История и методология механики

Лекция № 2

Часть 1

Евгений Алексеевич Зайцев
e_zaitsev@mail.ru

Лекция 2

Часть 1. Развитие геометрической статики. Труды Архимеда по механике

1. Закон рычага Архимеда
2. Гидростатика Архимеда. Проблемы геостатики.
3. Проблема сведения простых машин к рычагу (античность)

Введение
Ж.-Л. Лагранж о трех подходах к проблеме равновесия.
Три принципа, из которых могут быть выведены законы равновесия

«Статика – это наука о равновесии сил. …

Равновесие получается в результате уничтожения нескольких сил, которые *борются* и взаимно сводят на нет действие, производимое ими друг на друга; статика имеет своей целью дать законы, согласно которым происходит это уничтожение.

Эти законы основаны на общих принципах, которые можно свести к трем:

I. Принцип рычага,

II. Принцип сложения сил и

III. Принцип виртуальных скоростей».

Ж.-Л. Лагранж, «Аналитическая механика» (1788)

Отдел первый. О различных принципах статики (исторический обзор)

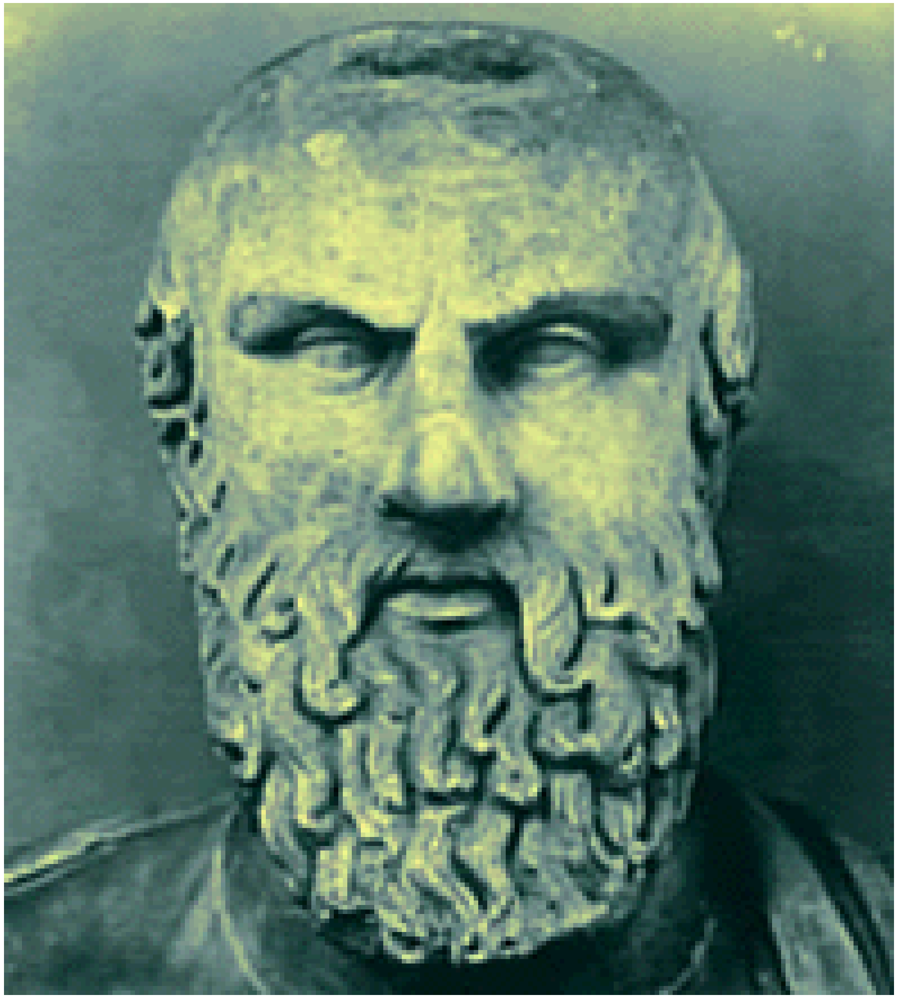
Принцип рычага (по Лагранжу)

«Принцип рычага, как его знают все механики, заключается в следующем. Если прямолинейный рычаг нагрузить с обеих сторон от точки опоры какими-либо двумя грузами таким образом, чтобы расстояния этих грузов от точки опоры были обратно пропорциональны самим грузам, то рычаг останется в равновесии, а нагрузка на точку его опоры будет равна сумме обоих грузов.

Для случая, когда грузы равны и находятся на равном расстоянии от точки опоры, Архимед принимает этот принцип в качестве очевидной аксиомы механики или, по меньшей мере, в качестве опытного закона.

К этому простому и первичному случаю он сводит случаи, когда на рычаге помещены неравные грузы».

Архимед (287—212 до н. э.) – крупнейший математик и механик Античности



Родился и бо́льшую часть жизни прожил в городе Сиракузы на Сицилии (греческая колония).

Учился в Александрии – главном научном центре эллинистической эпохи.

Будучи блестящим математиком, Архимед был также выдающимся механиком-практиком .

Сведения о жизни Архимеда дошли благодаря авторам, жившим значительно позднее. Поэтому их достоверность обычно ставится под сомнение.

Трактаты Архимеда по механике

Дошедшие до нашего времени:

- «О равновесии плоских фигур» (статика)
- «О плавающих телах» (гидростатика)
- «Послание к Эратосфену о механическом методе» или «Эфод».

Отрывки механических произведений Архимеда сохранились в трактатах:

- ❖ Герон Александрийский «Механика» (I в. н.э)
- ❖ Папп Александрийский «Математическое собрание», 8-ая книга (III в. н.э.).

Архимед «О равновесии плоских фигур или о центрах тяжести плоских фигур»

«Трактат «О равновесии плоских фигур» занимает особое место в творчестве Архимеда.

Если в его математических трудах все построения базируются на фундаменте, заложенном задолго до их написания (имеются в виду «Начала» Евклида и «Коники» Аполлония» – *Е.З.*), то в этом трактате он занимается исследованием самих оснований выстраиваемой теории.

Кроме того, он покидает сферу чистой математики, чтобы перейти к исследованию вопросов естествознания, которые трактует с точки зрения математики.

Архимед формулирует постулаты, на основе которых строит теорию равновесия; он тем самым становится первым, кто устанавливает тесную связь между математикой и механикой.

Это достижение Архимеда имело далеко идущие последствия как для физики, так и для математики».

E.J. Dijksterhuis, “Archimedes” (1956, p. 286)

Архимед , «О равновесии плоских фигур или о центрах тяжести плоских фигур»

Трактат состоит из двух книг.

Кн. 1 посвящена нахождению центра тяжести плоских фигур (параллелограмма, треугольника, трапеции).

Кн. 2 посвящена определению центра тяжести параболического сегмента.

Трактат предполагает знакомство с понятием центра тяжести (в нем самом определение центра тяжести отсутствует). Отрывки их «Механики» Герона и «Математического собрания» Паппа позволяют реконструировать его определение:

Центром тяжести тела называется расположенная внутри него точка, обладающая тем свойством, что если за нее мысленно подвесить тяжелое тело, то оно останется в покое и сохраняет первоначальное положение.

Замечание: Подробнее о понятии центра тяжести по Архимеду, о доказательстве его существования и единственности, а также доступное изложение способа нахождения центра тяжести параболического сегмента см. И.Н. Веселовский «Очерки по истории теоретической механики» (М., 1974, с. 27-29).

Архимед «О равновесии плоских фигур»

Допущения (постулаты), из которых Архимед выводит закон рычага и другие законы равновесия:

«1. Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются, на неравных же длинах не уравновешиваются, но перевешивают тяжести на большей длине.

2. Если при равновесии тяжестей на каких-нибудь длинах к одной из тяжестей будет что-нибудь прибавлено, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, к которой было прибавлено.

3. Точно так же если от одной из тяжестей будет отнято что-нибудь, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, от которой не было отнято».

Постулаты статики Архимеда (продолжение)

«4. При совмещении друг с другом равных и подобных плоских фигур совместятся друг с другом и их центры тяжести.

5. У неравных же, но подобных фигур центры тяжести будут подобно же расположены.

Под подобным расположением точек в подобных фигурах мы подразумеваем такое, в котором прямые, проведенные из этих точек к вершинам равных углов, образуют равные углы с соответственными сторонами.

6. Если величины уравновешиваются на каких-нибудь длинах, то на тех же самых длинах будут уравновешиваться и равные им.

7. Во всякой фигуре, периметр которой везде выпукл в одну и ту же сторону, центр тяжести должен находиться внутри фигуры».

Архимед «О равновесии плоских фигур»

Основной результат трактата – закон рычага, лежащий в основе статики

Предложение 6. «Соизмеримые величины (A и B) уравновешиваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям».

Идея (схема) доказательства (для случая A : B = 2 : 1)
По книге Э. Мах, «Механика. Историко-критический опыт ее развития» (1883)

Рис. 1

Постулат 1. Равные тяжести на
Равных длинах уравновешиваются …

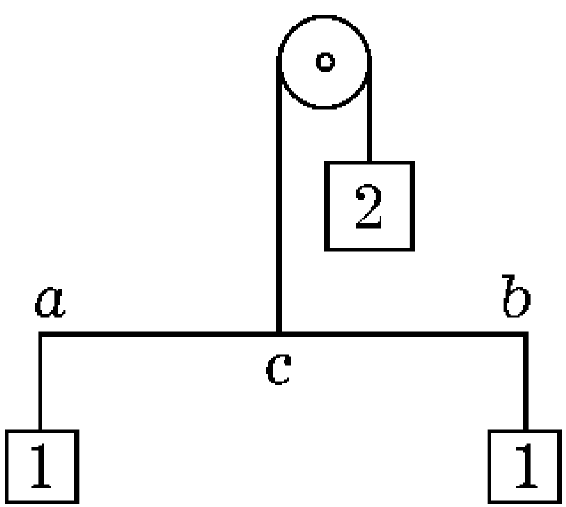
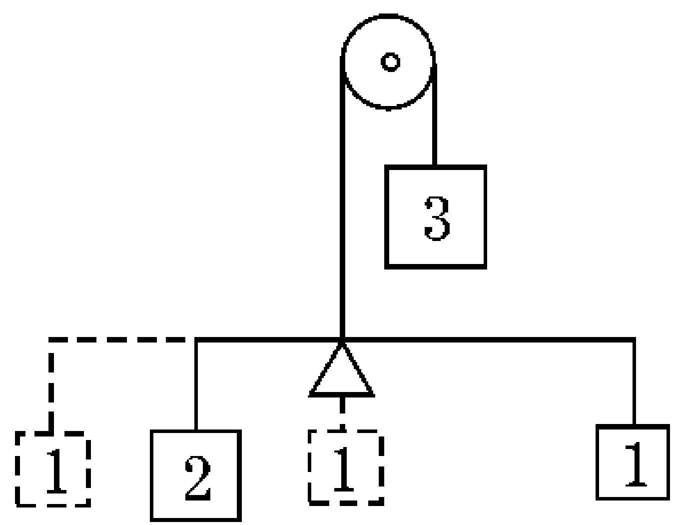


Рис. 2

Разделим плечо от A (=2) до B (=1)
на 3 равные части. → (по схеме)
точка опоры делит плечо в
отношении 1 : 2.



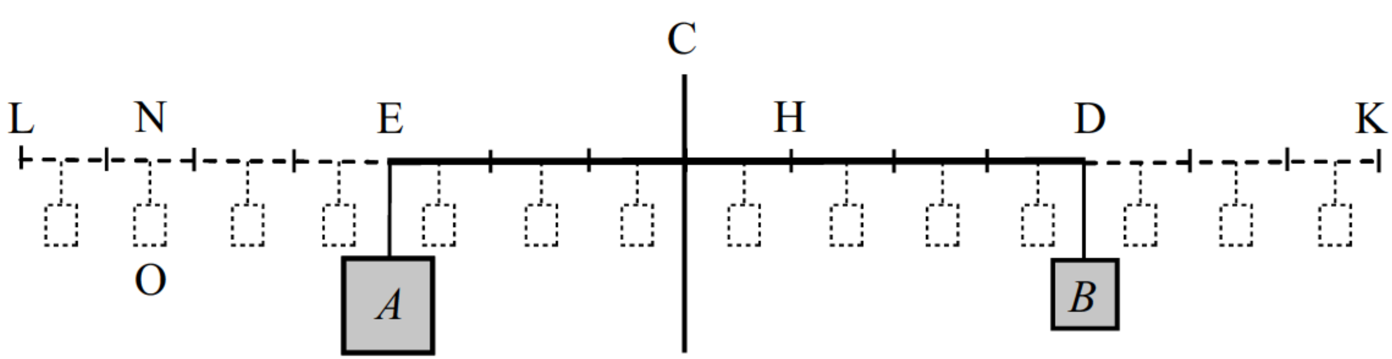
Доказательство для случая А : В = 4 : 3 (реконструкция Э. Маха).

<u>Дано</u>: На концах плеча ED подвешены грузы А = 4 и В = 3.

<u>Найти</u>: Точку опоры С такую, что система будет в равновесии.

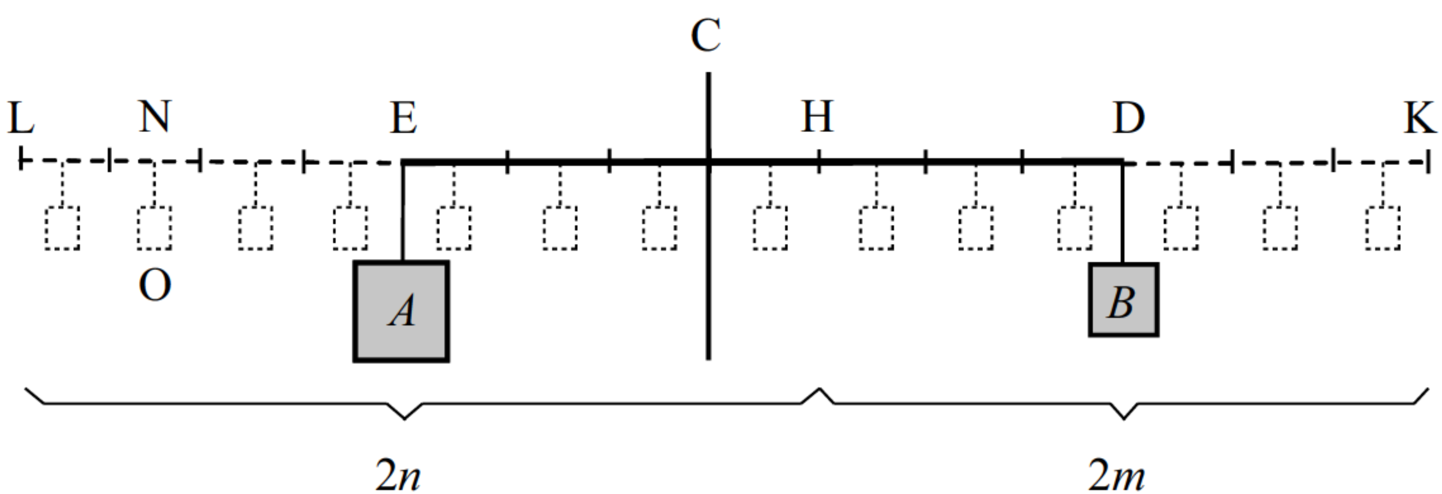
<u>Решение</u>:

- Разделим плечо ED на 7 равных отрезков (назовем их «единичными»).
- Возьмем точку С, отстоящую от точки подвеса груза *A* на 3, а от точки подвеса груза В на 4 единичных отрезка.
- Покажем, что точка С является центром тяжести системы грузов *A* и *B*.



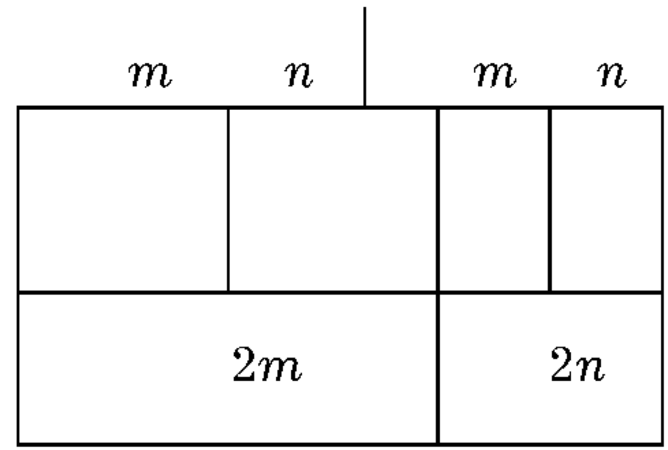
<u>Доказательство</u> для случая A : B = 4 : 3 (продолжение).

