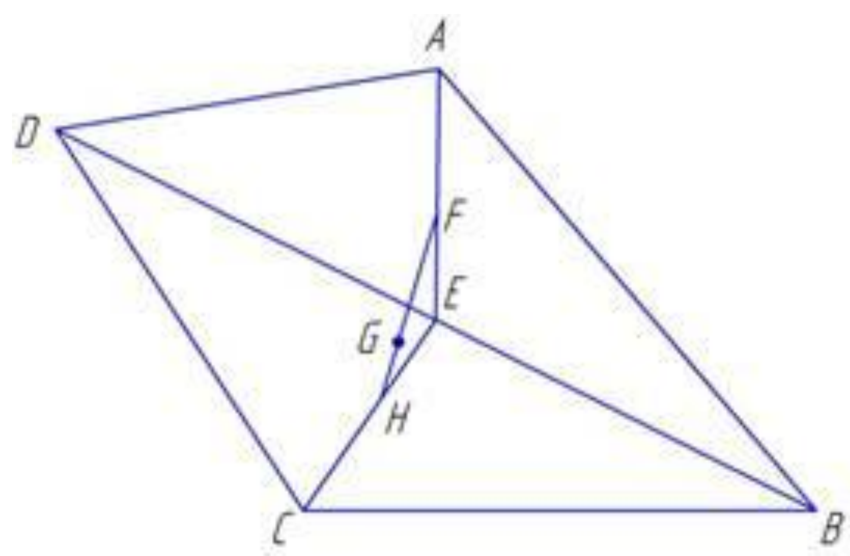
Так как треугольник, будучи оперт на каждую из линий *AD* и *BE*, находится в равновесии своих частей и не наклоняется ни в ту, ни в другую сторону, то общая точка *F*, в которой эти две линии пересекаются, является центром тяжести.



Центр тяжести четырехугольника (И.Н. Веселовский)

Пусть дан четырехугольник *ABCD*. Соединим точки *B* и *D* и разделим *BD* пополам в точке *E*; соединим также *A* и *E*, *E* и *C* и разделим линии *AE* и *EC* в точках *F* и *H* таким образом, чтобы *AE* была равна удвоенной величине *FE*, а *CH* – удвоенной *HE*. Тогда центр тяжести треугольника *ABD* – точка *F*, а центр треугольника *BDC* – точка *H*.

Представим треугольник *ABD* сосредоточенным в точке *F*, а треугольник *BCD* – в точке *H*. Тогда линия *FH* становится коромыслом, на концах которого находятся эти величины. Поэтому если разделить линию *FH* в точке *G* таким образом, чтобы *GH* относилось к *FG* как вес *F*, т. е. вес треугольника *ABD* к весу *H* – к весу треугольника *BDC*, то точка *G*, в которой оба веса уравновешиваются, является центром тяжести этого четырехугольника.



Дополнительный материал

Геометрический и механический способ
определения площадей криволинейных фигур и объемов
Архимед

Геометрический метод определения площадей и объемов. Метод исчерпывания.
Использование доказательства от противного
Пример: площадь сегмента параболы

РИС. 10

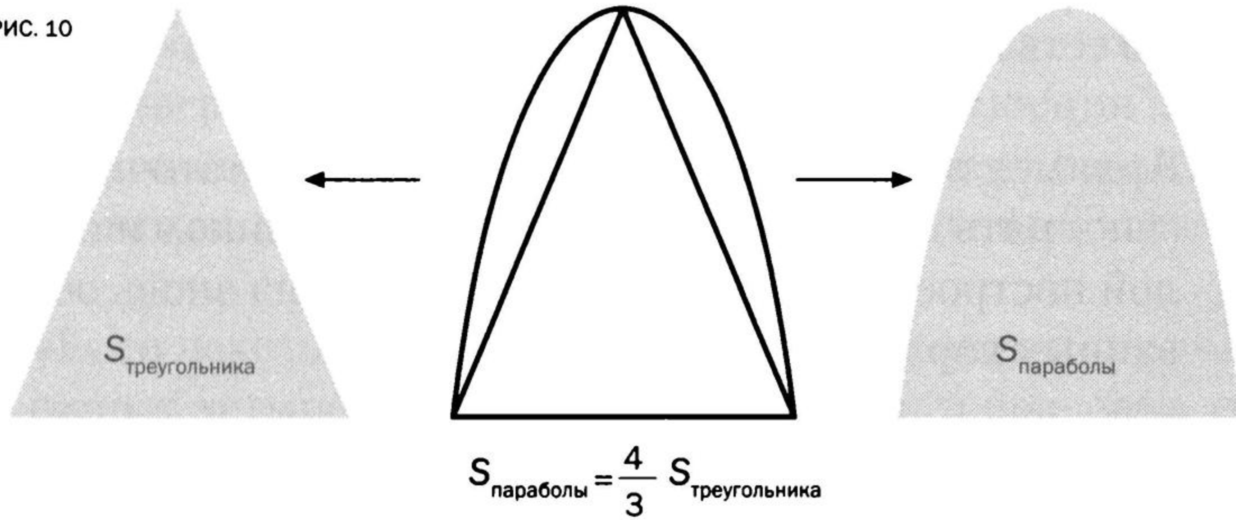
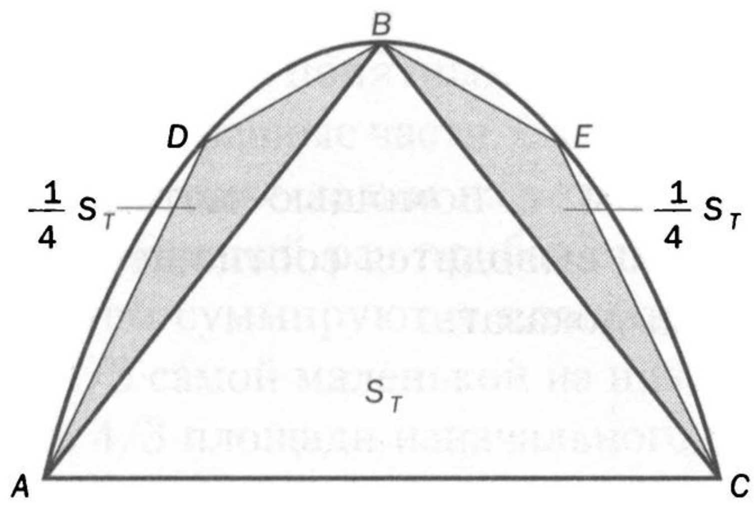


РИС. 11

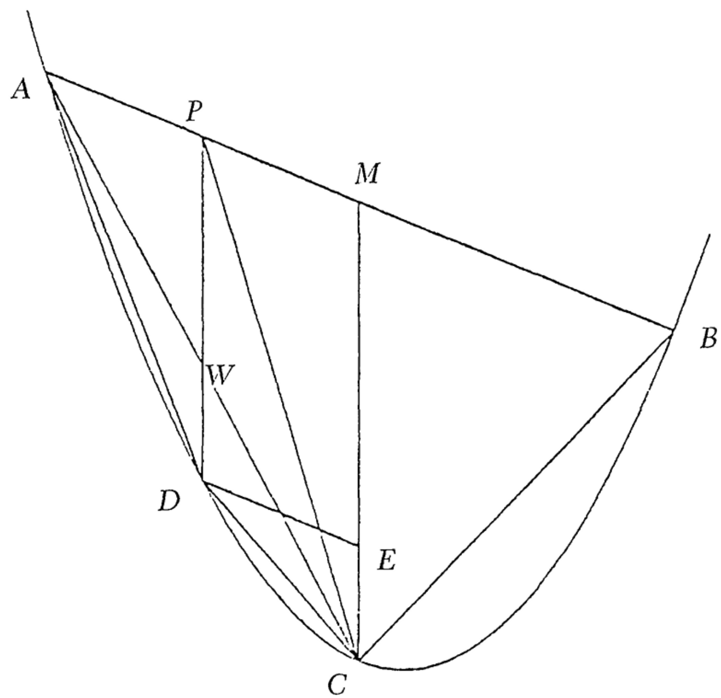


<u>Задания для самостоятельной работы</u>

(1a) Доказать, что площадь каждого из заштрихованных треугольников (на предыдущем слайде) равна ¼ S_T.

(1b) M – середина отрезка AB, стягивающего сегмент параболы; P – середина отрезка AM. Через точку P проведена прямая PD, параллельная MC (MC – диаметр параболы), до пересечения с параболой. Доказать, что площадь ΔADC = ¼ площади ΔABC.

(2) Составить ряд из величин площадей треугольников, «исчерпывающих» сегмент параболы, и найти сумму этого ряда.



Механический метод нахождения площадей и объемов

Архимед. «Послание к Эратосфену о механическом методе»

(«Эфод»).

В отличие от метода исчерпывания, в котором используется косвенное доказательство правильности результата, механический метод дает напрямую способ нахождения этого результата.

«Эфод» Архимеда – единственное произведение античной математики, в котором описан метод открытия неизвестных математических результатов. И этот метод – механический. Он опирается на разбиение фигур на весомые линии.

Рукопись «Эфода» была обнаружена случайно в 1906 г.

Палимпсест, содержащий рукопись «Эфода»

https://www.archimedespalimpsest.org

«Послание к Эратосфену о механическом методе»

Архимед о механическом методе:

«В этой книге я посылаю тебе запись доказательства двух теорем. Зная, что ты являешься … ученым человеком и по праву занимаешь выдающееся место в философии, … я счел нужным … изложить некоторый особый метод, при помощи которого ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы.

Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем.

Действительно, кое-что из того, что ранее было мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение при помощи этого метода еще не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторое предварительное представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство, гораздо удобнее, чем производить изыскания ничего не зная».

Вычисление площади сегмента параболы (основная идея)

Предложение 1

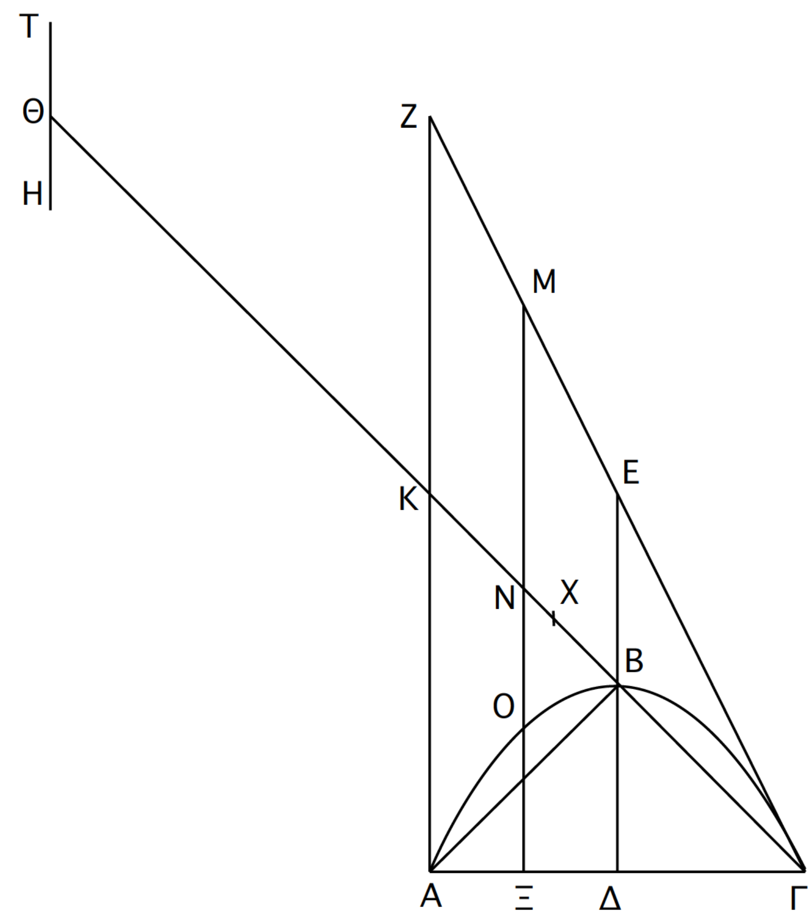
Пусть АВГ будет сегмент, заключающийся между прямой АГ и параболой АВГ; разделим АГ пополам в Δ, параллельно диаметру проведем ΔВЕ и соединяющие прямые АВ и ВГ

Я утверждаю, что сегмент АВГ составляет четыре трети треугольника АВГ.

Метод доказательства

Из точек А и Г проведем АZ, параллельную ΔВЕ, и ГZ, касательную к параболе; продолжим ГВ до К и отложим КΘ, равную ГК.

Вообразим равноплечий рычаг ГΘ с серединой К и какую-нибудь прямую МΞ, параллельную ЕΔ.

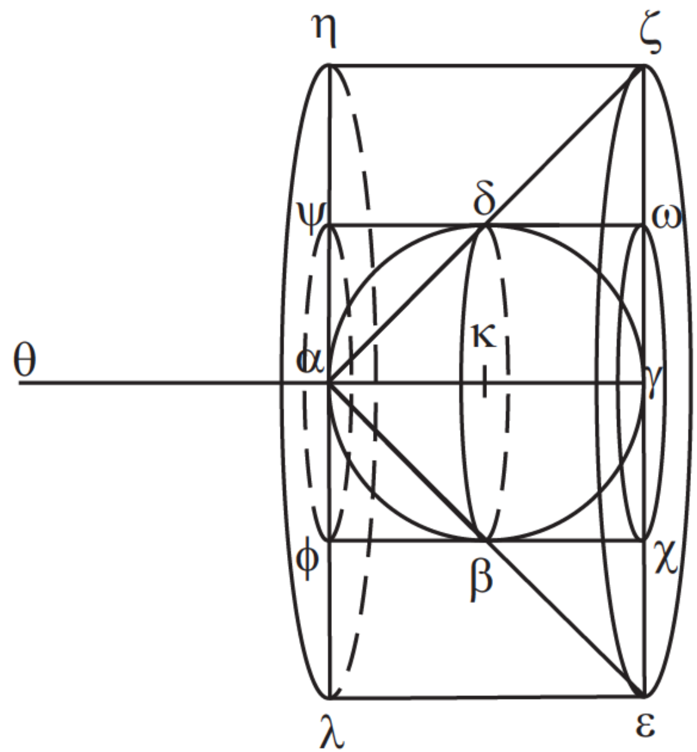


Предложение 2. Соотношение между объемами конуса, шара и цилиндра

При помощи механического метода можно получить следующие результаты

- всякий шар будет в четыре раза больше конуса с основанием, равным большому кругу шара, и с высотой, равной радиусу шара, а также, что

- всякий, цилиндр с основанием, равным большому кругу шара, и высотой, равной диаметру шара, будет в полтора раза больше шара/ шара равно 3/2. Соотношение площадей поверхности цилиндра и вписанного в него шара также равно 3/2.

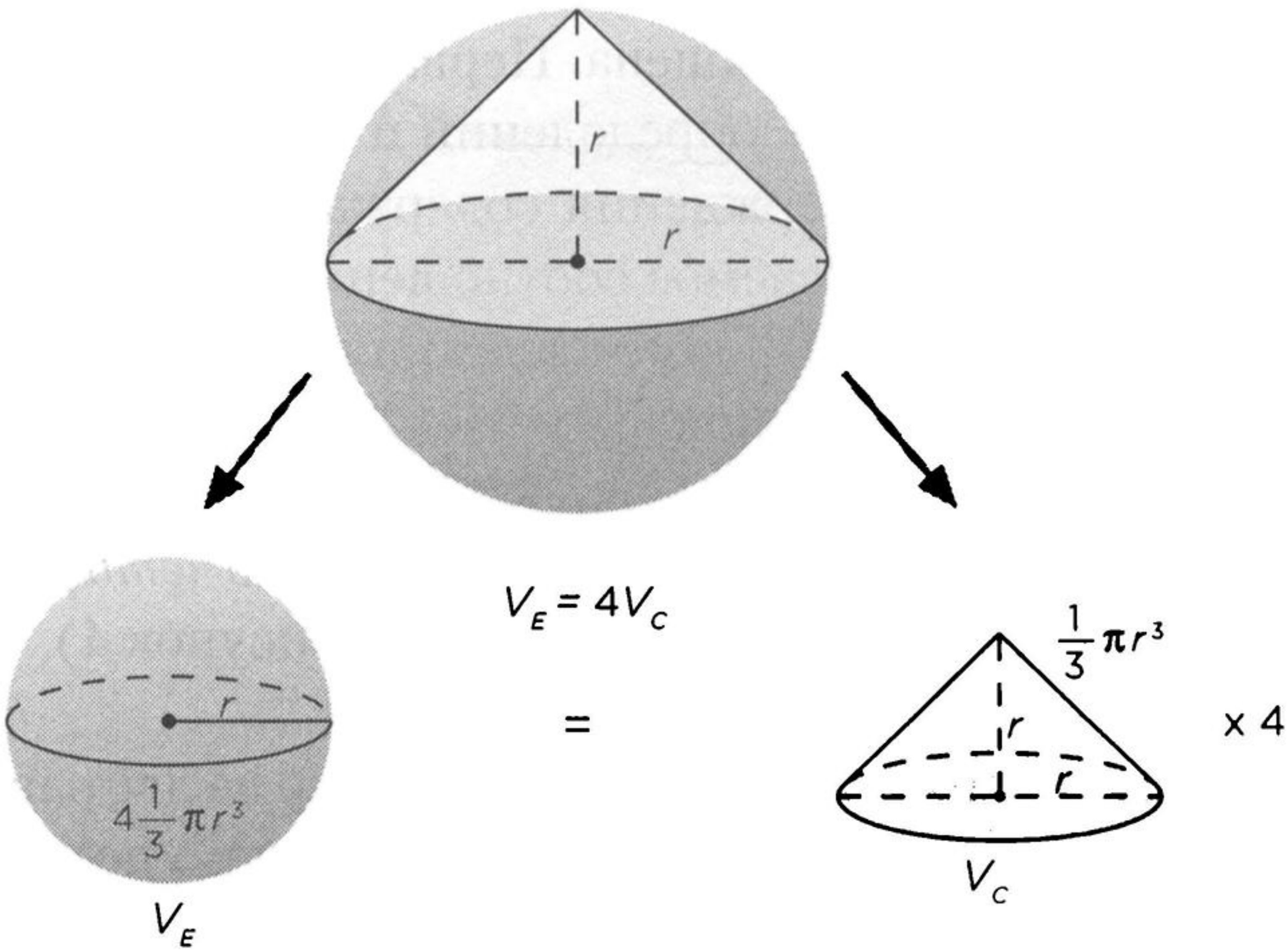


$$V_E = 4V_C$$

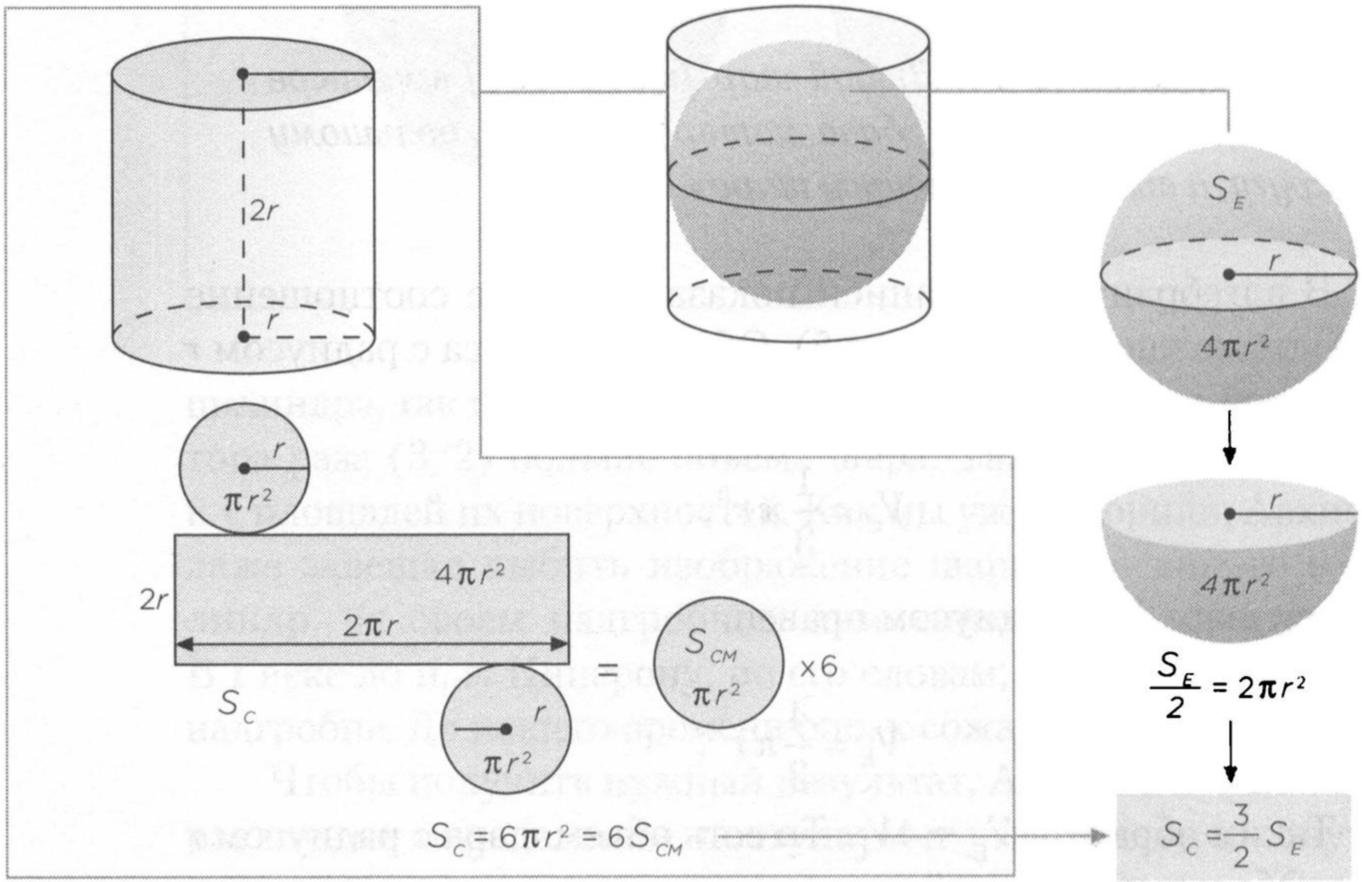
$$V_{\text{цилиндра}} = \frac{3}{2} V_{\text{шара}}$$