Увеличим плечо ED слева от груза *A* на 4 единичных отрезка (отрезок LE), а справа от *B* – на 3 (отрезок DK). Общее плечо LK равно 14 единичным отрезкам. Разделим груз *A* на 8 равных частей, а *B* – на 6; вес каждой части пусть будет O. Распределим 14 весовых частей O равномерно по длине плеча LK, подвесив их в центрах всех единичных отрезков. Из соображений симметрии следует, что центр тяжести системы будет находиться в середине плеча LK – в точке, которую мы обозначим C. Объединив 8 весовых частей O в эквивалентный груз *A*, и 6 – в груз *B*, приходим к выводу о том, что равновесие наступит, когда опора находится точке C.

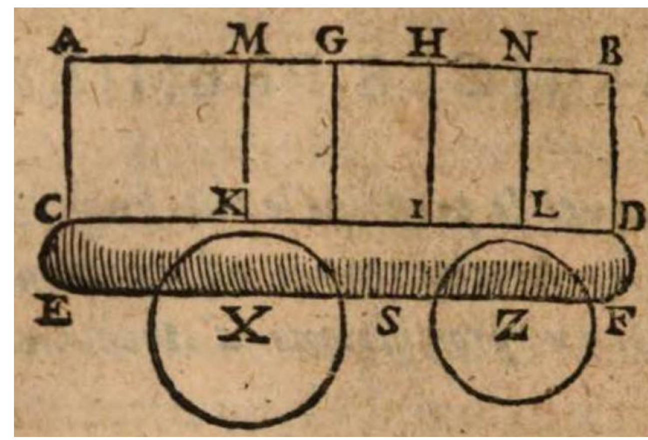


Закон рычага. Новое доказательство (Стевин, 1586; Галилей, ок. 1593)

Однородный тяжелый цилиндр (или балка) CDFE подвешен к концам стержня AB такой же длины. Стержень повешен в середине G, и система находится в равновесии. Пусть длина цилиндра равна 2(*m* + *n*). Разрежем цилиндр вдоль линии HI так, что длина его левой части будет равна *2m,* а правой – 2*n*. Если прикрепить концы обеих частей цилиндра у самого разреза HI нитями к стержню, то равновесие не нарушится.



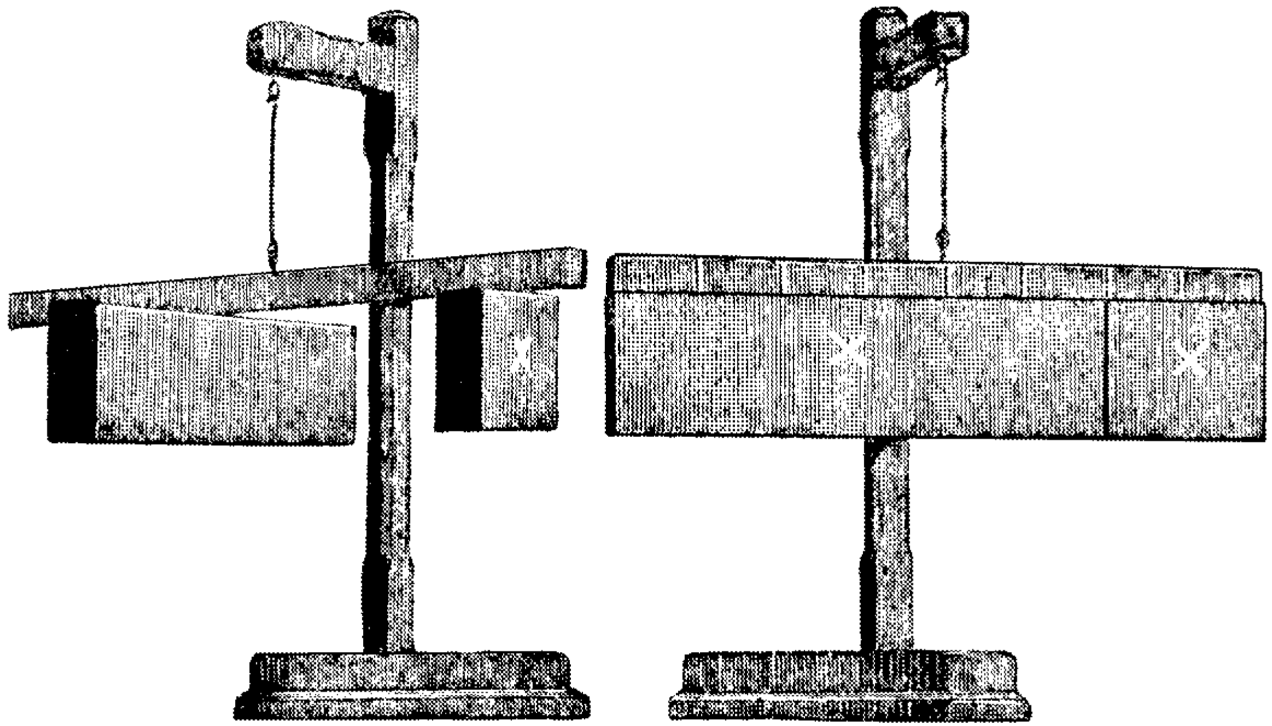
Подвесим оба цилиндра за середины K и L нитями к стержню, после чего удалим остальные нити. Так как длина цилиндра равна 2(*m* + *n*), то каждая его половина равна *m* + *n*. Расстояние GN точки подвеса правого цилиндра от точки G равно *m*, а левого GM – *n*.



Заменим цилиндры на произвольные тела X и Z, имеющие те же веса (2*m* и 2*n*), и подвесим их к стержню в тех же точках K и L. Равновесие не нарушится.

Эти точки отстоят от G на расстоянии *n* и *m*, соответственно. Закон рычага доказан.

Еще один вариант доказательства (Гюйгенс, 1693)



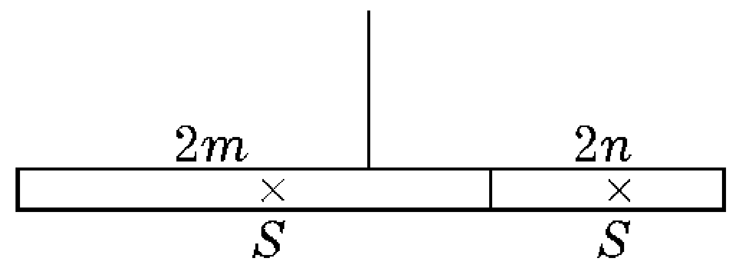
Равновесие не нарушится, если обе отрезанные части балки повернуть вокруг осей на любые углы. Действие груза, приложенное к точке плеча, определяется только величиной груза и не зависит от его формы или ориентации.

Простейший вариант того же доказательства (Лагранж, 1788)

Рассмотрим однородную горизонтальную призму, подвешенную посредине. Пусть эта призма разделена на две части, длиной *2m* и *2n.* Система будет находиться в равновесии.

Обозначим через *S* центры тяжестей этих частей. Точки *S* находятся на расстояниях *n* и *m* от точки подвеса.

Если подвесить к точкам *S* грузы, пропорциональные 2*m* и 2*n*, то система останется в равновесии. Правило рычага доказано.



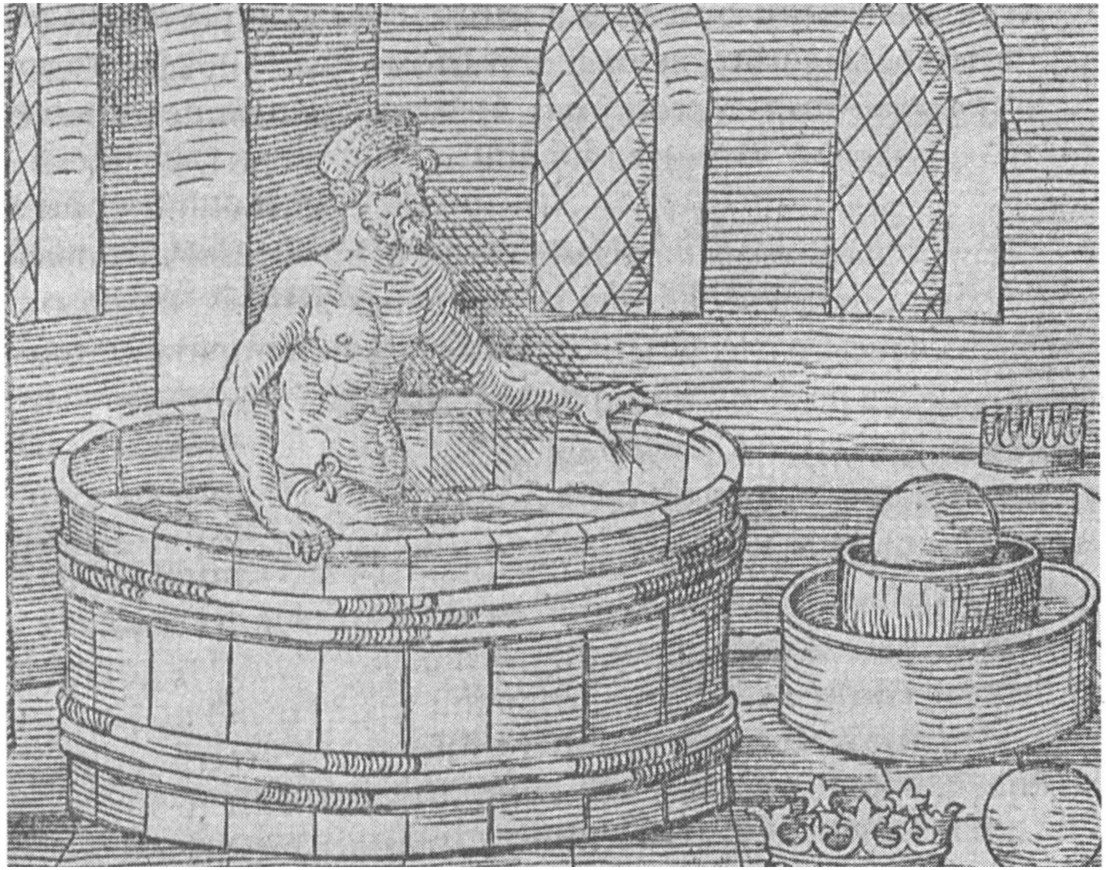
«Такой краткий вывод возможен только для ума, привычного к математическому воззрению».

Э. Мах, «Механика. Историко-критический опыт ее развития» (1883)

Часть 2

Гидростатика Архимеда.

Проблемы геостатики



Эврика! Архимед (287 – 212 до н.э.)
Петер Флетнер (1490-1546). Архимед в ванне.

Гравюра из первого перевода на немецкий Витрувия «Десять книг об архитектуре»

Опубликован Иоганном Петреусом в Нюрнберге в 1548 г.

Справа корона царя Гиерона

Модели плоской и сферической Земли» у Архимеда

В трактате «О равновесии плоских фигур» Архимед использует модель «плоской Земли».

Модель «плоской Земли». Основной постулат:

Линии действия тяжести параллельны между собой и перпендикулярны поверхности (плоской) Земли.

В трактате «О плавающих телах», напротив, используется модель «сферической Земли».

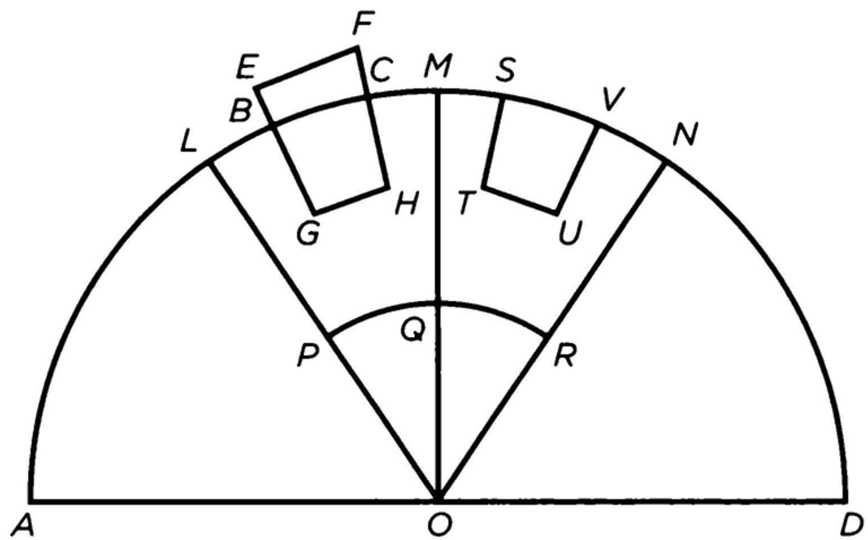
Модель «сферической Земли». Основной постулат:

Линии действия тяжести сходятся к центру Земли.

Архимед «О телах, плавающих в воде» (в двух книгах)

Кн. I. Предложение 5 (закон гидростатики Архимеда)

«Тело, более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, погружается настолько. чтобы объем жидкости, соответствующий погруженной {части тела}, имел вес, равный весу всего тела».



Если в трактате «О равновесии плоских фигур» доказательства основываются на постулате «плоской Земли», то здесь существенным образом используется сферичность Земли.

Проблема сведения простых машин к рычагу

1. Античность

2. XVII век (Галилей)

Принцип работы простых машин

Постановка вопроса.

«Простые машины» помогают человеку преодолевать большое сопротивление (производить работу) при помощи небольшой силы.

Чаще всего речь идет о преодолении сопротивления, вызываемого силой тяжести – при поднятии тяжестей, волочении тяжелых грузов и т.д.

Простые машины:

- Рычаг
- Блок
- Ворот
- Полиспаст
- Наклонная плоскость,
- Винт
- Клин

Герон Александрийский (I в. н.э.)

«Механика» Герона – основной источник по практической механике античности. Сохранился в арабском переводе IX в. н.э.

В Европе известен не был.

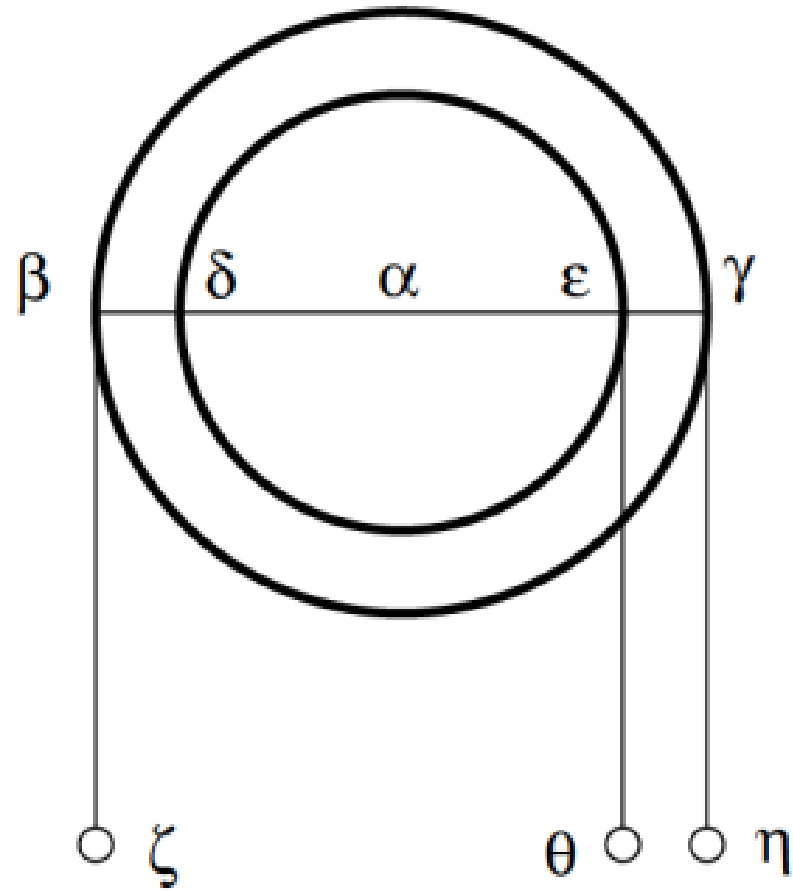
Редукционизм : Основная идея Герона – свести действие всех простых машин к действию рычага.