$$S_{\text{цилиндра}} = \frac{3}{2} S_{\text{шара}}$$

$$V_E = 4V_C$$



$$S_{\text{цилиндра}} = \frac{3}{2} S_{\text{шара}}$$



Постулат «плоской Земли»

В трактате Архимеда «О равновесии плоских фигур» доказательства основываются на постулате «плоской Земли».

Модель «плоской Земли»

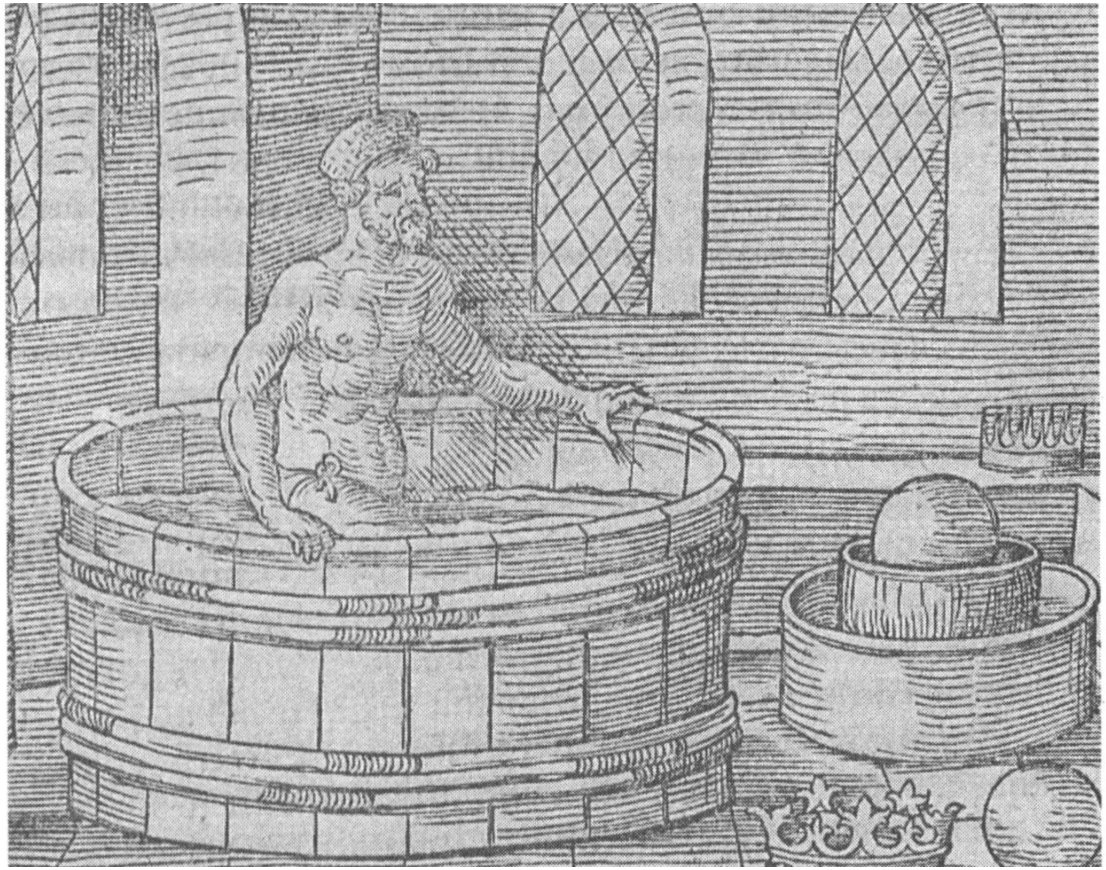
Линии действия силы тяжести параллельны между собой и перпендикулярны поверхности (плоской) Земли.

Модель «сферической Земли»

В трактате Архимеда «О плавающих телах», напротив, используется модель «сферической Земли».

Часть 2

Гидростатика Архимеда.
Проблемы геостатики



Эврика! Архимед (287 – 212 до н.э.)
Петер Флетнер (1490-1546). Архимед в ванне.

Гравюра из первого перевода на немецкий Витрувия «Десять книг об архитектуре»

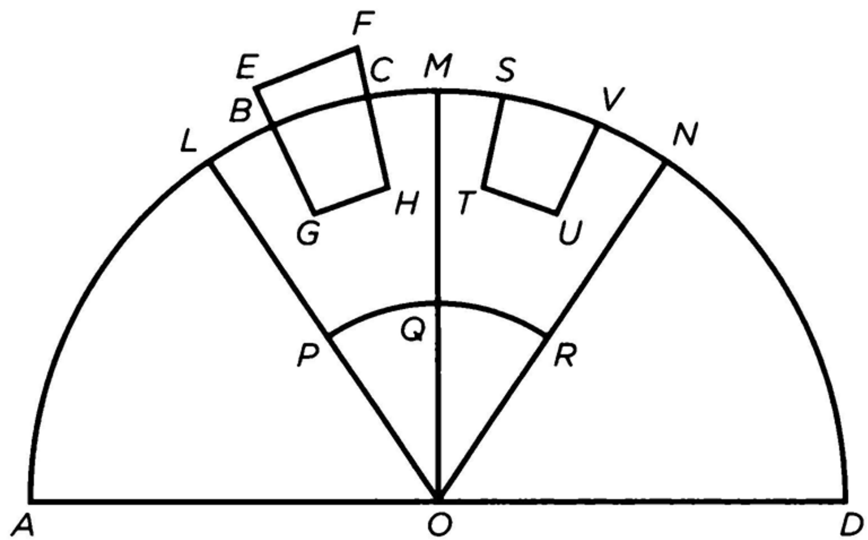
Опубликован Иоганном Петреусом в Нюрнберге в 1548 г.

Справа корона царя Гиерона

Архимед «О телах, плавающих в воде» (в двух книгах)

Кн. I. Предложение 5 (закон гидростатики Архимеда)

«Тело, более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, погружается настолько. чтобы объем жидкости, соответствующий погруженной {части тела}, имел вес, равный весу всего тела».



Если в трактате «О равновесии плоских фигур» доказательства основываются на постулате «плоской Земли», то здесь существенным образом используется сферичность Земли.

«Геостатика». Основные задачи.

1. Равновесии тел (весов), размеры которых сравнимы с размерами Земли

2. Задача о равновесии тяжелых тел в центре Земли

Закон рычага и условия его выполнения

Условия корректности доказательства закона рычага по Архимеду:

1. Условие однородности: сила тяжести, приложенная к телам и их частям, прямо пропорциональна их объему.

2. Условие постоянства направления приложения силы тяжести: линии действия силы тяжести параллельно направлены. Гипотеза «плоской Земли».

Эти условия обеспечивают также корректность определения **центра тяжести** тела или системы тел.

Земля, однако, имеет сферическую форму.

Отсюда проблемы геостатики, занимавшие механиков сл времен Античности до сер. XVII в.

Можно ли построить геостатику аналогично обычной статике?

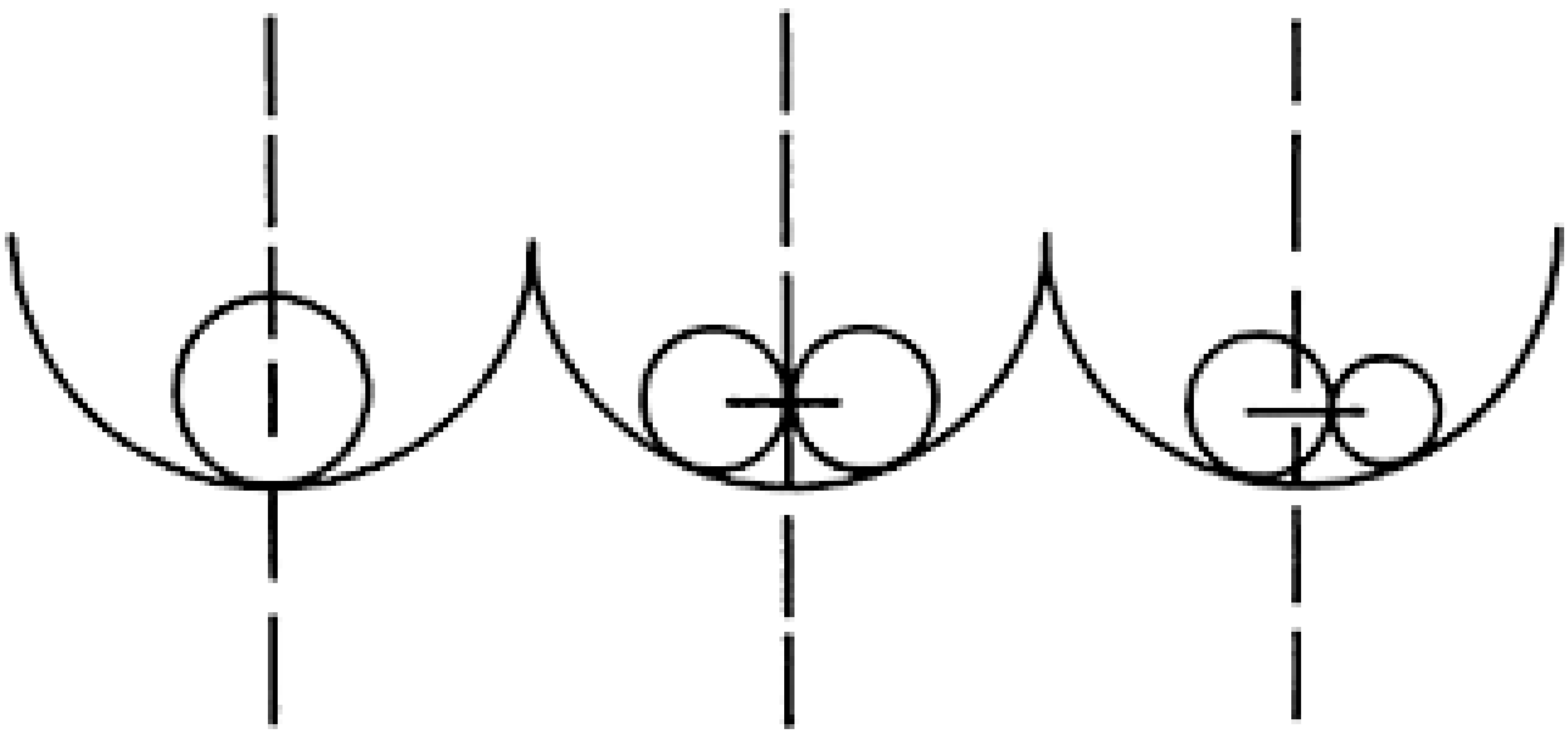
Первый пример геостатического равновесия
О равновесии гвоздя в центре Земли
Марсилий Ингенский (XIV в.), Комментарий к «Физике» Аристотеля