Эта идея была им реализована только частично.

<u>Во́рот (сведение принципа его работы к действию рычага)</u>

Во́рот – два блока разного диаметра на одной оси, жестко скрепленные друг с другом.

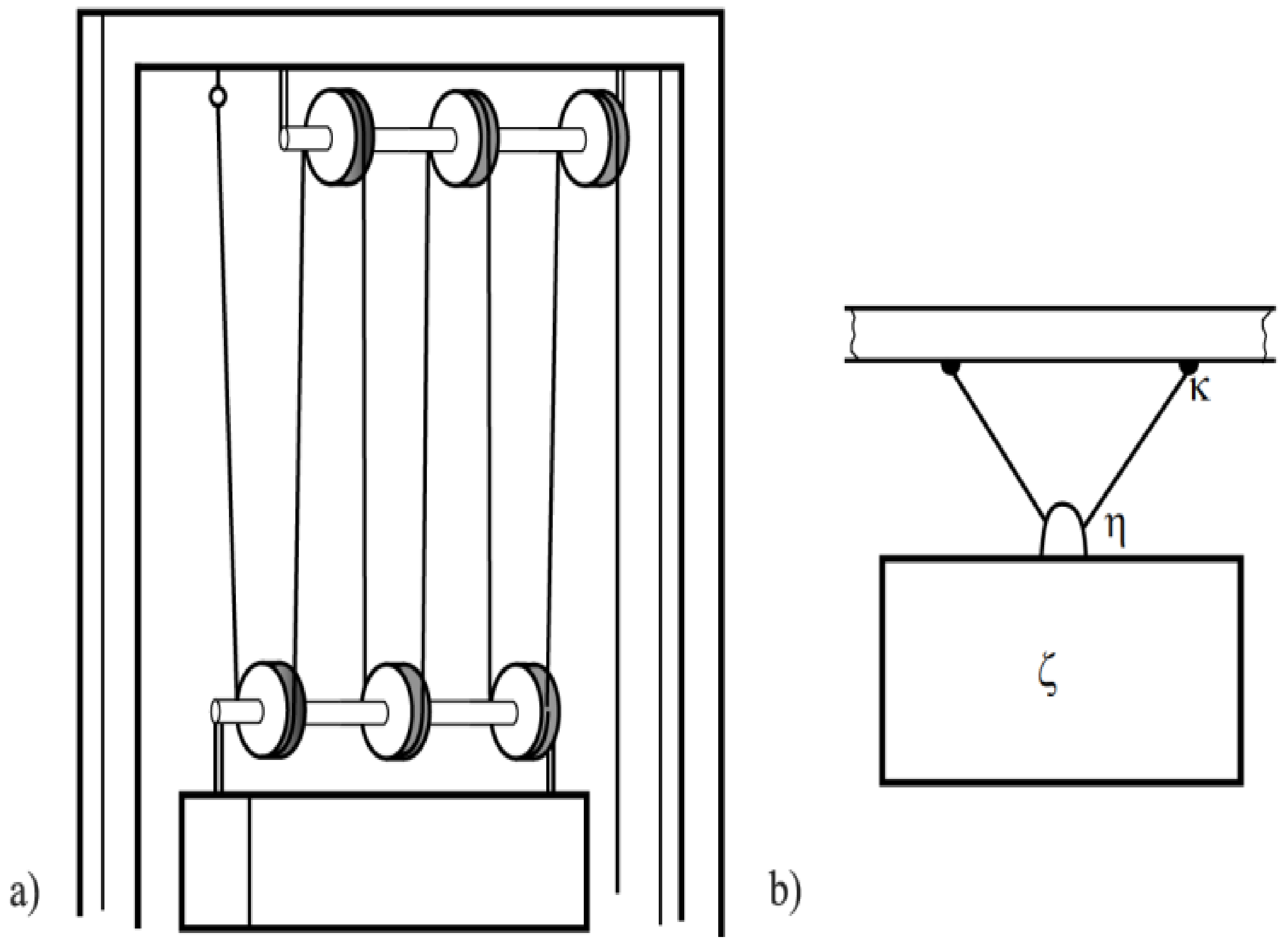
Доказательство Герона непосредственно следует из принципа рычага (теоремы Архимеда об условиях равновесии грузов на неравноплечных весах).



Полиспаст

При выводе свойств полиспаста Герон использует «принцип блоков» (термин Лагранжа), а не закон рычага.

Нагрузка равномерно распределяется на все нити системы.

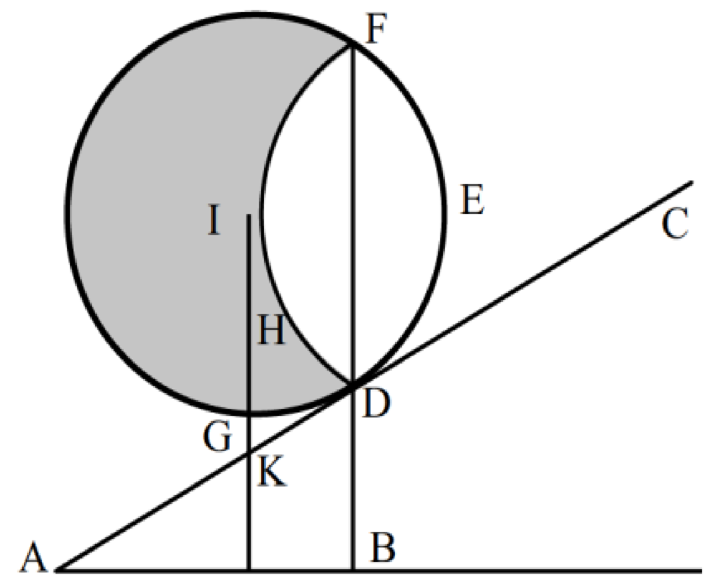


Герон Александрийский. Наклонная плоскость

Задача. Определить силу, необходимую для подъема груза по наклонной плоскости. Считается, что она равна силе, удерживающей груз на наклонной плоскости. Груз – цилиндр.

Используется модель весов (принцип рычага).

Цилиндр находится на наклонной плоскости и касается ее в точке *D*. Вертикальная плоскость *DF* делит его на две части. Сегмент *FED* уравновешен симметричным сегментом *FHD*. Сила, удерживающая цилиндр на наклонной плоскости, равна силе, с которой тяжесть заштрихованной луночки действует вдоль наклонной плоскости.



Вывод (частный): цилиндр, лежащий на горизонтальной плоскости, можно привести в движение *любой, самой малой силой*.

Тема движения, вызываемого *любой, самой малой силой*, проходит красной нитью через всю историю доклассической механики, предвосхищая понятие *инерциального движения*.

Папп Александрийский (IV в. н.э.)

Трактат «Математическое собрание» (в 8 книгах)

Механике посвящена Кн. 8. В ней Папп излагает материал, основываясь на трактате Герона.

Трактат Паппа в конце XVI в. был переведен на латинский язык и подробно прокомментирован (Ф. Коммандино, 1588)).

С его содержанием были знакомы все творцы классической механики XVII в.

Папп Александрийский. Задача о движении груза по наклонной плоскости

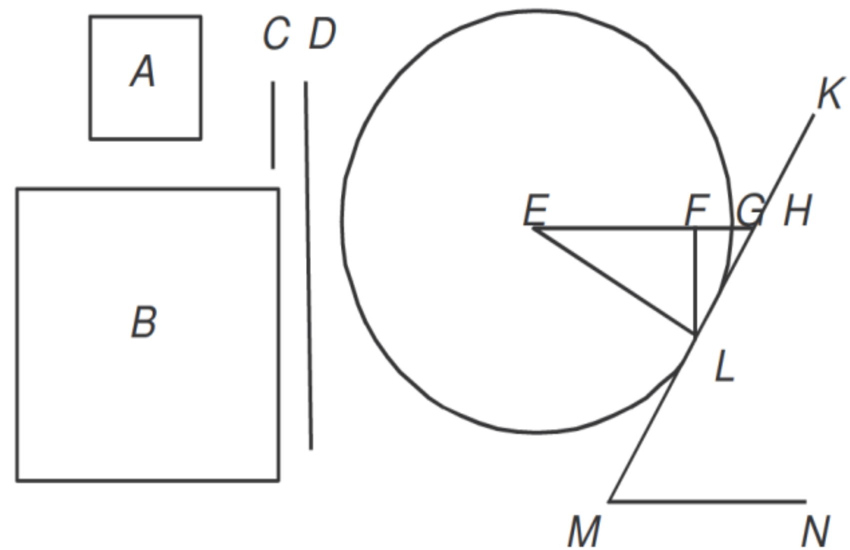
«Математическое собрании» кн. 8, предложение 9

<u>Дано</u>:

Наклонная плоскость *MK* с углом наклона *KMN*. Также заданы: вес тела *A* и сила *C*, необходимая для его перемещения по горизонтальной плоскости (в отличие от Герона, Папп считает, что для перемещения тела по горизонтали требуется сила).

Требуется определить силу *P*, необходимую для перемещения этого тела вверх по наклонной плоскости *MK*.

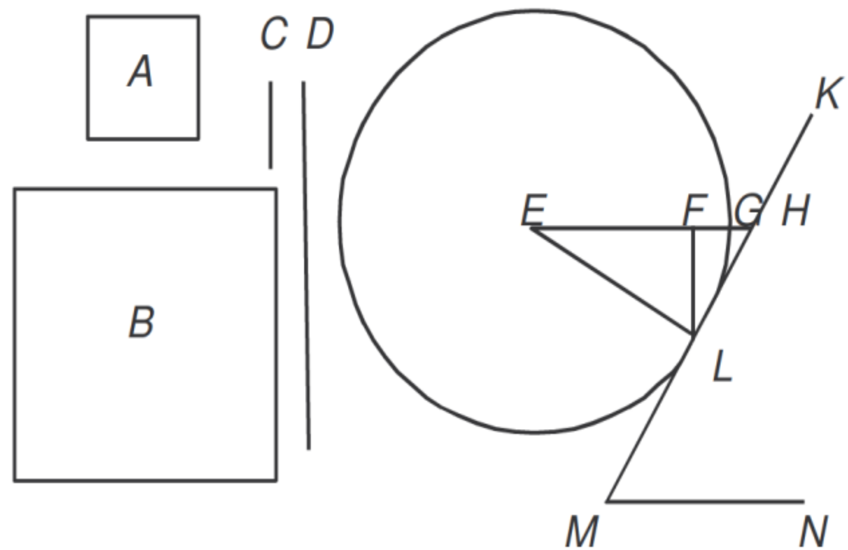
Неявно используемый постулат: сила, необходимая для перемещения тела по горизонтальной плоскости, пропорциональна его весу.



Папп Александрийский. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Решение.

Рассмотрим шар с центром в точке *E*, вес которого равен весу тела *A*. Поместим его на наклонную плоскость *MK*; при этом *L* является точкой касания, а радиус *EL* перпендикулярен наклонной плоскости. Проведем из центра шара *E* прямую *EH*, параллельно *MN*, до пересечения с наклонной плоскостью *MK*. Прямая *EH* пересечет шар в точке *G*. Пусть F – точка пересечения отрезка EH и перпендикуляра, проходящего через точку L.

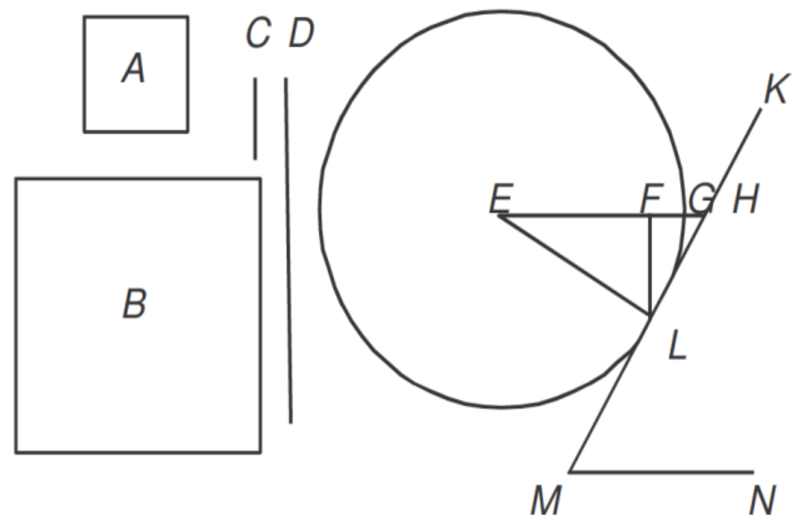


Папп сводит эту задачу к задаче о равновесии грузов на неравноплечных весах.

Папп Александрийский. Задача о движении груза по наклонной плоскости

Рассмотри «весы», точкой опоры которых является F, а плечами – отрезки FG и FE. Предположим, что шар подвешен к точке E, то есть, его сила тяжести приложена к плечу FE. Из закона Архимеда следует, что существует такой вес B, который, будучи подвешен к точке G, приведет весы в равновесие. Найдем этот вес. Отметим, что одновременно будет найдено соотношение между силами C и D, где D – сила, необходимая для перемещения тела B по горизонтали.

Для того, чтобы веса A и B находись в равновесии, необходимо, чтобы отношение A к B было равно (обратному) отношению плеч, т.е. A/B = FG/EF.



Часть 2.

Тема 1. Геометрический и кинематический подходы к изучению равновесия (общая характеристика и античные истоки)

Тема 2. Трактат С. Стевина «Начала статики». Доказательство правила равновесия грузов на двух наклонных плоскостях. Закон сложения и разложения сил.

Геометрический и кинематический подходы к изучению равновесия (общая характеристика и античные истоки)

Геометрическая статика

Геометрический подход (геометрическая статика): в основе лежит геометрическое представление сил (в виде отрезков) и манипуляция с этими отрезками в рамках правила параллелограмма сил и системы пары сил. Классический пример – работы Архимеда.

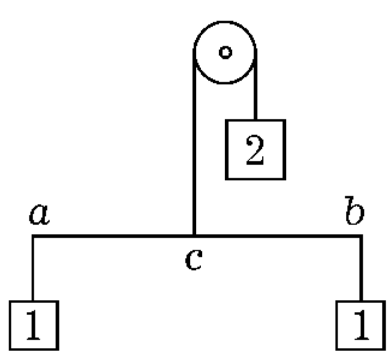
Кинематический подход: в основе лежит принцип *возможных* перемещений (или скоростей). Реально тело находится в равновесии. Но при этом условия равновесия получаются при предположении о *возможных* движениях частей системы (в простейших случаях – это обычные конечные перемещения за конечное время, в более сложных – инфинитезимальные перемещения за бесконечно малое время).

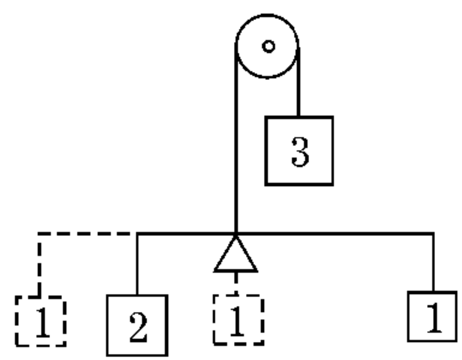
Кинематический подход лежит у истоков аналитической линии в развитии механики.

Геометрический подход Архимеда. Закон рычага (идея доказательства)

Рис. 1 (слева): Стержень *ab* может вращаться вокруг своей середины – точки *c*. Равные грузы с весом 1 на равном расстоянии от точки *c* находятся в равновесии (аксиома). Если всю систему подвесить на нити в точке *c*, то для равновесия необходимо к другому концу нити, переброшенной через блок, подвесить груз весом 2 (стержень *ab* считается невесомым). Отсюда следует, что равные грузы, подвешенные к концам стержня, замещают двойной груз в его середине.