«Представим себе, например, что гвоздь находится в равновесии в центре Земли. [В этом случае] лишь малый отрезок гвоздя – та часть, которая находится вблизи шляпки – будет расположен с одной стороны от центра [Земли], ибо шляпка гораздо тяжелее, чем остальная часть гвоздя.»

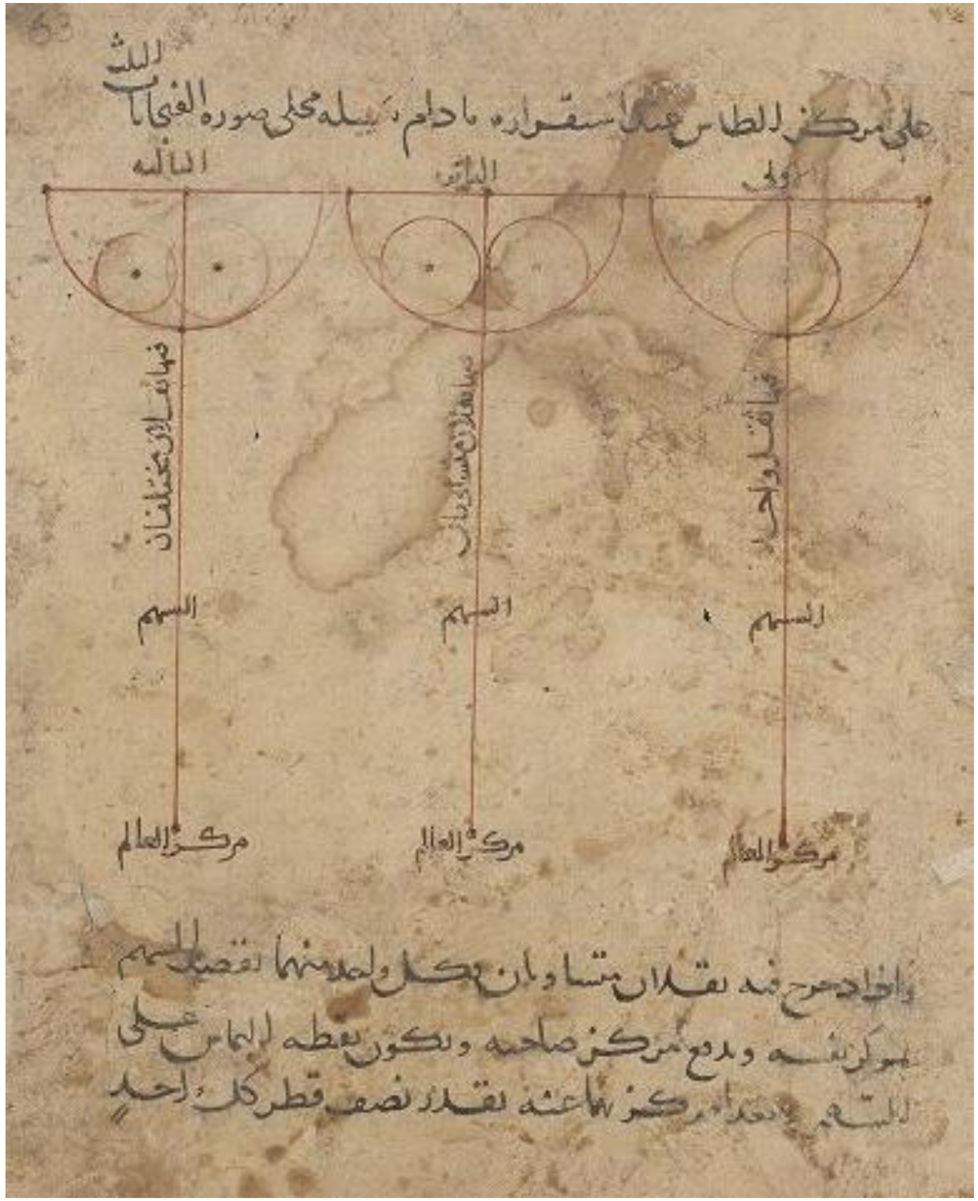
Questiones in libros physicorum (lib. IV, q. 5)

Если тело несимметрично (либо по геометрической форме, либо вследствие неравномерного распределения тяжести), то его центр тяжести, при совпадении с центром мира, будет смещен в сторону большей тяжести.

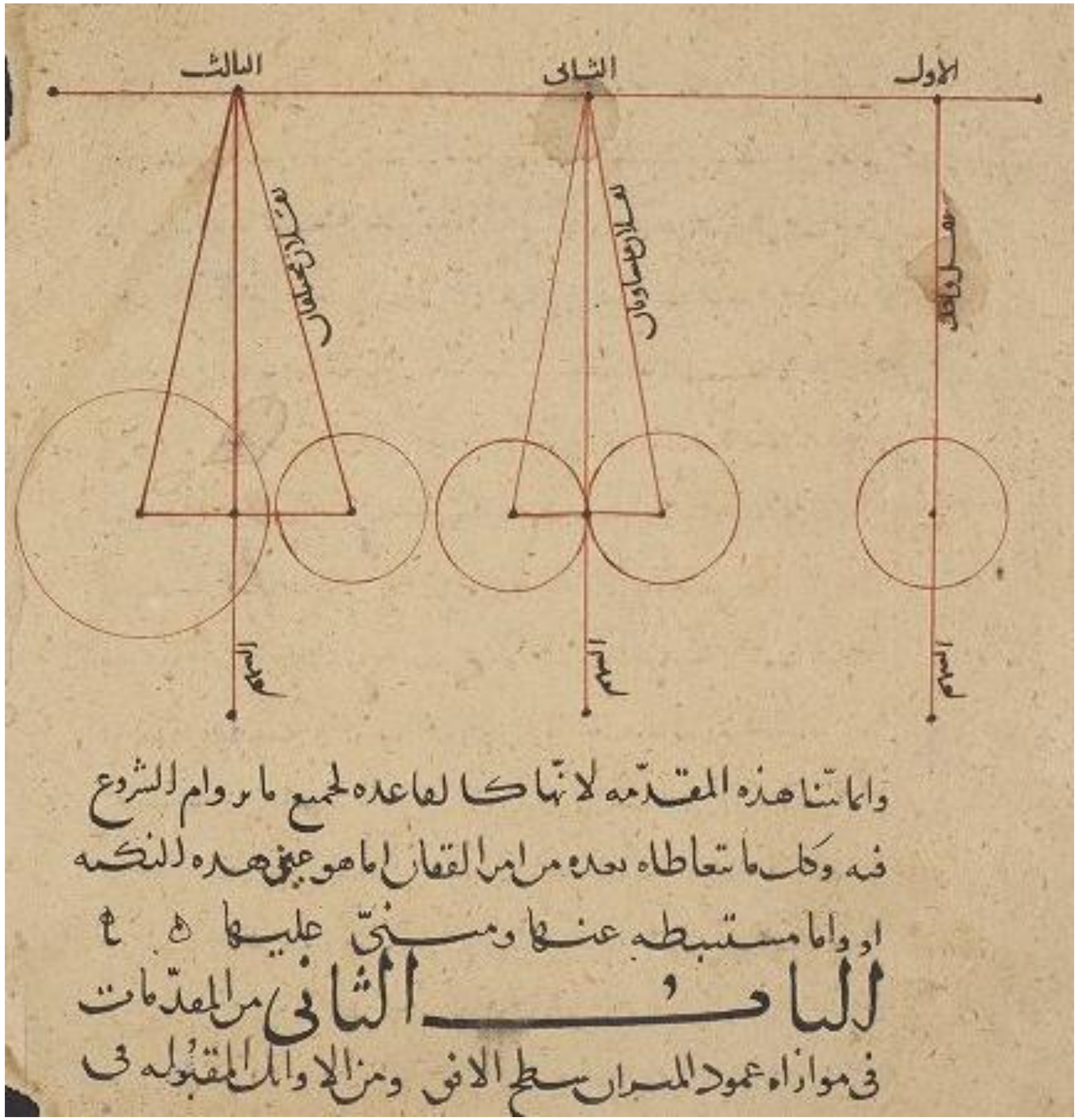
Модель геостатического равновесия (сферы внутри сферы).
Ал-Хазини «Книга весов мудрости» (XII в.)



Ал-Хазини, «Книга весов мудрости» (XII в.).



Другая модель геостатического равновесия (сферы на нитях)
Ал-Хазини, «Книга весов мудрости» (XII в.).



Задание для самостоятельной работы

1. Решить задачу Ал-Хазини для первой модели. Заданы радиусы сферической чаши и обоих шаров. Найти смещение центров тяжестей шаров, углы отклонения от вертикали.

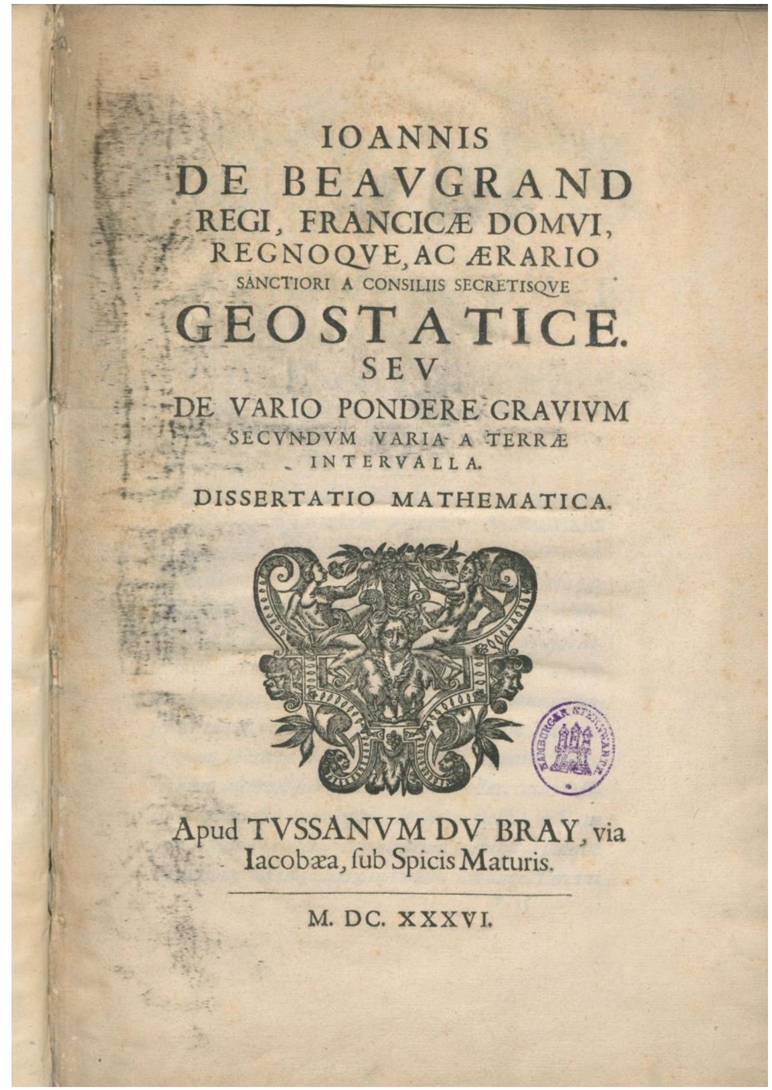
2. Та же задача для второй модели. Сравнить полученные результаты.

<u>Геостатика в 30-х гг. XVII в.</u>
Попытки применения закона рычага для количественных оценок смещения центра тяжести

Ж. де Богран

«Геостатика
или о различии весов тяжелых тел в зависимости от расстояния до Земли»

Париж, 1636


IOANNIS
DE BEAVGRAND
REGI, FRANCICÆ DOMVI,
REGNOQVE, AC ÆRARIO
SANCTIORI A CONSILIIS SECRETISQVE
GEOSTATICE.
SEV
DE VARIO PONDERE GRAVIVM
SECVNDVM VARIA A TERRÆ
INTERVALLA.
DISSERTATIO MATHEMATICA.

Apud TVSSANVM DV BRAY, via
Iacobæa, ſub Spicis Maturis.

M. DC. XXXVI.

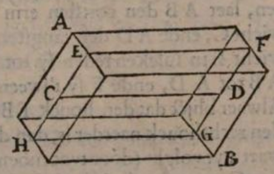
Симон Стевин, De Beghinselen der Weegh Const («Начала искусства взвешивания») Leiden, 1586 (лат. издание 1608; франц. 1634)

IIII. BEGHEERTE.

ENDE datmen by des pilaers beſchreuen plat t'welck hem door de langde des as deelt, verſtaen ſal den voorgheſtelden pilaer.

VERCLARING.

ALS weſende A B een pilaer diens as C D, ende de ſelue doorſneen met eenich plat als E F G H, datmen door t'beſcreuen plat E F G H, al de reſt achterghelaten, verſtaen ſal den ghegheuen pilaer.

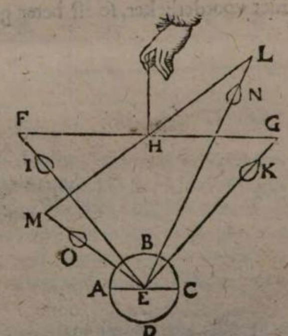


V. BEGHEERTE.

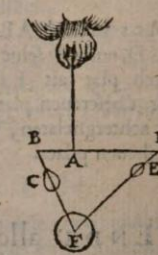
ENDE alle hanghende linien voor * evewydighe ghehouden te worden. *Parallelis.*

VERCLARING.

DE reden is deſe; Laet A B C D den eertſcloot ſijn, wiens middelpunt E, ende * ſichteinder A C, ende F G een balck, euewydich vanden ſichteinder A C, diens balcx even ermen H F, H G, ende euen ſwaerheden daer an I, K; alwaer het blyct, dat de hanghende linien F I, ende G K, gheen euewydighe en ſijn, maer onder naerder malcander dan bouen; Laet daer naer den balc F G ghekeert worden op t'vaſtpunt H, alſoo dat G comme daer nu L is, ende F daer M, ende K ſal commen daer nu N, ende I daer nu O is, ende den houck L M E is naerder den rechthouck dan M L E, waer duer O (als in het volghende 22ᵉ voorſtel blijcken ſal) naer de gheſtalt ſwaerder is dan N. Vyt deſen volght oock dat onder alle lichamelicke formen die inde natuer beſtaen, ſo en iſſer gheen ander, * wiſconſtelick ſprekende, dan den cloot, an wiens ſwaerheydts middelpunt het lichaem door ons ghedacht hanghende, alle gheſtalt houdt diemen hem gheeft; Ofte door t'welck alle plat, t'lichaem deelt in eve- *Horizon.* *Mathematice.*



in eueſtalrwichtighe deelen, maer om de oneindelicke verſcheyden gheſtalten, ſullender oneindelicke verſcheyden ſwaerheyts middelpunten in ſijn. Oock en ſoude (teghen t'volgende 1ᵉ voorſtel) de ſwaerſte ſwaerheyt niet ſulcken reden hebben tot de lichtſte, als den langſten erm tot den cortſten, maer d'eene ſoude naer de gheſtalt ſwaerder ſijn, om dat haer houck plomper ende den rechthouck naerder is dan des anders houck. Maer om t'ſelue by voorbeelt te verclaren, laet A B den cortſten erm ſijn, diens ghewicht C, ende A D den langſten erm, diens ghewicht E in ſulcken reden ſy tot tghewicht C, als A B tot A D, ende F ſy t'ſweerelts middelpunt; Alwaer blijct dat den houck F B A plomper ende den rechthouck naerder is, dan den houck A D F, waet uyt volght (door tvoornoemde 22ᵉ voorſtel) dat C naer de gheſtalt ſwaerder ſal ſijn dan E.



Alle deſe ongheuallen ſpruyten daer uyt, dat F E met G E in d'eerſte form, ofte B F met D F der tweede form, gheen evewydighe linien en ſijn: Maer ouermits dat verſchil in alle t'ghene de menſchen weghen, onbemerckelick is, want den balck ſoude al veel milen lanck moeten ſijn eer hem dat ſoude connen openbaren, ſoo begheeren wy datſe voor euewydighe ghehouden worden. Wel is waer dat wy die anſiende voor t'ghene ſy ſijn, volcommelick ſouden connen wercken na haerlieder ghedaente, maer want dat moeyelicker ſoude weſen, ende tot de ſaeck, dat is de WEEGDAET nochtans niet voorderlicker, ſo iſt beter ghelaten.

HET

Simon Stevin, De Beghinselen der Weegh Const (1586).

(De staticae elementis, «Начала искусства взвешивания»)

«Все эти несоответствия происходят из-за того, что *FB* и *FD* не являются параллельными (то же самое и для *FE* и *GE* в первой фигуре); однако, с точки зрения практики указанное различие столь мало, что можно с чистой совестью считать их параллельными, ибо, заметить столь малые различия в углах можно только, если длина балки *BD* составляет несколько лье; кроме того, столь мелочное и придирчивое выискивание ошибок не принесет никакой пользы для дела, т.е. для **практической** статики; и потому этим лучше не заниматься».

<u>Галилей, Беседы и математические доказательства (1638)</u>

День 4. Тема: О траектории горизонтально брошенного тела

«*Симпличио*. К этому затруднению я прибавлю и другие. Одно из них заключается в следующем: мы предположили, что горизонтальная плоскость, не имеющая ни наклона, ни подъема, представляет собой как бы прямую линию и что подобная линия во всех своих частях равноудалена от центра; это, однако, неправильно, ибо она идет от середины к концам, постоянно удаляясь от центра, и, следовательно, постоянно повышается. Отсюда как следствие вытекает, что движение не может быть постоянным, что равномерность его не сохраняется даже на коротком расстоянии и что оно постепенно замедляется.

Сальвиати. Я допускаю, далее, что выводы, сделанные абстрактным путем, видоизменяются в конкретных случаях и настолько искажаются, что ни поперечное движение не будет равномерным, ни ускоренное движение при падении не будет соответствовать выведенной пропорции, ни траектория брошенного тела не будет параболой и т. д.»

Галилей, «Беседы и математические доказательства»
(продолжение)

«С другой стороны, я прошу вас разрешить нашему Автору принимать то, что принималось некоторыми величайшими мужами, хотя и ***неправильно***. Авторитет одного Архимеда должен успокоить в этом отношении кого угодно. В своей «Механике» и в «Книге о квадратуре параболы» он принимает как правильный принцип, что коромысло весов является прямой линией, равноудаленной во всех своих точках от общего центра всех тяжелых тел, и что нити, к которым подвешены тяжелые тела, параллельны между собою. Подобные допущения всеми принимались, ибо **на практике** инструменты и величины, с которыми мы имеем дело, столь ничтожны по сравнению с огромным расстоянием, отделяющим нас от центра земного шара, что мы смело можем принять шестидесятую часть градуса соответствующей весьма большой окружности за прямую линию, а два перпендикуляра, опущенные из ее концов, — за параллельные линии. Если бы в наших **практических делах** нам следовало считаться с подобными ничтожными величинами, то, прежде всего, пришлось бы осудить архитекторов, которые берутся воздвигать при помощи отвеса высокие башни с параллельными стенами. В дополнение мы можем сказать, что как Архимед, так и другие ученые исходили в своих рассуждениях ***из предположения бесконечной удаленности*** от нас земного центра, а тогда их предпосылки совершенно справедливы и доказательства абсолютно строги».