Рис. 2 (справа): К рычагу, плечи которого относятся, как 1 : 2, подвешивают грузы, веса которых находятся в отношении 2 : 1. Представим, что груз весом 2 замещен двумя грузами, каждый из которых имеет вес 1 и которые подвешены на равном расстоянии 1 от точки подвеса груза 2. Очевидно, что полученная система будет находится в равновесии (из соображений симметрии). Из того, что замещение не изменяет равновесия, следует, что изначально грузы весом 1 и 2 также находились в равновесии.





Кинематический подход

Трактат «Механические проблемы» псевдо-Аристотеля (III в. до н.э.)

Трактат состоит из 36 вопросов и ответов на них. Значительная часть ответов носит предположительный характер («представляется», «кажется» и т.д.)

Основная тема трактата – свойства рычага, весов и других, сводимых к ним «простых машин». Этой теме посвящена наиболее многочисленная группа задач (23 задачи).

Тематика задач – технические (искусственные) движения, осуществляемые при помощи «инструментов»: весла, корабельного руля, мачты, паруса, пращи, щипцов для удаления зубов и т.д.

В трактате красной нитью проходит идея редукции этих технических движений к движению по окружности:

«Все удивительное берет свое начало в круге.

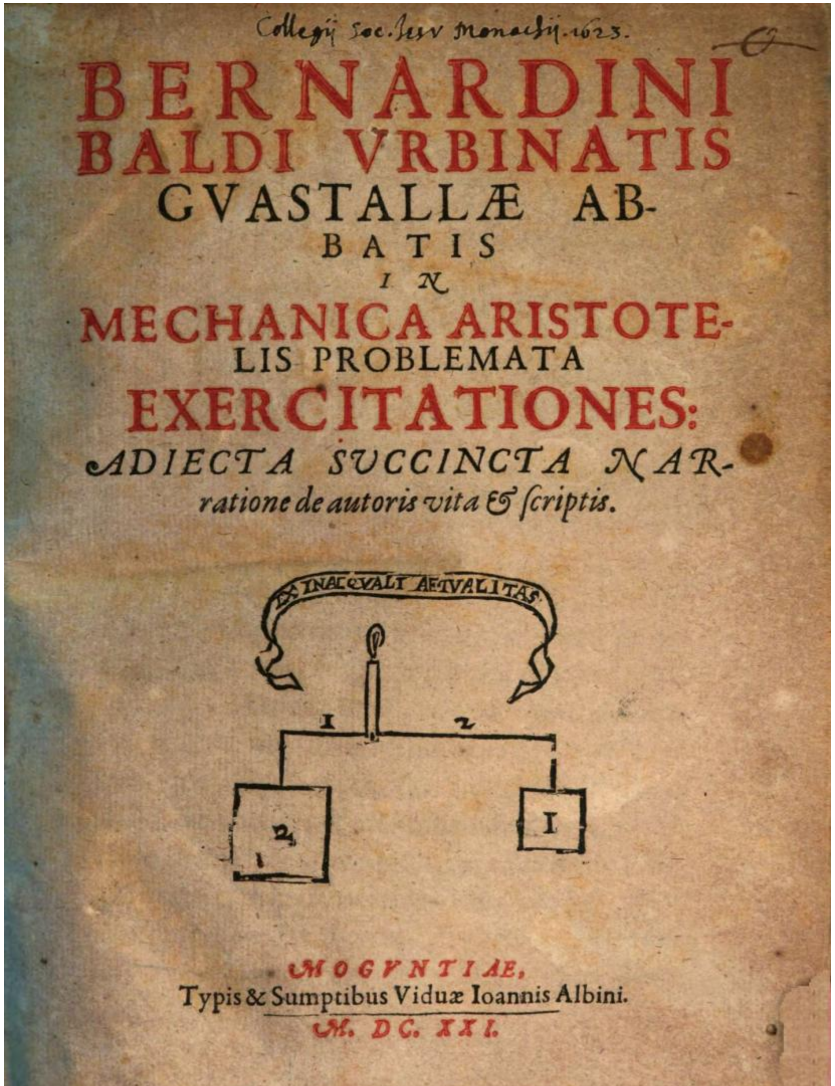
С помощью круга объясняется происходящее с весами;

посредством весов – происходящее с рычагом;

посредством рычага – все прочее, относящееся к механическому движению».

«*Механические проблемы*» (Введение)

Закон рычага. Кинематический подход.
Фронтиспис и страница с иллюстрацией «простых машин»
(«Механические проблемы» псевдо-Аристотеля, издание 1621 г.)
Переводчик и комментатор Бернардино Бальди (Bernardino Baldi)

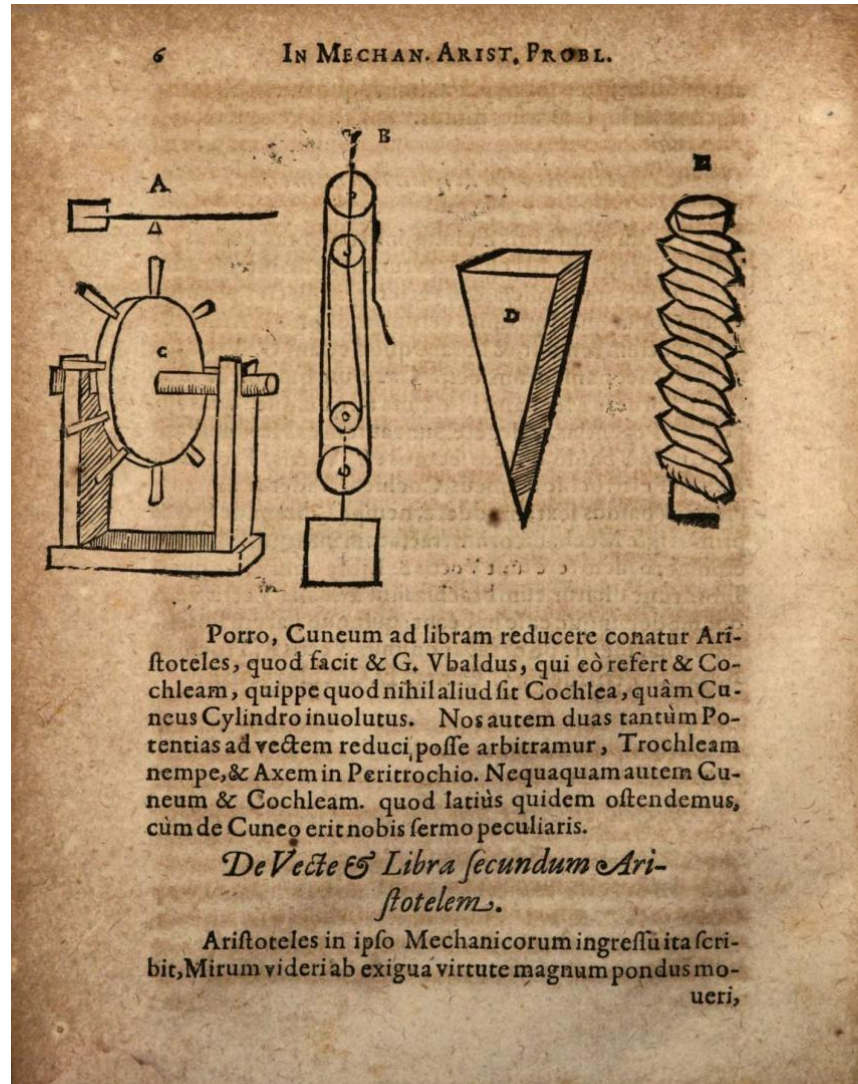


Collegii Soc. Iesu Monachii. 1623.

BERNARDINI BALDI VRBINATIS GVASTALLÆ ABBATIS IN MECHANICA ARISTOTELIS PROBLEMATA EXERCITATIONES:

ADIECTA SVCCINCTA NARRATIONE de autoris vita & scriptis.

MOGVNTIAE,
Typis & Sumptibus Viduæ Ioannis Albini.
M. DC. XXI.



Porro, Cuneum ad libram reducere conatur Aristoteles, quod facit & G. Vbaldus, qui eò refert & Cochleam, quippe quod nihil aliud ſit Cochlea, quàm Cuneus Cylindro inuolutus. Nos autem duas tantùm Potentias ad vectem reduci poſſe arbitramur, Trochleam nempe, & Axem in Peritrochio. Nequaquam autem Cuneum & Cochleam. quod latiùs quidem oſtendemus, cùm de Cuneo erit nobis ſermo peculiaris.

De Vecte & Libra ſecundum Ariſtotelem.

Ariſtoteles in ipſo Mechanicorum ingreſſu ita ſcribit, Mirum videri ab exigua virtute magnum pondus moueri,

Трактат «Механические проблемы». Кинематический подход к статике

Основной фрагмент, содержащий «объяснение» правила рычага

Проблема 2

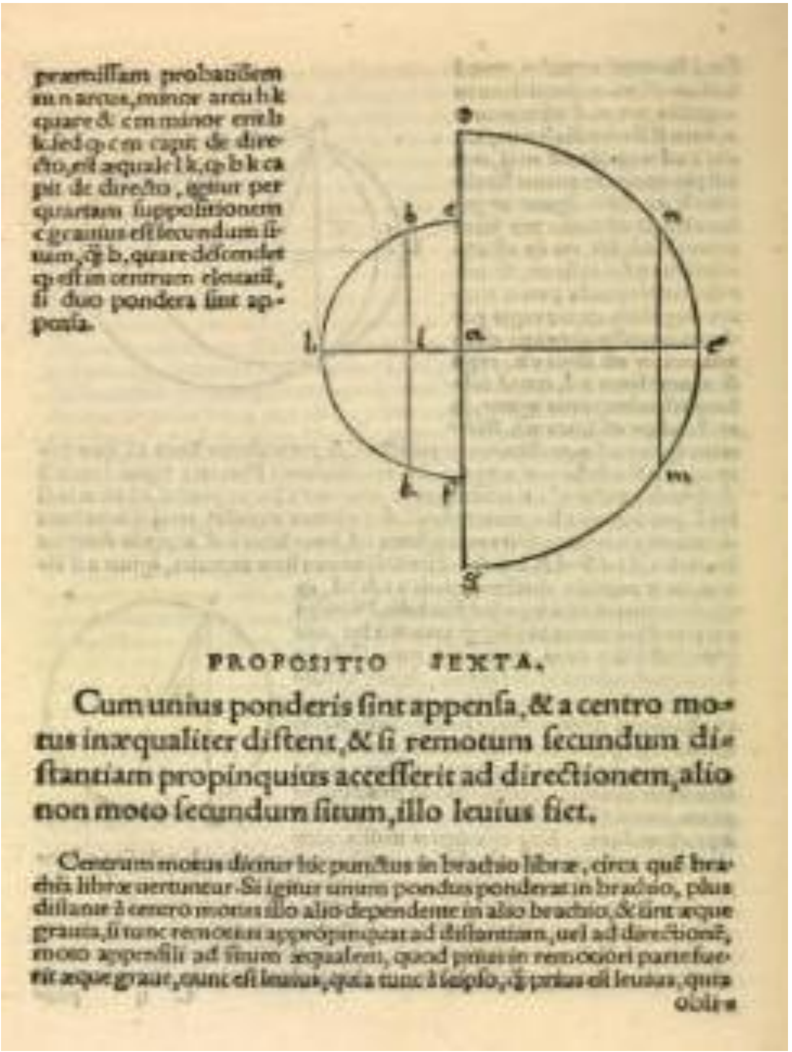
Вопрос: «Почему большие весы точнее малых?

Ответ: Под действием одного и того же груза (*baros*) концу коромысла необходимо двигаться тем быстрее, чем дальше отстоит он от веревки» (т.е. от точки подвеса)». Оттого «в больших весах гораздо значительнее становится величина тяжести (rope), производимой тем же грузом (baros)».

Проблема 3

Вопрос: «Почему с помощью рычага большие грузы движутся малыми силами…?»

Ответ: «Движимый груз относится к движущему в обратном отношении длины к длине. И всегда, чем больше расстояние от опоры [до движущего груза], тем легче двигать. Причина названа выше, и она состоит в том, что более удаленное от центра описывает больший круг. Так что той же самой силой можно двигать тем больший [груз], чем дальше от опоры она отстоит».



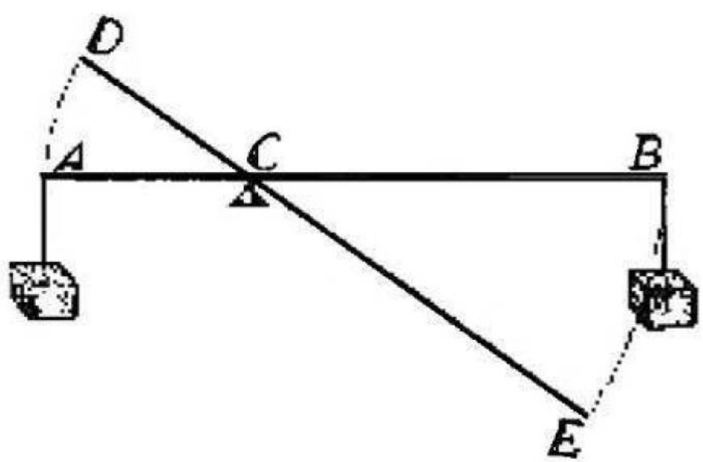
PROPOSITIO SEXTA.

Cum unius ponderis sint appensa, & a centro motus inæqualiter distent, & si remotum secundum distantiam propinquius accesserit ad directionem, alio non moto secundum situm, illo leuius fiet.

Закон рычага. Кинематический подход. Галилей, «Механика» (ок. 1593)

Сначала Галилей дает геометрическое доказательство закона рычага (отличное от доказательства Архимеда). Затем он дополнительно обосновывает в духе принципа *возможных* перемещений:

«Рассмотрим весы, разделенные на неравные части в точке С, и грузы подвешенные к точкам А и В, и относящиеся друг к другу, как расстояния ВС и АС; из уже сказанного очевидно, что один груз уравновесит другой. … Теперь рассмотрим движение, совершаемое тяжелым телом В, которое опускается в точку Е, а также движение, совершаемое другим телом А, которое поднимается в D; при этом мы без сомнения обнаружим, что путь ВЕ во столько раз больше пути AD, во сколько раз расстояние ВС больше расстояния СА. … Итак, оказывается, что скорость опускающегося тяжелого тела В во столько раз больше скорости поднимающегося тела А, во сколько раз тяжесть последнего превосходит тяжесть первого…»

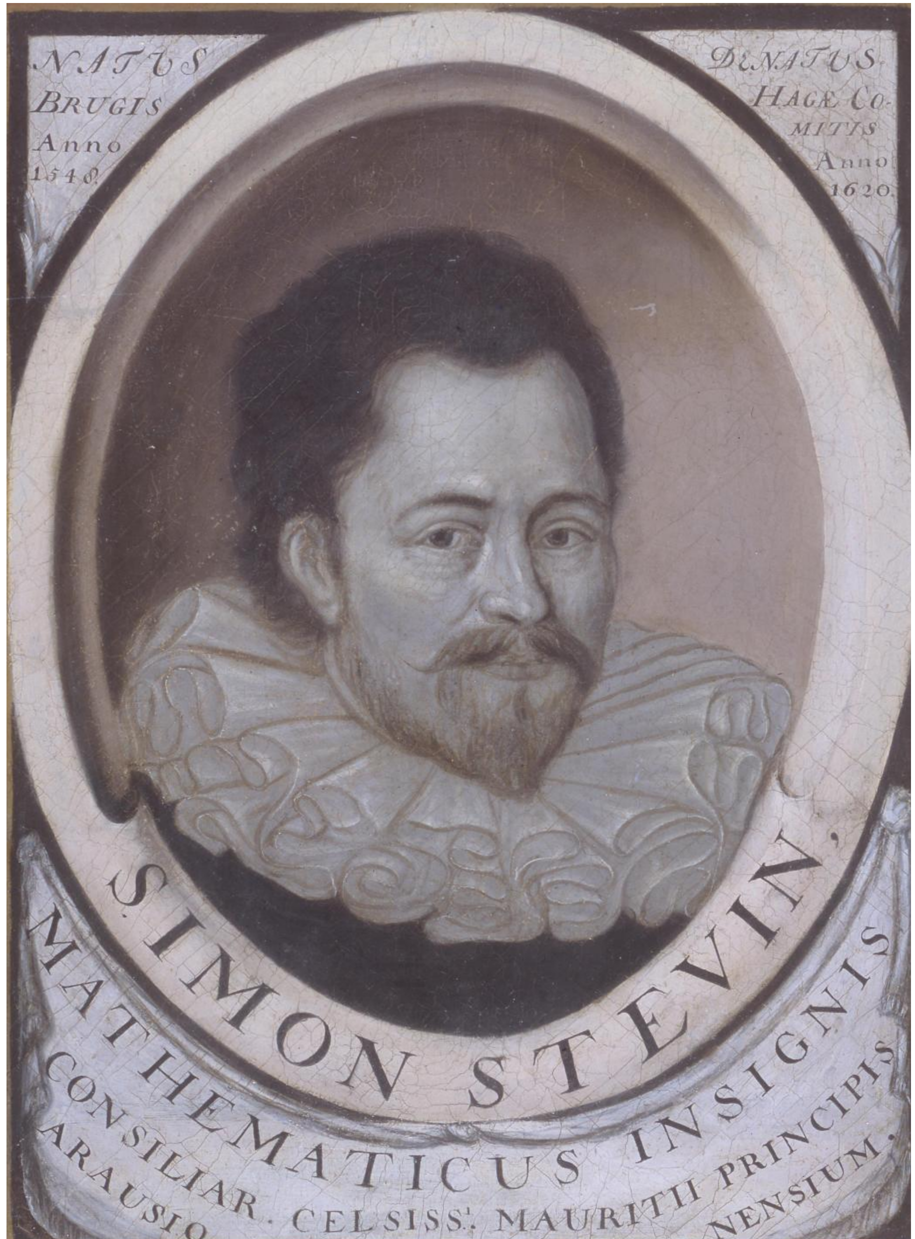


1. Трактат С. Стевина «Начала статики»

2. Доказательство правила равновесия грузов на двух наклонных плоскостях

3. Закон сложения и разложения сил.