Э.Торричелли. Тема: О траектории горизонтально брошенного тела

«Основное возражение, широко распространенное даже среди самых серьезных мужей, состоит в том, что Архимед … допустил параллельность нитей, подвешенных к весам, в то время как на деле они должны пересекаться в центре Земли. Я же … полагаю, что основание механики должно быть рассмотрено совершенно по другому (longe alia ratione). Я соглашаюсь с тем, что, если к весам подвешены *физические* величины, то материальные нити подвешивания пересекутся, ибо каждая их них направлена к центру Земли. Тем не менее, если те же весы, хотя и телесные, рассматривать не на поверхности Земли, а в отдаленнейших областях … выше орбиты Солнца, то тогда нити (хотя они все еще будут направлены к центру Земли), станут намного менее сходящимися , но почти параллельными.

Представим себе теперь, что те же механические весы перенесены за пределы звездных Весов небосвода на бесконечное расстояние; тогда легко понять, что линии подвеса не будут более пересекаться, но станут строго параллельными. Когда я рассматриваю весы, нагруженные геометрическими фигурами, я представляю их не как находящиеся на страницах книг, на которых они нарисованы, и не считаю, что точка, к которой устремлены эти величины, находится в центре Земли; но представляю эти весы бесконечно удаленными от той точки, к которой устремлены тяжелые тела».

Opera geometrica, De Dimensione Parabolae, Florentiae, 1644, proemium, p. 9.

Часть 3

Проблема сведения простых машин к рычагу (античность)

Принцип работы простых машин

Постановка вопроса.

«Простые машины» помогают человеку преодолевать большое сопротивление (производить работу) при помощи небольшой силы.

Чаще всего речь идет о преодолении сопротивления, вызываемого силой тяжести – при поднятии тяжестей, волочении тяжелых грузов и т.д.

Простые машины:

- Рычаг
- Блок
- Ворот
- Полиспаст
- Наклонная плоскость,
- Винт
- Клин

Герон Александрийский (I в. н.э.)

«Механика» Герона – основной источник по практической механике античности. Сохранился в арабском переводе IX в. н.э.

В Европе известен не был.

Редукционизм

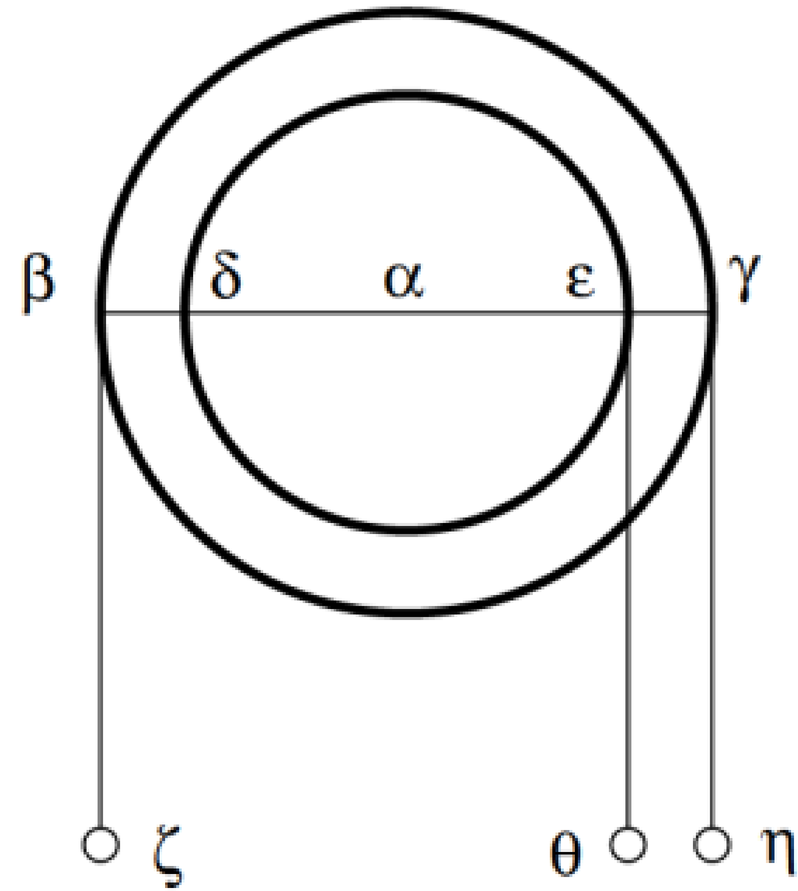
Основная идея Герона – свести действие всех простых машин к действию рычага.

Эта программа была им реализована только частично.

Во́рот (сведение принципа его работы к действию рычага)

Во́рот – два блока разного диаметра на одной оси, жестко скрепленные друг с другом.

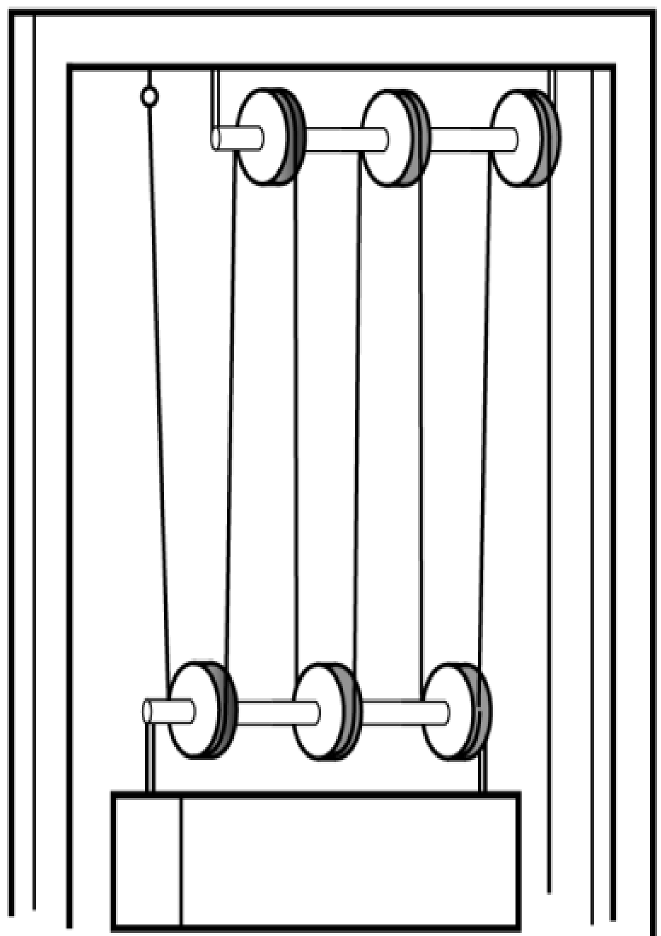
Доказательство Герона непосредственно следует из принципа рычага (теоремы Архимеда об условиях равновесии грузов на неравноплечных весах).



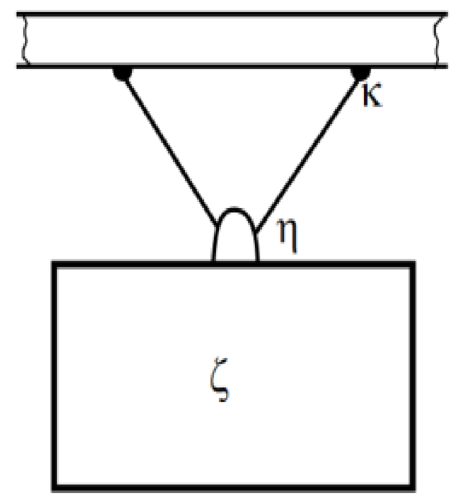
Полиспаст

При выводе свойств полиспаста Герон использует «принцип блоков» (термин Лагранжа), а не закон рычага.

Нагрузка равномерно распределяется на все нити системы.



a)



b)

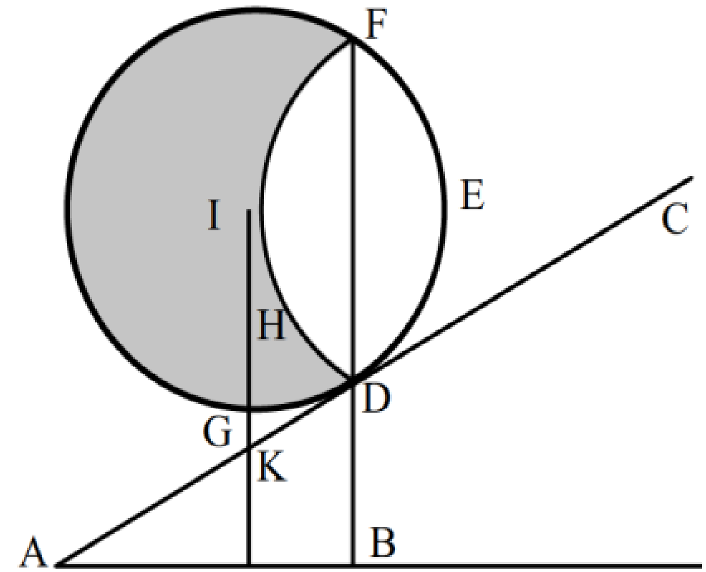
Герон Александрийский. Наклонная плоскость

Задача. Определить силу, необходимую для подъема груза по наклонной плоскости. Считается, что она равна силе, удерживающей груз на наклонной плоскости. Груз – цилиндр.

Используется модель весов (принцип рычага).

Цилиндр находится на наклонной плоскости и касается ее в точке *D*. Вертикальная плоскость *DF* делит его на две части. Сегмент *FED* уравновешен симметричным сегментом *FHD*. Сила, удерживающая цилиндр на наклонной плоскости, равна силе, с которой тяжесть заштрихованной луночки действует вдоль наклонной плоскости.

Вывод (частный): цилиндр, лежащий на горизонтальной плоскости, можно привести в движение *любой, самой малой силой*.



Тема движения, вызываемого *любой, самой малой силой*, проходит красной нитью через всю историю доклассической механики, предвосхищая понятие *инерциального движения*.

Папп Александрийский (IV в. н.э.)

Трактат «Математическое собрание» (в 8 книгах)

Механике посвящена Кн. 8. В ней Папп излагает материал, основываясь на трактате Герона.

Трактат Паппа в конце XVI в. был переведен на латинский язык и подробно прокомментирован (Ф. Коммандино, 1588)).

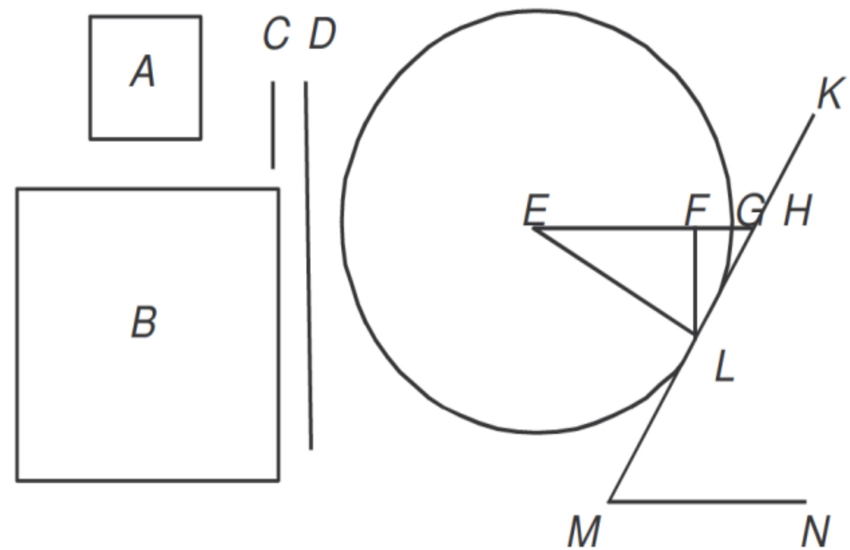
С его содержанием были знакомы все творцы классической механики XVII в.

Папп Александрийский. Задача о движении груза по наклонной плоскости

«Математическое собрании» кн. 8, предложение 9

<u>Дано</u>:

Наклонная плоскость *MK* с углом наклона *KMN*. Также заданы: вес тела *A* и сила *C*, необходимая для его перемещения по горизонтальной плоскости (в отличие от Герона, Папп считает, что для перемещения тела по горизонтали требуется сила).



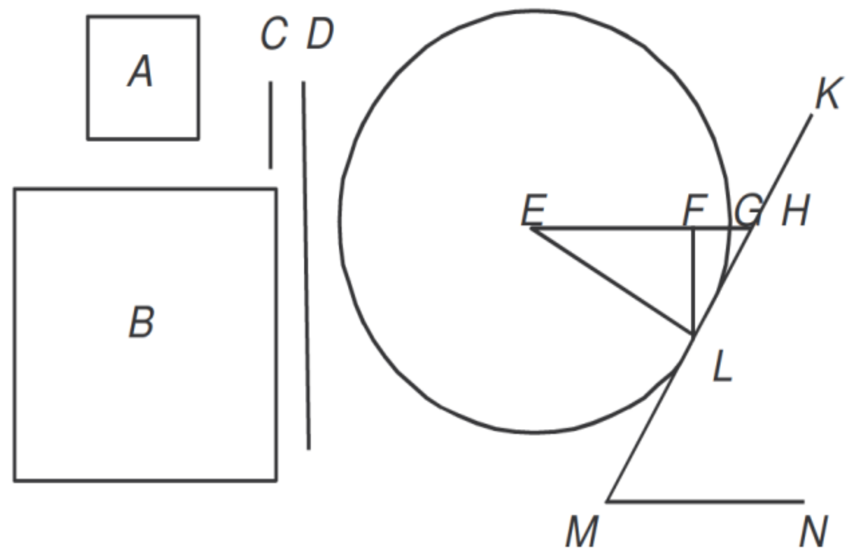
Требуется определить силу *P*, необходимую для перемещения этого тела вверх по наклонной плоскости *MK*.

Неявно используемый постулат: сила, необходимая для перемещения тела по горизонтальной плоскости, пропорциональна его весу.

Папп Александрийский. Задача о движении груза по наклонной плоскости

<u>Решение</u>.

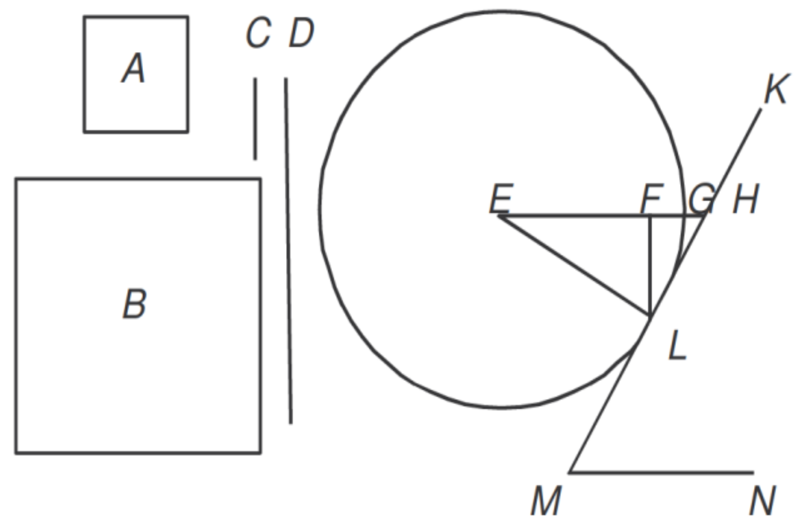
Рассмотрим шар с центром в точке *E*, вес которого равен весу тела *A*. Поместим его на наклонную плоскость *MK*; при этом *L* является точкой касания, а радиус *EL* перпендикулярен наклонной плоскости. Проведем из центра шара *E* прямую *EH*, параллельно *MN*, до пересечения с наклонной плоскостью *MK*. Прямая *EH* пересечет шар в точке *G*. Пусть F – точка пересечения отрезка EH и перпендикуляра, проходящего через точку L.



Папп сводит эту задачу к задаче о равновесии грузов на неравноплечных весах.

Папп Александрийский. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Рассмотри «весы», точкой опоры которых является F, а плечами – отрезки FG и FE. Предположим, что шар подвешен к точке E, то есть, его сила тяжести приложена к плечу FE. Из закона Архимеда следует, что существует такой вес B, который, будучи подвешен к точке G, приведет весы в равновесие. Найдем этот вес. Отметим, что одновременно будет найдено соотношение между силами C и D, где D – сила, необходимая для перемещения тела B по горизонтали.



Для того, чтобы веса A и B находись в равновесии, необходимо, чтобы отношение A к B было равно (обратному) отношению плеч, т.е. A/B = FG/EF.

Решение задачи о наклонной плоскости

Отношение между величинами плеч FG/EF находим так. Угол ELF равен углу EHL и, соответственно, равен углу наклона KMN, а EL = EG = радиусу шара. Значит EL/EF = EG/EF; FG = EG – EF. Отсюда находим FG/EF = (EG – EF)/EF = (EG/EF) - 1.

В современных обозначениях: $EG/EF = 1/\sin\alpha$, где α = KMN. Поэтому

$$B = A \sin\alpha/(1 - \sin\alpha) \qquad (*)$$

Таким образом, вес B, подвешенный к точке H и удовлетворяющий условию (*), уравновешивает сферу A, которая остается неподвижной, как будто она находится на горизонтальной поверхности.

Из соотношения C/D = FG/EF находим силу

$$D = C \sin\alpha\ (1 - \sin\alpha).$$

Для перемещения веса A вверх по наклонной плоскости необходима сила P, равная сумме сил C и D:

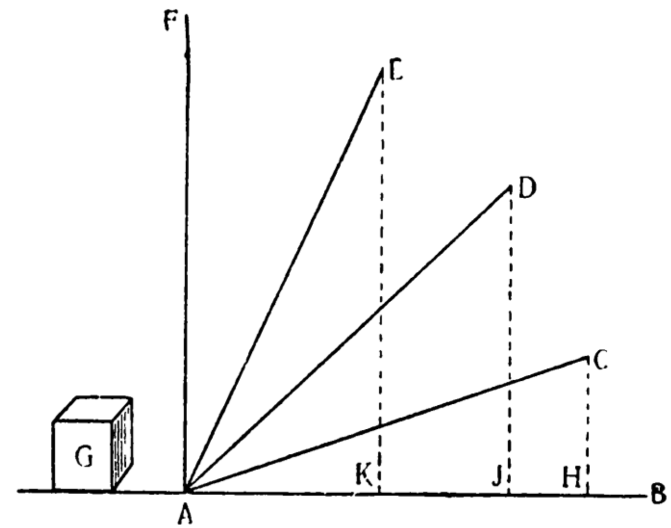
$$P = C + D = C + C\sin\alpha/(1 - \sin\alpha) = C/(1 - \sin\alpha).$$

При $\alpha = 90^\circ$ сила, по Паппу, становится бесконечной.

В конце Папп рассматривает числовой пример. Для перемещения тела по горизонтальной плоскости требуется сила 40 человек. Какая сила потребуется для подъема этого тела по наклонной плоскости с углом в 60°? Ответ: 300 человек.

Галилей. Задача о движении груза по наклонной плоскости «Механика» (ок. 1593)

Галилей: «Если перемещаемое тело установить на параллельной горизонту линии AB, оно будет находиться в безразличном состоянии относительно движения или покоя, и *малейшая сила сможет сдвинуть его*. Но если у нас будут восходящие плоскости AC, AD и AE, то тело по ним можно будет втолкнуть только с применением усилия, которое для перемещения по линии AD окажется большим, чем по линии AC, а для перемещения по линии AE еще большим, чем по линии AD…»



Далее Галилей формулирует правило, согласно которому сила, которая необходима для подъема тела по наклонной плоскости относится к весу этого тела, как длина перпендикуляра, опущенного из вершины этой плоскости на горизонталь, относится к длине самой плоскости.