Симон Стевин (Simon Stevin, 1548 –1620)



Симон Стевин (Simon Stevin). Основные труды по математике и механике

Математика

- *De Thiende* («Десятая часть»), 1585 (десятичные дроби)
- *L'arithmétique,* 1585 (алгебраические уравнения)

Механика (статика)

- *De Beghinselen der Weegconst,* 1586 («Начала искусства взвешивания») – теоретическая статика
- *De Weeghdaet*, 1586 («Практика взвешивания») – практическая статика.
- *De Beghinselen des Waterwichts,* 1586 («Начала, касающиеся веса воды») – гидростатика.

Сборники трудов

- *Hypomnemata mathematica,* в 5 т., 1605–1608 («Математические записи») – труды по математике и механике в латинском переводе
- Œuvres mathématiques... 1634 («Математические труды») в перев. на франц.

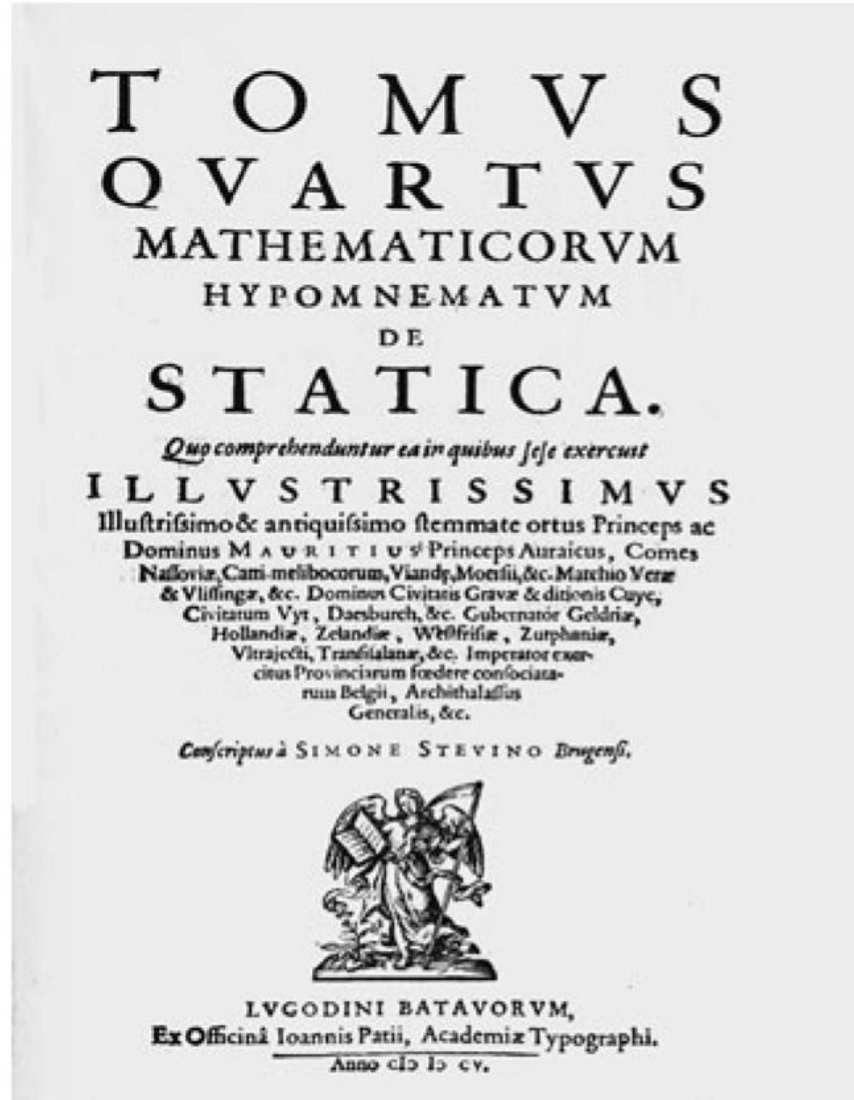
Современное издание трудов Стевина (на английском):

- *The Principal Works of Simon Stevin*, Leiden, 1955–1966 (доступно online)
  т. 1 механика, т. 2a, 2b математика, т. 3 астрономия/навигация ,
  т. 4 военное дело, т. 5 инженерное дело, музыка.

Голландское (1586) и латинское (1605) издания «Начал статики» Стевина

DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.

TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
cIↃ. IↃ. LXXXVI.



TOMVS
QVARTVS
MATHEMATICORVM
HYPOMNEMATVM
DE
STATICA.

Quo comprehenduntur ea in quibus sese exercuit
ILLVSTRISSIMVS
Illustrißimo & antiquißimo stemmate ortus Princeps ac
Dominus MAVRITIVS Princeps Auraicus, Comes
Nassoviæ, Catti-melibocorum, Viandæ, Moersii, &c. Marchio Veræ
& Vlissingæ, &c. Dominus Civitatis Gravæ & ditionis Cuyc,
Civitatum Vyt, Daesburch, &c. Gubernator Geldriæ,
Hollandiæ, Zelandiæ, Westfrisiæ, Zutphaniæ,
Vltrajecti, Transisalanæ, &c. Imperator exercitus Provinciarum foedere consociatarum Belgii, Archithalassus
Generalis, &c.

Conscriptus à SIMONE STEVINO *Brugensi.*

LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ Ioannis Patii, Academiæ Typographi.
Anno cIↃ IↃ CV.

Критика кинематического подхода к статике

Стевин:

«Причина, по которой равные тяжести на равных плечах пребывают в равновесии, является следствием общепризнанного постулата.

Причина же равновесия неравных тяжестей на неравных плечах, величины которых обратно пропорциональны весам, не столь очевидна.

Древние, исследовавшие этот вопрос, считали причиной равновесия окружности, описываемые концами плеч, как это видно из «Механических проблем» Аристотеля, а также работ его последователей.

Мы не считаем окружность причиной (равновесия), исходя из следующего силлогизма:

Стевин. Критика кинематического подхода (продолжение)

«Мы не считаем окружность причиной (равновесия), исходя из следующего силлогизма:

(Е) То, что подвешено и находится в покое, не описывает окружности;

(А) два груза, находящиеся в покое, неподвижны; значит,

(Е) два груза, находящиеся в покое, не описывают окружности.

Таким образом (для тяжестей в положении равновесия) никакой окружности нет. Но там, где нет окружности, она (окружность) не может быть причиной наступающего явления. Значит, окружность не может быть причиной равновесия.

Что касается малой посылки силлогизма (А), то движение по окружности может произойти только случайно (par accident), под влиянием ветра, толчка или каким-либо иным образом. …

Поэтому неудивительно, что те, кто принял это заблуждение за верное основание, вывели из него множество ложных положений».

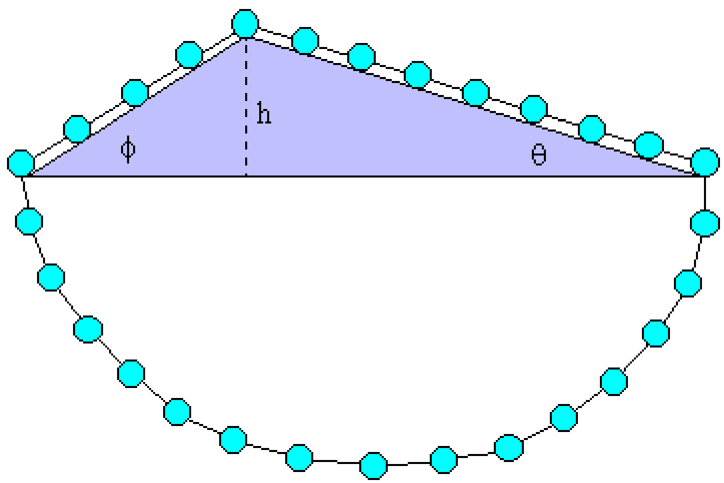
Стевин. «Приложение к трактату об искусстве взвешивания»

Стевин. Развитие геометрического подхода к статике

Основные положения, на которых базируется статика Стевина:

1. Закон рычага. Стевин доказывает его геометрически способом, отличным от доказательства Архимеда, но сходным с доказательством Галилея в «Механике» (ок. 1593).

2. Закон равновесия тел на наклонной плоскости в общем случае

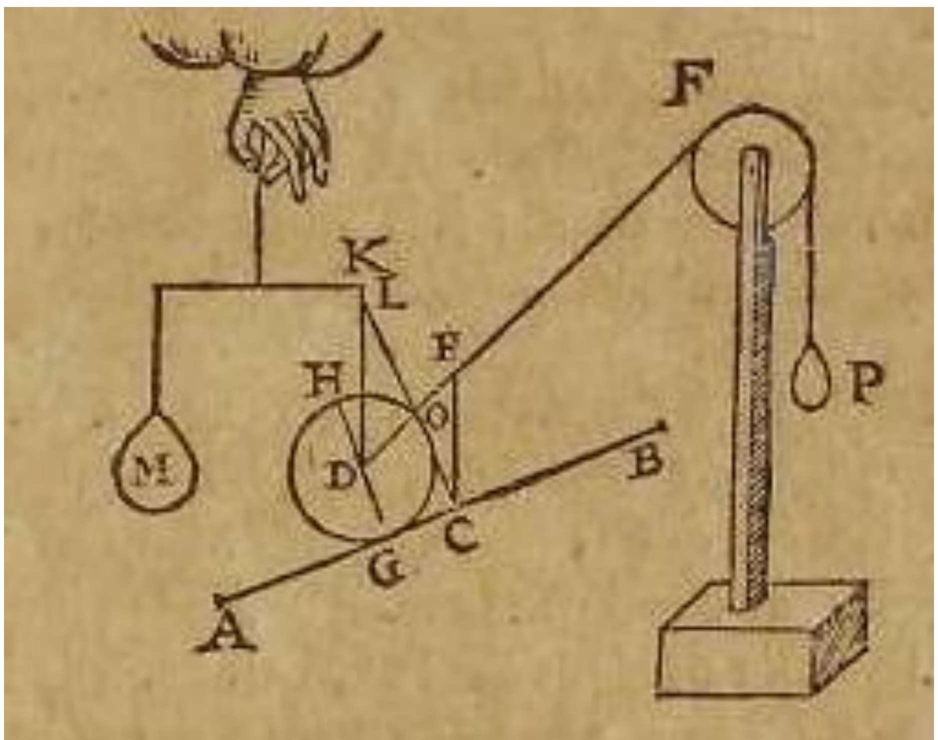


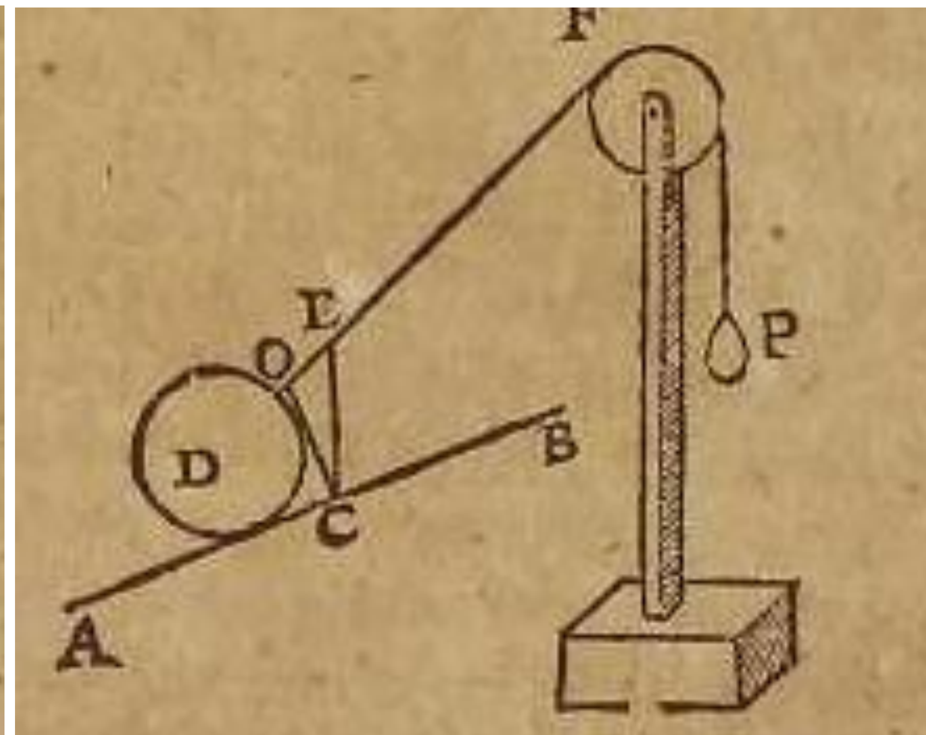
Следует из невозможности вечного движения perpetuum mobile.

Доказать самостоятельно. Указание: исключить из рассмотрения нижнюю часть цепочки.

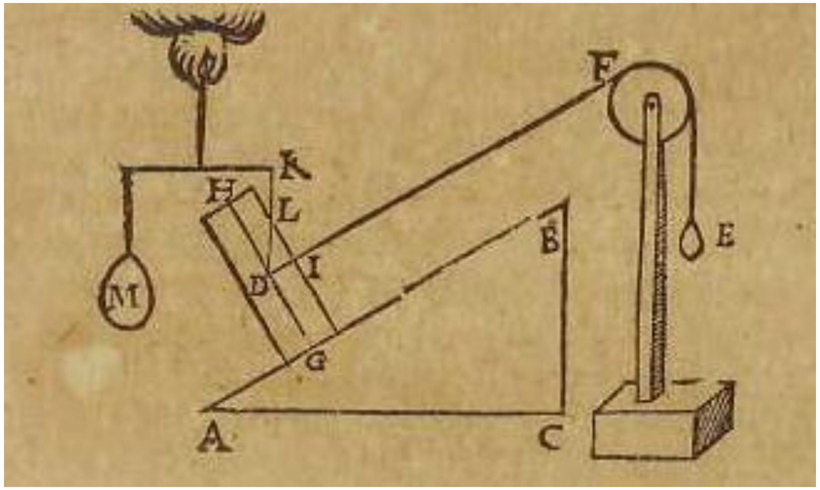
2а. Следствие: закон равновесия в частном случае, когда одна из наклонных плоскостей вертикальна.

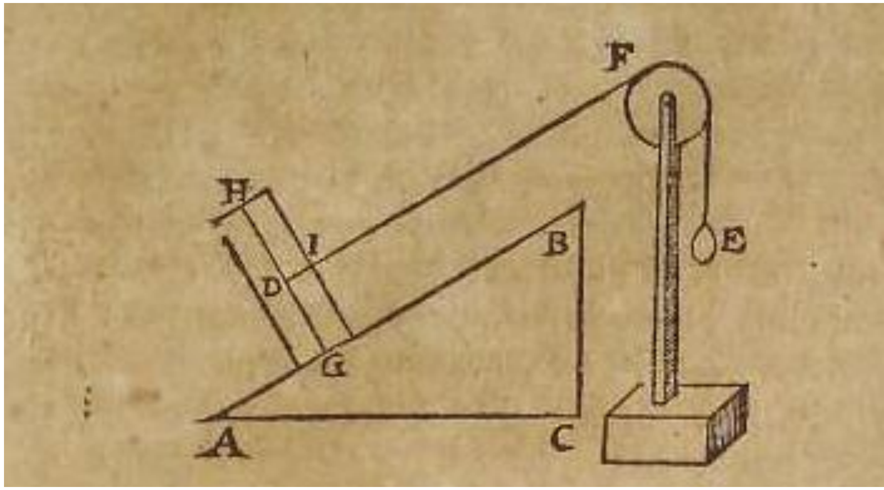
Стевин «Начала искусства взвешивания» (1586).
Основная идея – замена реакции опоры на силу натяжения нити DK, и, в конечном итоге, на тяжесть уравновешивающего груза M.
Характеристический треугольник EOC.
Основной результат: Система будет в равновесии,
когда отношение веса P к D равно отношению длин отрезков EO к CE.
<u>Задание</u>: проверить, так ли это?
NB. Если плоскость AB горизонтальна, то точки E и O совпадают.





Стевин «Начала искусства взвешивания» (1586)
«Характеристический» треугольник DLI дает ответ на вопрос о соотношениях сил в равновесии.





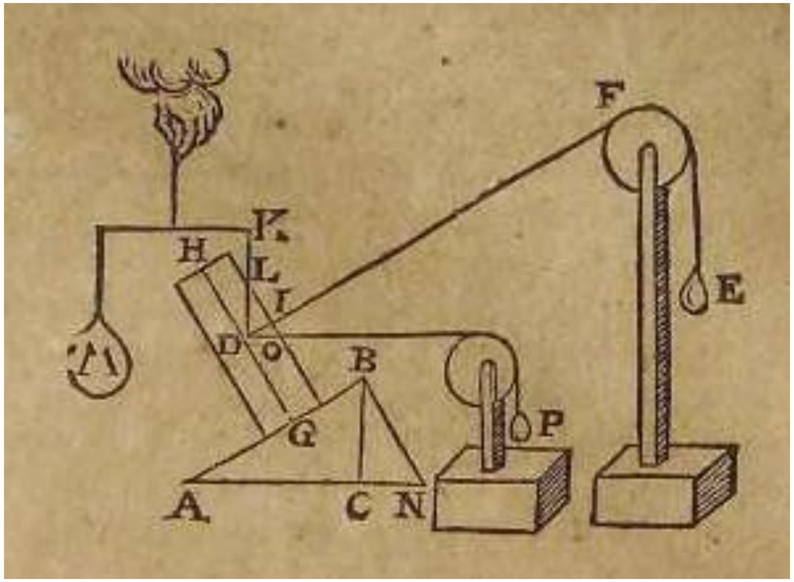
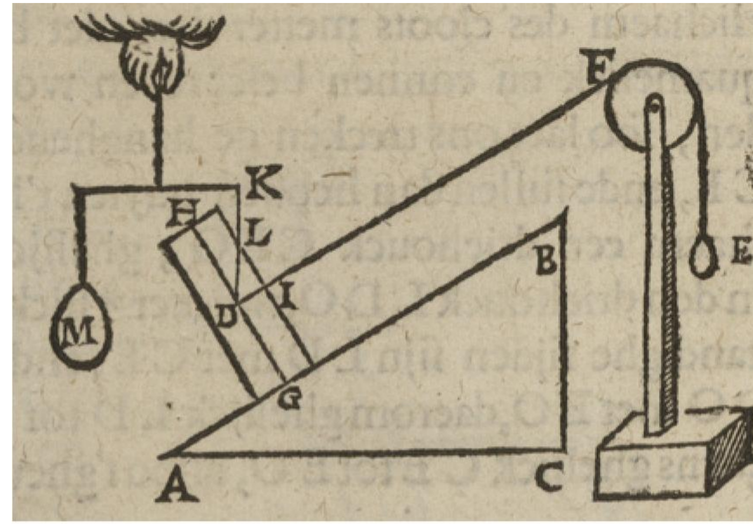
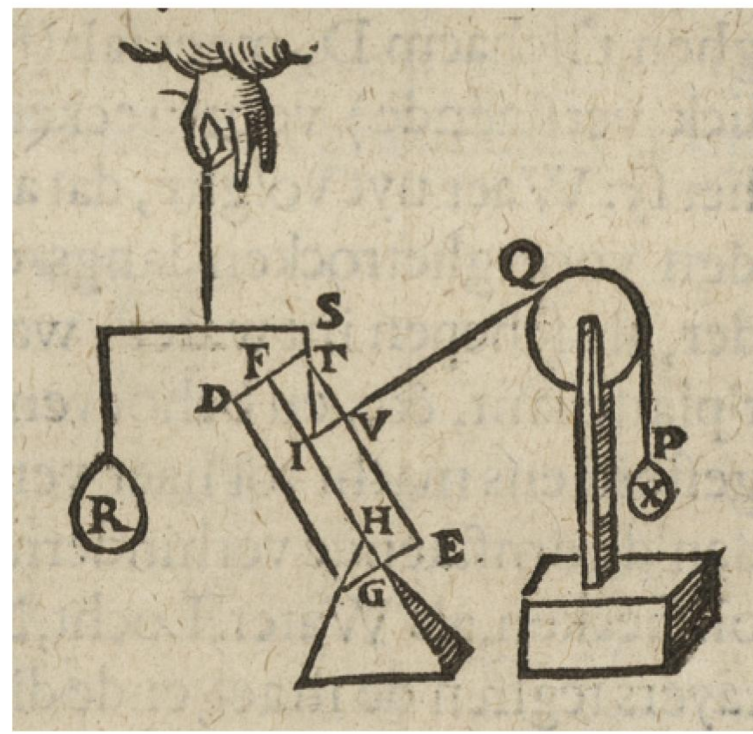


Иллюстрация тезиса о том, что конкретный вид опоры не имеет значения

Согласно закону наклонной плоскости, равновесие наступает тогда, когда отношение веса M к весу E равно отношению AB к BC, которое, в свою очередь, равно отношению LD к DI.

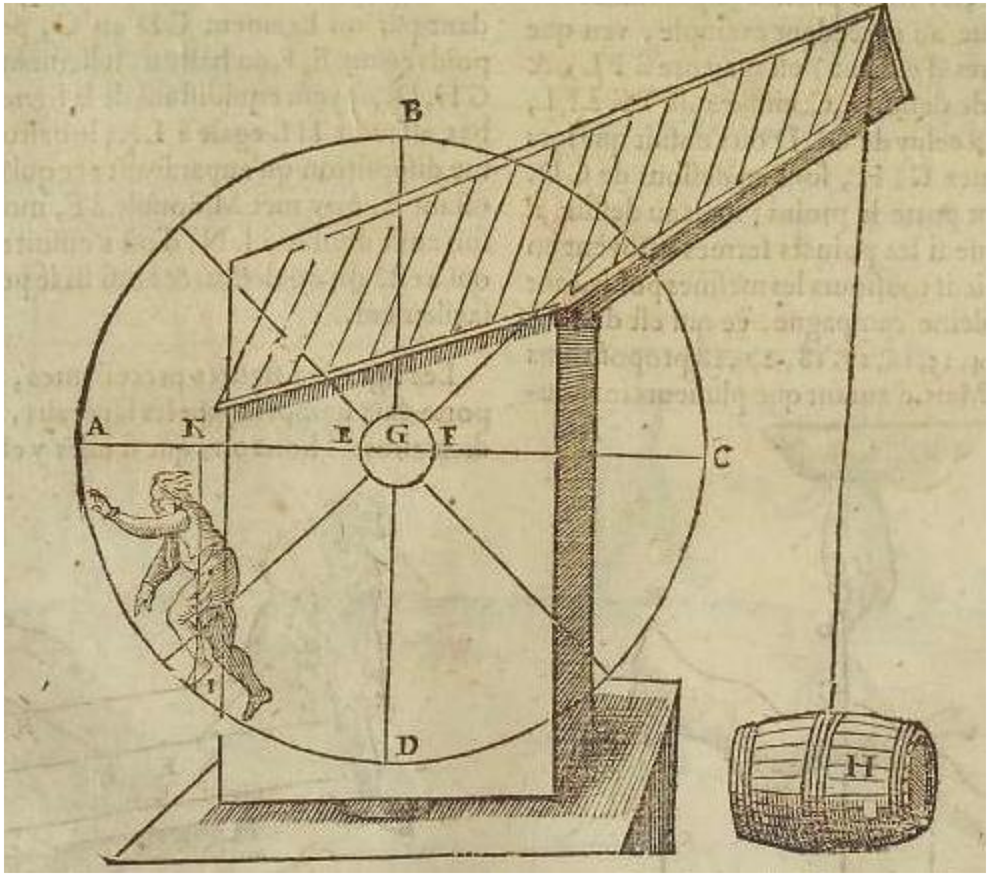


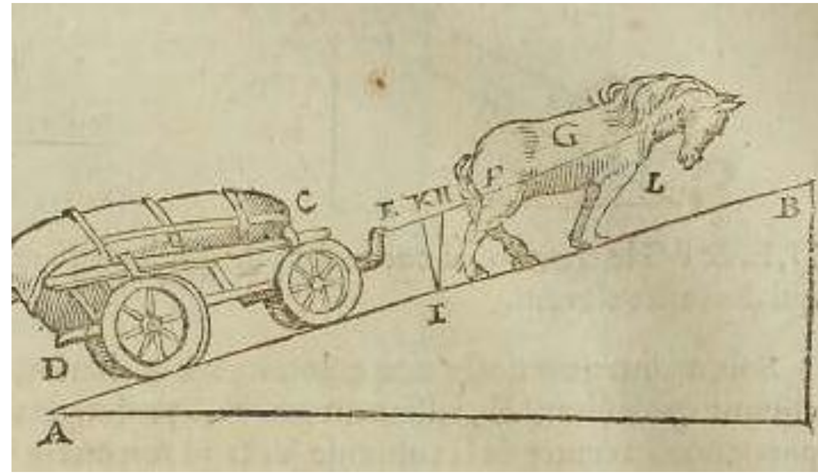
Это означает, что тот факт, что призма находится на наклонной плоскости, несущественен. Призма может опираться на любую опору. О чем и говорит рисунок внизу, на котором изображен «характеристический» треугольник ITV, стороны которого находятся в соответствующей пропорции.

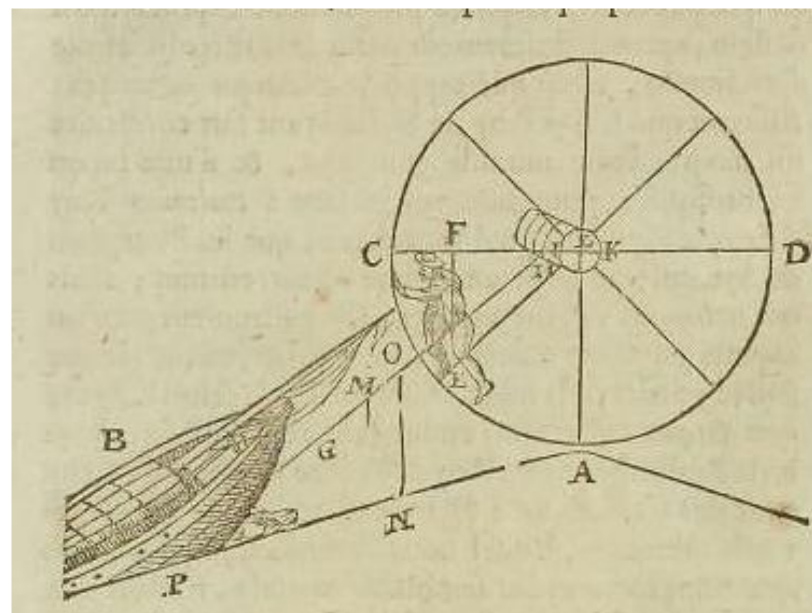


NB. Это рассуждение не корректно, т.к. точка I не является центром тяжести призмы (рис. внизу).

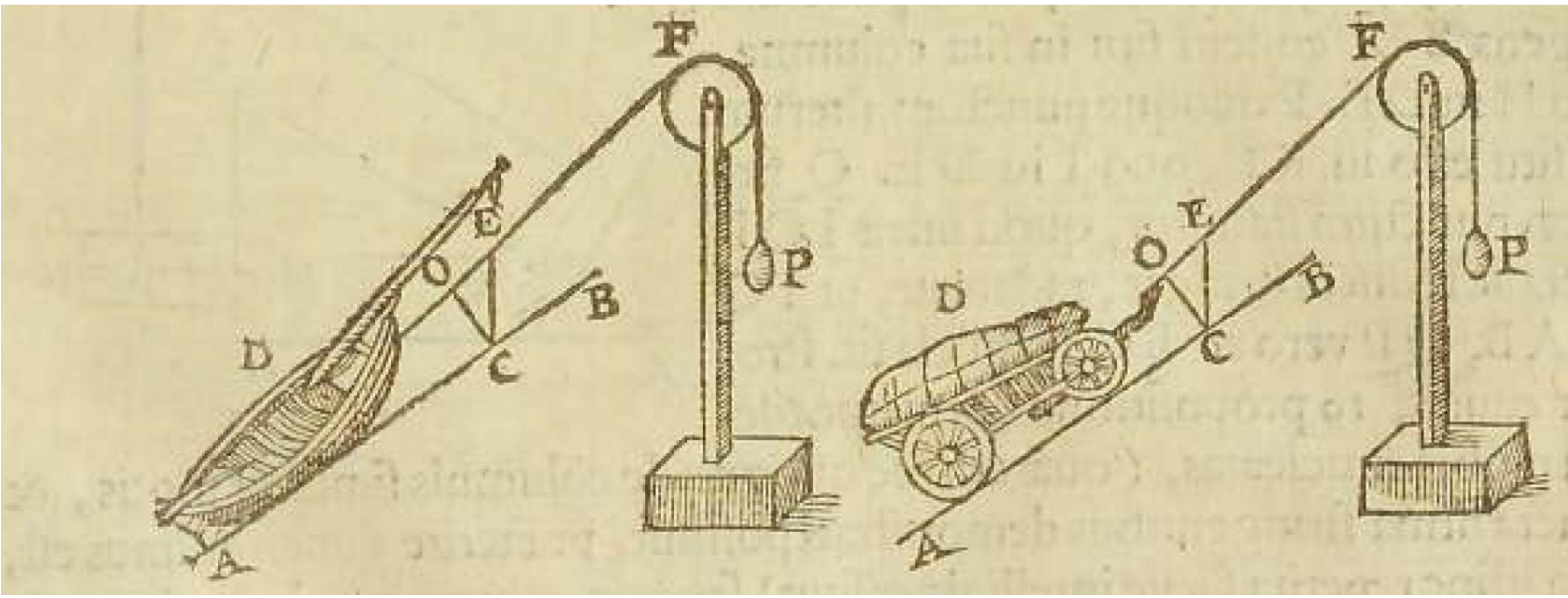
De Weeghdaet, 1586 («Практика взвешивания») – практическая статика