Галилей. Задача о движении груза по наклонной плоскости «Механика» (ок. 1593)

Галилей:

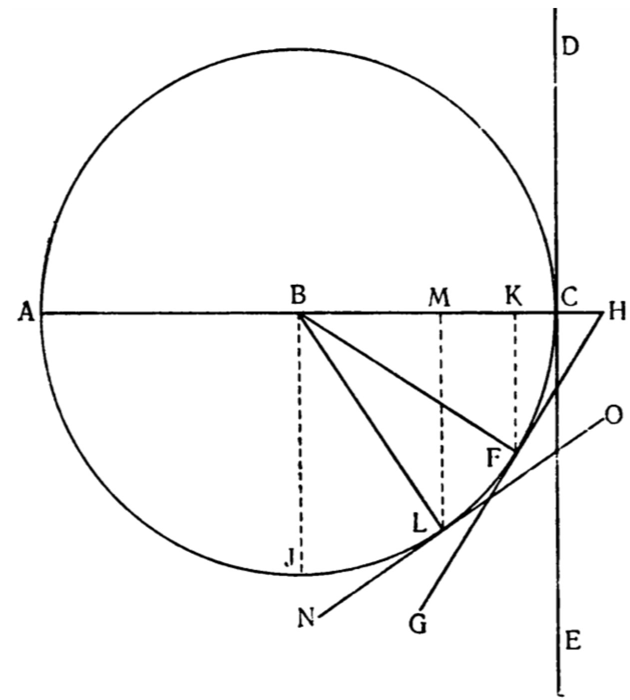
«Рассуждать таким образом пытался еще Папп Александрийский в 8 книге своих «Математических собраний»; но по моему мнению, он не достиг цели, а запутался в им же выдвинутом положении, когда допустил, что груз должен перемещаться в горизонтальной плоскости при помощи определенной силы, а это неверно …

Поэтому вернее будет искать, какой должна быть сила, которая перемещает груз *по перпендикуляру вверх* и которая равна его тяжести; именно это мы попытаемся сделать, но наш подход отличен от подхода Паппа».

Галилей. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Первый этап. Галилей рассматривает равноплечный рычаг, сначала прямой, затем – ломаный, используя понятие *момента*.

Галилей: «Допустим, что у нас имеется круг AJC, в нем диаметр ABC и центр B, а на концах два груза с одинаковыми *моментами*. Поскольку линия AC является как бы рычагом или весами, вращающимися вокруг центра B, груз C будет удерживаться грузом A. Но если … плечо весов BC наклонено вниз по линии BF таким образом, что обе линии AB и BF устойчиво соединяются в точке B, то *момент* груза C не будет равен *моменту* груза A, так как уменьшилось расстояние точки F, которая проходит от опоры B, вдоль BJ, к центру Земли. Но если мы опустим из точки F перпендикуляр на BC, то *момент* груза в точке F будет таким, каким он был бы, если бы груз был подвешен по линии KB. И насколько уменьшится расстояние KB по сравнению с расстоянием BA, настолько же уменьшится *момент* груза в F по сравнению с *моментом* груза в A».



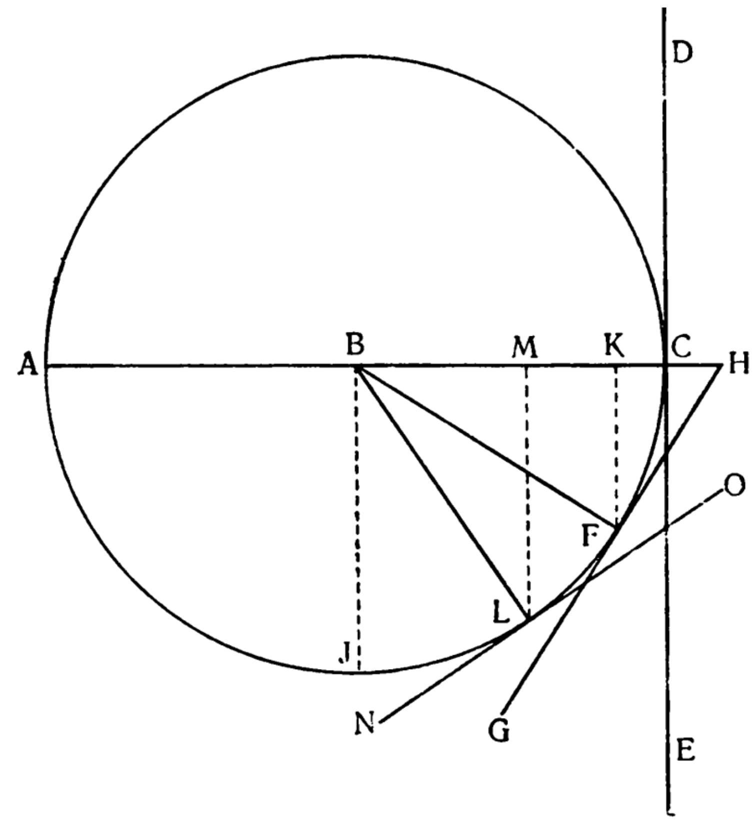
Галилей. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Далее Галилей рассматривает случай, когда правое плечо ломаных весов занимает следующее, еще более низкое положение BL. Он пишет:

«Мы видим, как у груза, находящегося на конце наклонной … линии, «*момент*» и «импето падать вниз» (стремление к падению вниз) постепенно уменьшаются, будучи все более и более удерживаемы линиями BF и BL».

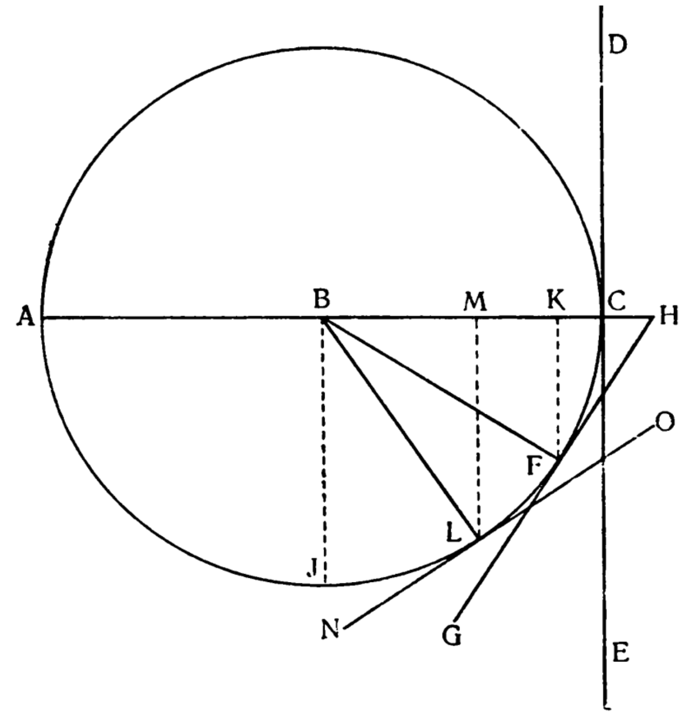
Второй этап. Основная (революционная) идея Галилея состоит в отождествлении кругового движения тяжелого тела на конце стержня с его скольжением по окружности с радиусом, равным плечу стержня, под действием тяжести.

Античности идея такого отождествления чужда.



Галилей. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Галилей: «Рассмотрев это тяжелое тело, которое поддерживается радиусом и принуждается к перемещению по окружности CFLJ, увидим, что это то же, что представить себе поверхность, также выгнутую, как окружность CFLJ, и подложенную под то же самое движущееся тело таким образом, чтобы, опираясь на нее, оно (тело) было бы вынуждено спускаться по ней. *Совершенно неважно, будет ли тело подвешено в точке B и удерживаемо радиусом круга, или же эта опора будет удалена, и оно будет опираться и перемещаться по окружности CFLJ».*



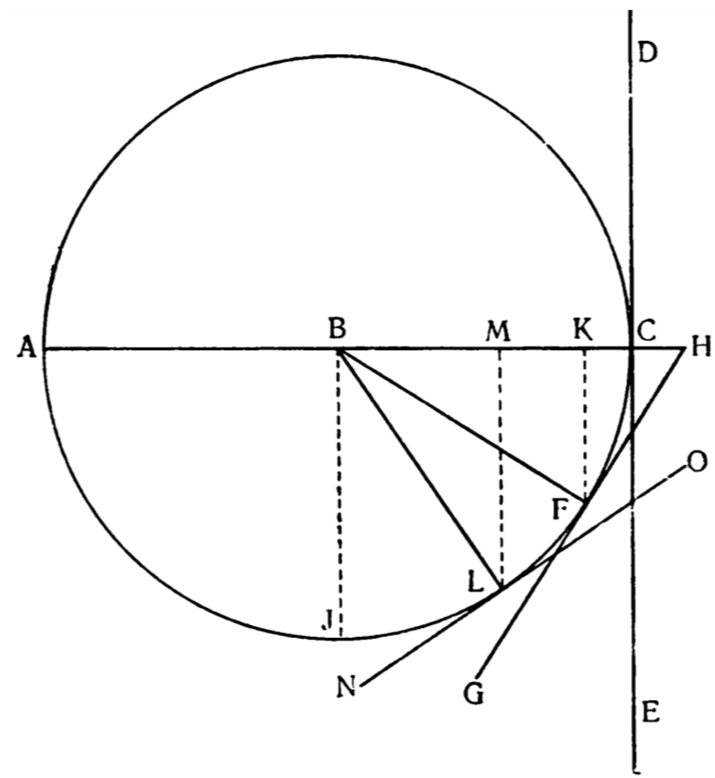
Отождествление этих двух движений позволяет перенести выводы, касающиеся изменения *момента* при вращении тела на стержне (радиусе), на изменение момента при скольжении по окружности. В обоих случаях вертикальная компонента силы уменьшается в одной и той же пропорции (например, BK/ BC).

Галилей. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Третий этап. Отождествление движения по малой дуге окружности с движением по малому отрезку касательной к этой окружности.

Галилей: «Когда движущееся тело находится в точке F, то оно *как бы* находится на плоскости, наклоненной по касательной линии GFH, так как наклон окружности в точке F отличается от наклона касательной F разве только неощутимым углом соприкасания». Отсюда следует вывод:

«*Момент* тела, движущегося по плоскости HF, уменьшается по сравнению с полным импето, которое оно имеет на перпендикуляре DCE, в том же отношении, какое имеется между линиями KB и BC. Общий и абсолютный *момент*, которым тело обладает на перпендикуляре (OE), и тот, которым оно обладает на наклонной плоскости HF, так относятся друг к другу, как линия HF к линии FK, то есть, как длина наклонной плоскости относится к перпендикуляру».



Галилей. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Четвертый этап. Окончательный вывод:

«Поскольку для перемещения груза достаточно силы, которая лишь незначительно превосходит ту силу, которая удерживает груз, то сделаем общий вывод: между силой и грузом на наклонной плоскости существует такое же отношение, что и между перпендикуляром, проведенным из конечной точки плоскости к горизонту, и длиной самой плоскости».

Далее Галилей применяет этот результата к «исследованию *природы* винта»:

«Отсюда понятно, что, делая винт с более частными спиралями, удается сделать его ловчее, ибо он образуется плоскостью менее наклонной, длина которой в большей пропорции превосходит высоту».

При выводе правила для наклонной плоскости Галилей держит в поле зрения преимущества, которые дает винт при подъеме тяжелых грузов на высоту.