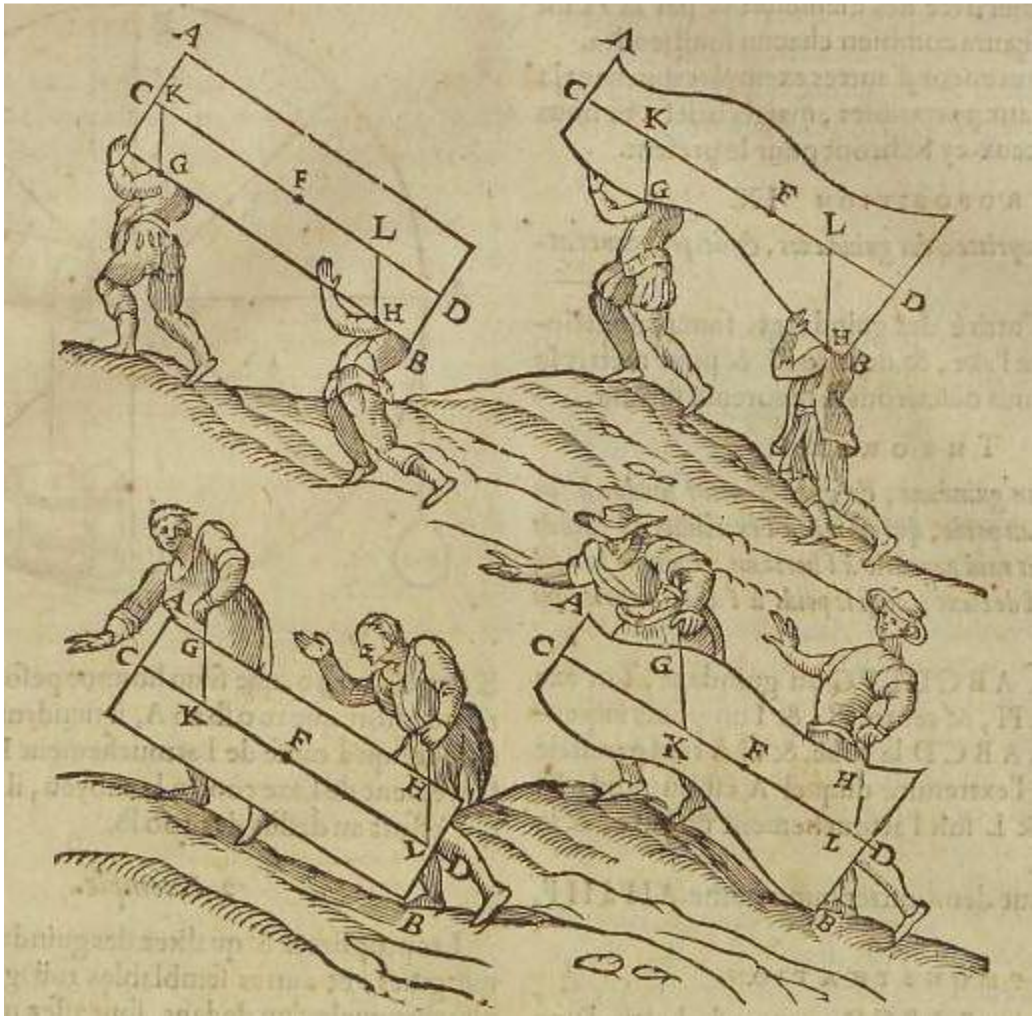


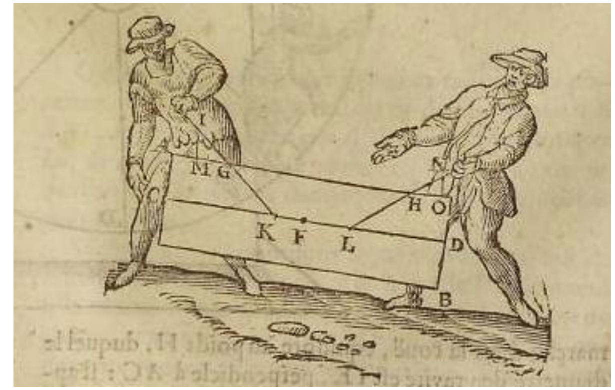


De Weeghdaet, 1586 («Практика взвешивания»)
Элементы (стороны) характеристического треугольник OEC дают ответ на вопрос о соотношении между силами



De Weeghdaet, 1586 («Практика взвешивания»)

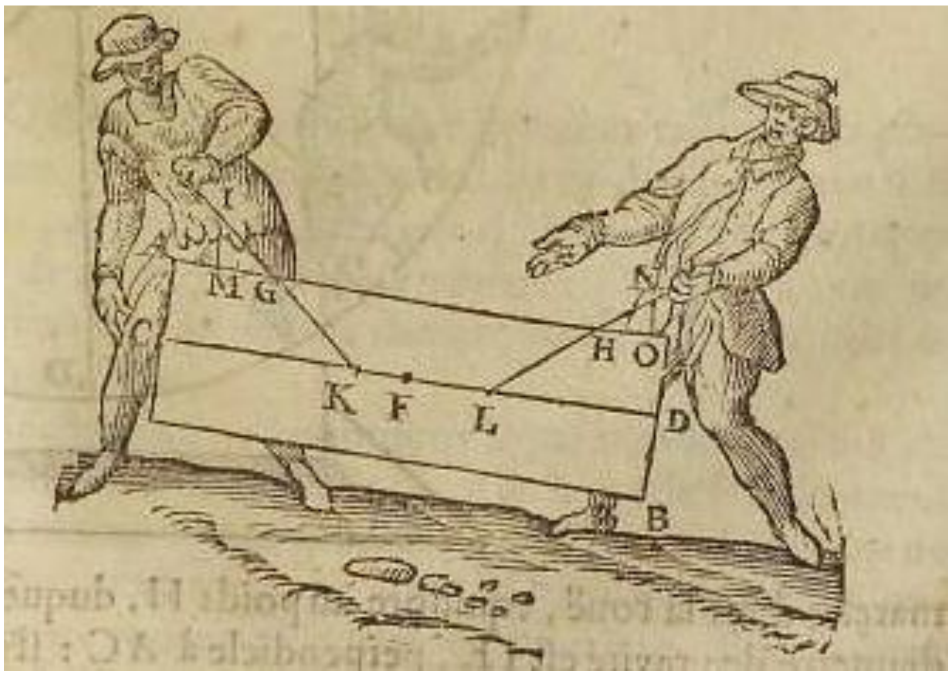


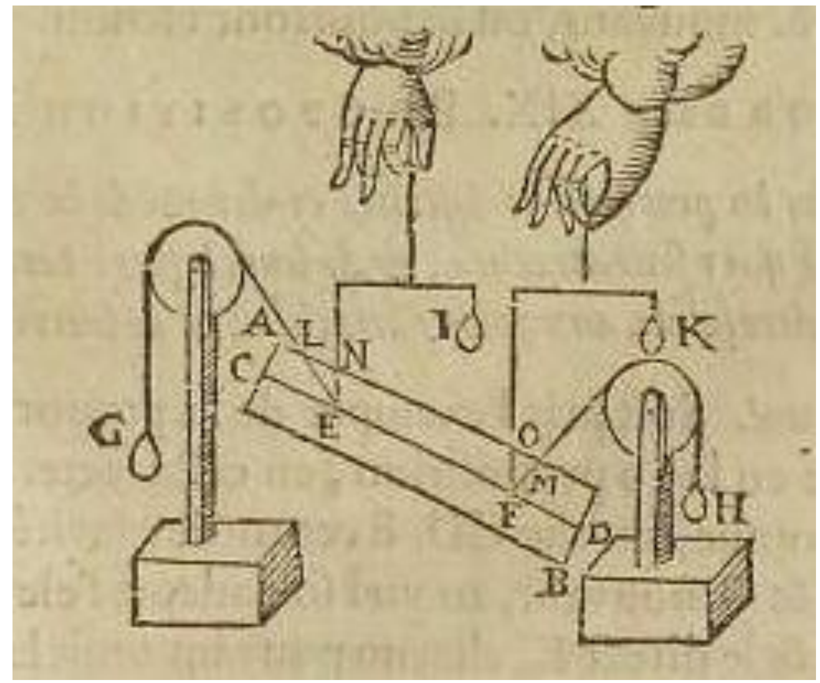


Задачи практической статики как источники теоретических задач. Пример преобразования практической задачи в теоретическую

«Практика взвешивания»
(практическая статика)

«Начала искусства взвешивания»
(теоретическая статика)

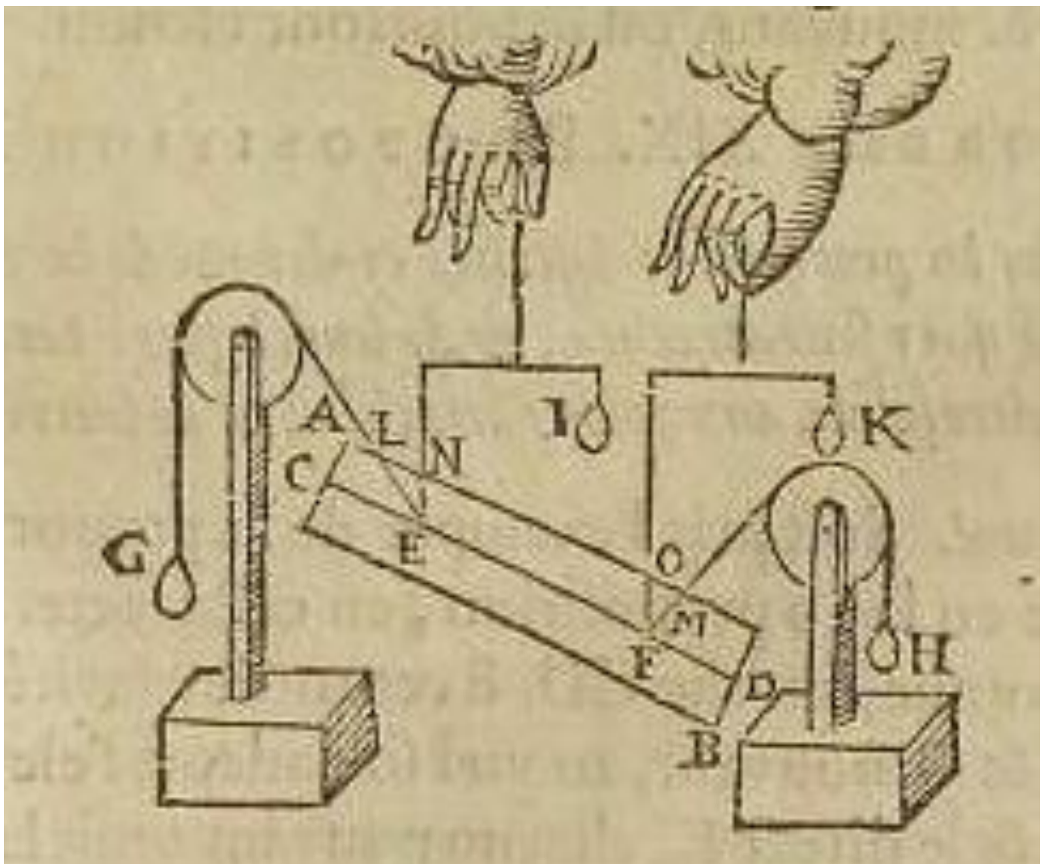


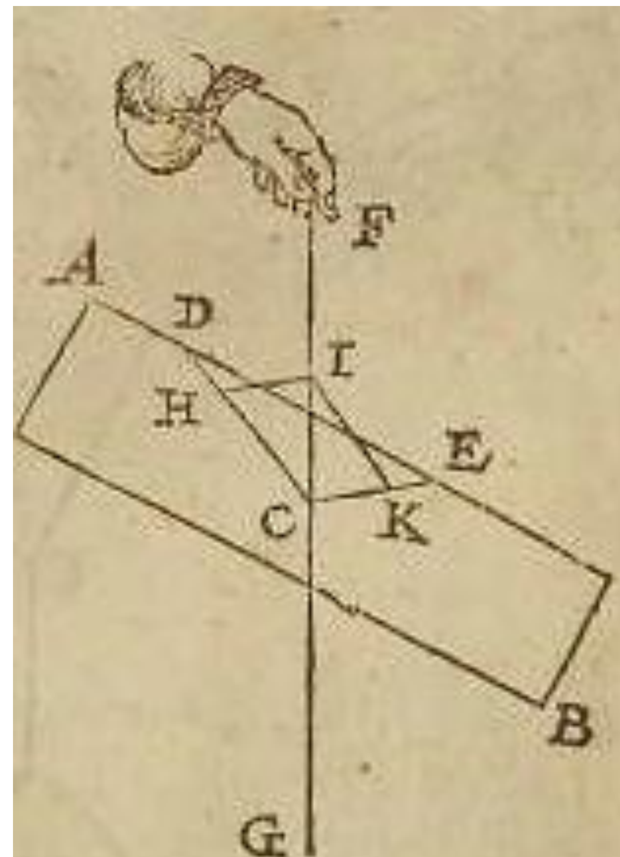


<u>Правило параллелограмма сил</u>

Требуется найти силу, равнодействующую наклонным силам EL и FM (рис. слева). Приложим обе эти силы к одной точке C, т.е. совместив точки E и F (рис. справа). На вертикали GF, проходящей через C, возьмем произвольную точку I. Из нее проведем прямые IK и IH параллельно DC и EC до пересечения с ними. Обозначим точки пересечения K и H.

Отношение отрезков CH и CK к отрезку CI равно отношению наклонных сил и равной им по действию вертикальной силе.





Золотое правило механики (1605)

Стевин:

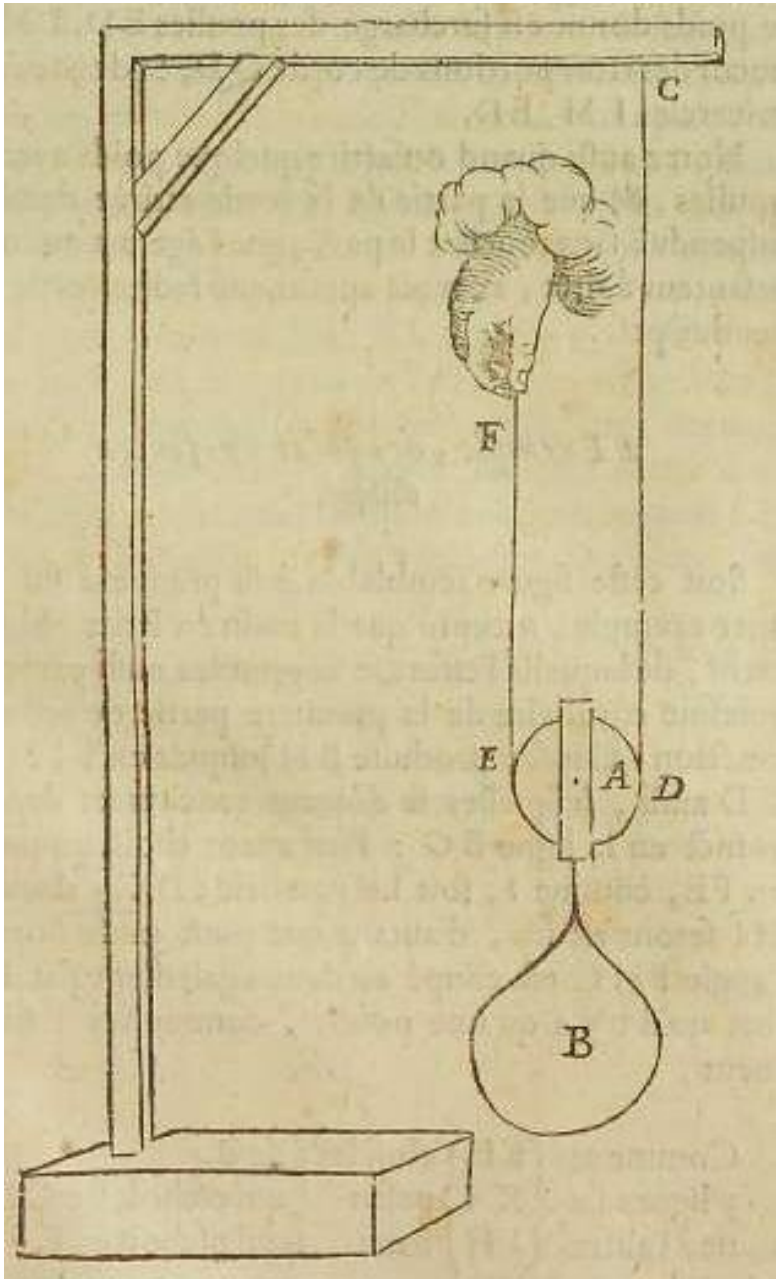
«Исследовать свойства тяжестей, поднимаемых при помощи полиспаста.

На рисунке изображен блок, к которому подвешен груз B; через блок перекинут канат CDEF, части которого, отрезки FE и CD, вертикальны и параллельны. Вес B будет в равной степени поддерживаться обеими частями каната EF и CD, потому что блок действует одинаково ту одну и на другую.

Таким образом, если кто-то будет исследовать величину веса B рукой, находящейся в точке F, то он, удерживая его в этом положении, будет на деле удерживать половину веса B.

Отсюда следует, что при помощи блока легче поднять вес, чем без него. Ибо в математике следуют общему правилу:

Путь, пройденный действующим (телом), так относится к пути, пройденному претерпевающим (телом), как сила претерпевающего к силе действующего».



Вопросы к лекции

О наклонной плоскости.

С точки зрения практической механики наклонная плоскость является наиболее элементарной в сравнении с другими «простыми машинами», которые использовались в античности для перемещения и поднятия тяжестей.

Почему механикам античности так и не удалась создать корректную теорию движения тел по наклонной плоскости? Решения Герона и Паппа Александрийского ошибочны с точки зрения классической механики.

Отметим, что в античности были освоены (и корректно доказаны) законы движения значительно более сложных с практической точки зрения машин – во́ротов и полиспастов (из нескольких блоков).

Почему корректная версия закона перемещения по наклонной плоскости была сформулирована и доказана только в эпоху научной революции XVII века (Стевин, Галилей, Декарт)?

Часть 3

Попытки увязки двух подходов к изучению равновесия: кинематического и геометрического

Принцип Э. Торричелли и гидростатика Б. Паскаля.

Э. Торричелли (1608-1647)
Портрет кисти Л. Липпи (ок. 1647)

Принцип Торричелли. Первая редакция

Трактат «О движении естественно падающих и брошенных тел» (1644)

«Два тяжелых тела (due gravi), соединенные вместе, не могут двигаться сами без того, чтобы их общий центр тяжести не опускался».

Обоснование

В самом деле, когда два тяжелых тела связаны друг с другом так, что движение одного влечет за собой движение другого,— безразлично, получается ли такая связь посредством весов, блока или другого механизма,— оба будут вести себя словно один груз, состоящий из двух частей; но такой груз никогда не придет в движение без того, чтобы его центр тяжести не опускался.

Стало быть, если груз расположен так, что его центр тяжести никак не может опускаться, он наверняка пребудет в покое в том положении, которое он занимает»

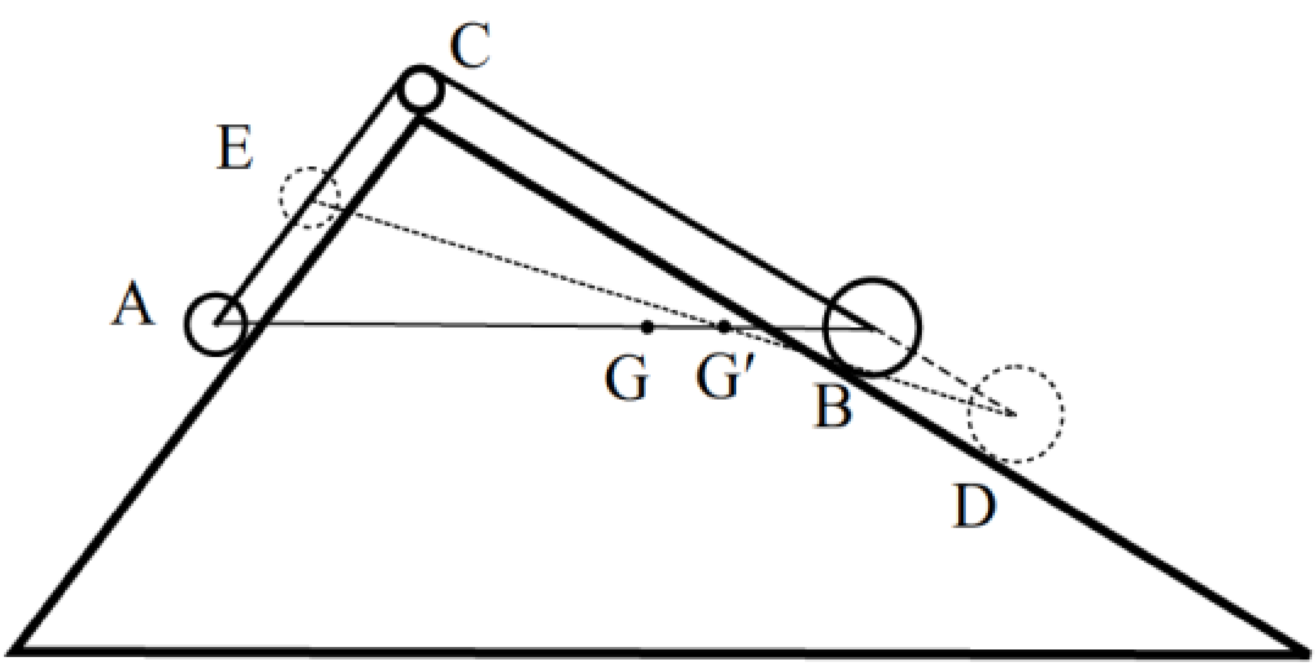
(Opere scelte, p. 158)

Вывод. Состояниями равновесия системы тяжелых тел, подчиненной тем или иным связям, могут быть только такие состояния, нарушение которых влечет за собой либо повышение высоты центра тяжести, либо пребывание центра тяжести на неизменной высоте».

Закон равновесия тяжелых шаров на наклонной плоскости (Opere scelte, p. 159)

Основное предложение

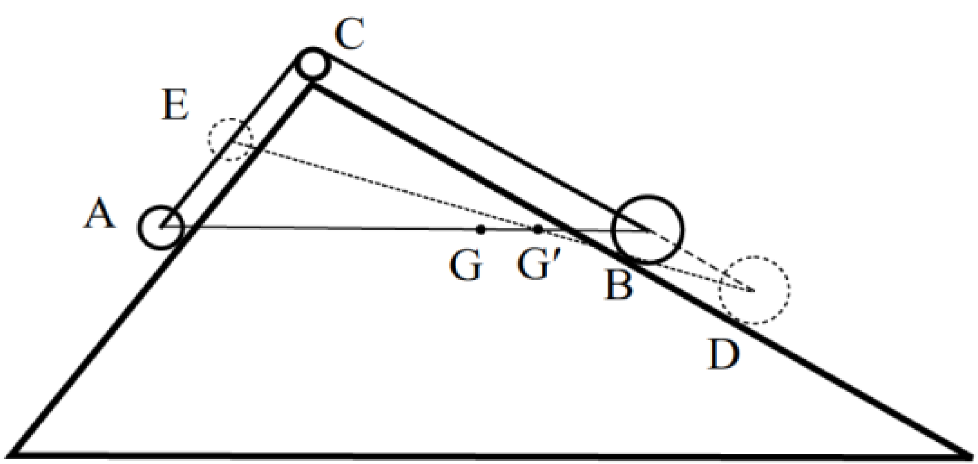
«Если два груза расположены на двух плоскостях разного наклона, но одинаковой высоты, и если веса этих грузов стоят друг к другу в том же отношении, что и длины этих плоскостей, момент обоих грузов будет одинаковый».



Закон равновесия тяжелых тел (шаров) на наклонной плоскости (продолжение).

Торричелли: «В самом деле, мы покажем, что их общий центр не может опускаться, ибо, какое бы движение ни было придано обоим грузам, этот центр всегда находится на той же горизонтальной линии...»

Рассуждение от противного: «допустим, что движение все-таки началось». Торричелли приводит это утверждение к противоречию.



Итак, предположим, что тела все-таки начали двигаться.

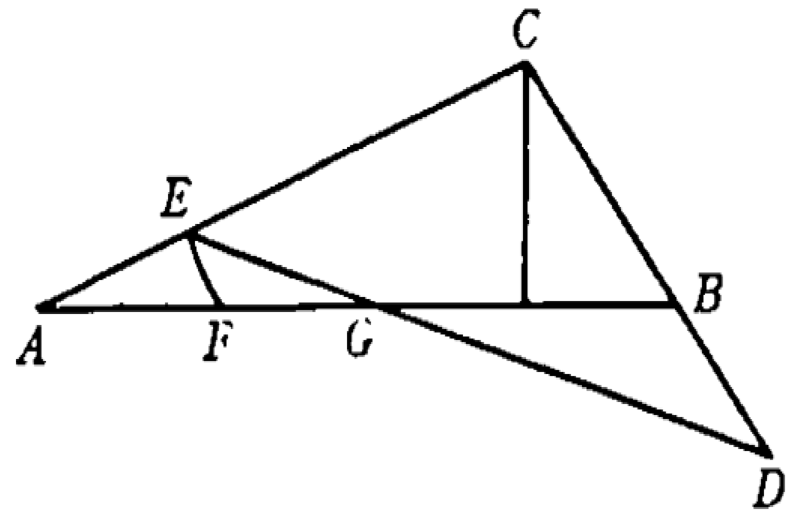
В этом случае – из чисто геометрических соображений – следует, что при этом их центр тяжести остается на той же горизонтальной прямой.

Задание. Доказать самостоятельно, что при движении грузов их центр тяжести будет находиться на прямой AB.

Указание: использовать подобие двух пар треугольников:

Δ AEF ~ ΔACB

Δ EFG ~ ΔDBG

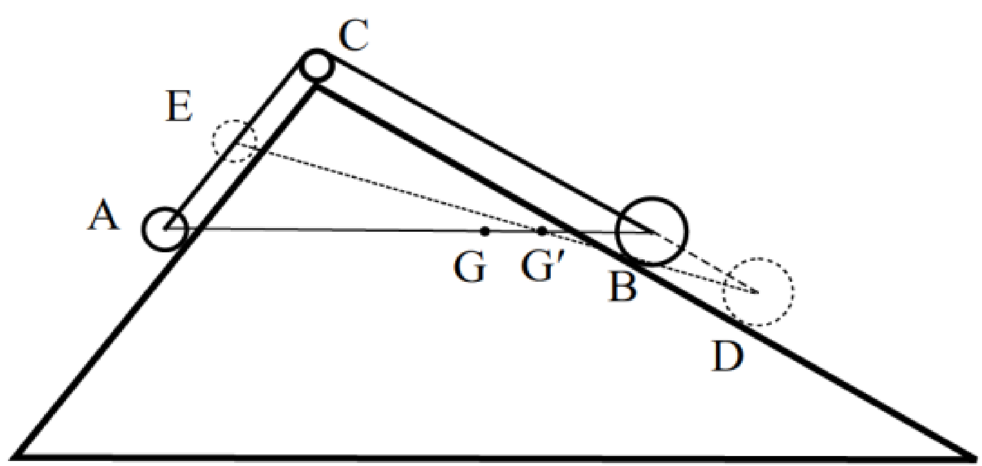


Закон равновесия тяжелых тел на наклонной плоскости (окончание доказательства)

Торричелли:

«Таким образом, два груза, связанные вместе, двигались бы, а их общий центр тяжести не опускался бы. Это было бы противно закону равновесия, выдвинутому нами в качестве принципа».

Получено противоречие



*Вторая редакция принципа Торричелли (устойчивое равновесие)

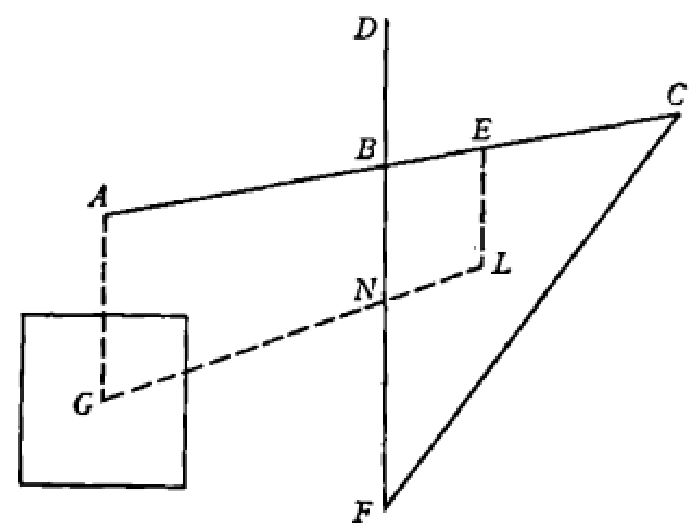
В сочинении «Об измерении параболы» закон равновесия дан в иной формулировке.

Здесь он служит одновременно и определением центра тяжести.

Формулировка принципа:

Природа центра тяжести такова, что «тело, свободно подвешенное в одной из своих точек, не сможет пребывать в покое, если центр тяжести не находится в самой низкой точке сферы, по которой оно движется».

Отсюда следует, что в момент равновесия центр тяжести находится на вертикали точки подвеса и ниже этой точки. В этом положении тело находится в устойчивом равновесии.



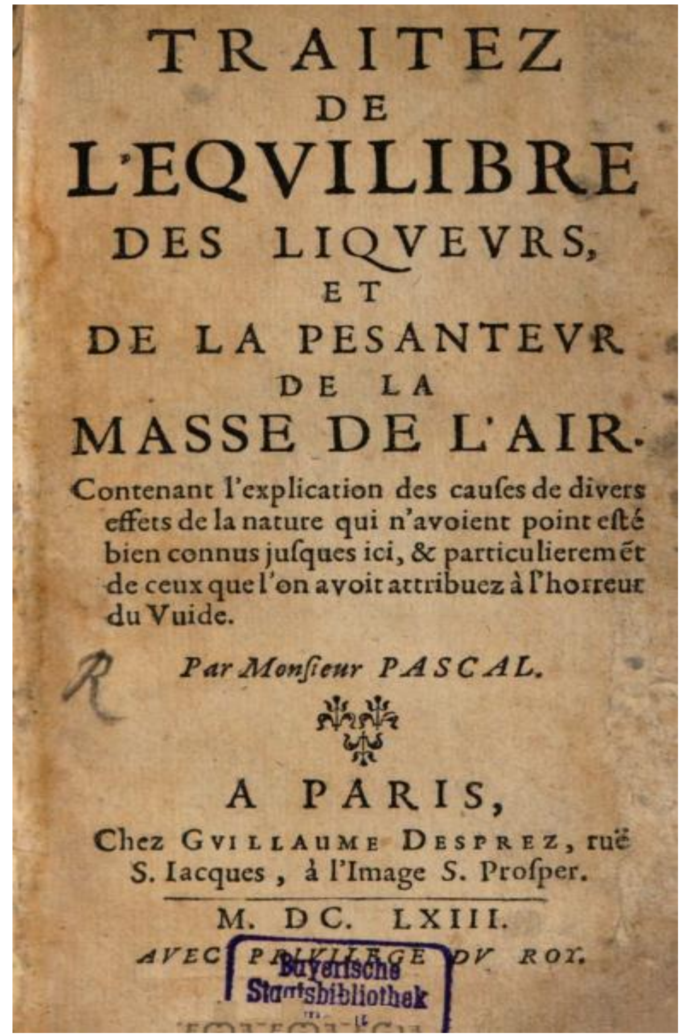
Замечание 1. Попытка приложения этого принципа к задаче о равновесии весов. Рис.

Замечание 2. Гипотеза «плоской Земли» vs гипотеза «сферической Земли». Вопрос : будет ли выполняться принцип Торричелли для сферической Земли?

Блез Паскаль (1623 –1662)

Портрет кисти неизвестного художника (XVII в.)

«Трактат о равновесии жидкостей» (1663)



TRAITEZ
DE
L'EQVILIBRE
DES LIQVEVRS,
ET
DE LA PESANTEVR
DE LA
MASSE DE L'AIR.

Contenant l'explication des causes de divers effets de la nature qui n'avoient point esté bien connus jusques ici, & particulieremét de ceux que l'on avoit attribuez à l'horreur du Vuide.

R

Par Monsieur PASCAL.

A PARIS,
Chez GVILLAUME DESPREZ, ruë S. Iacques, à l'Image S. Prosper.

M. DC. LXIII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

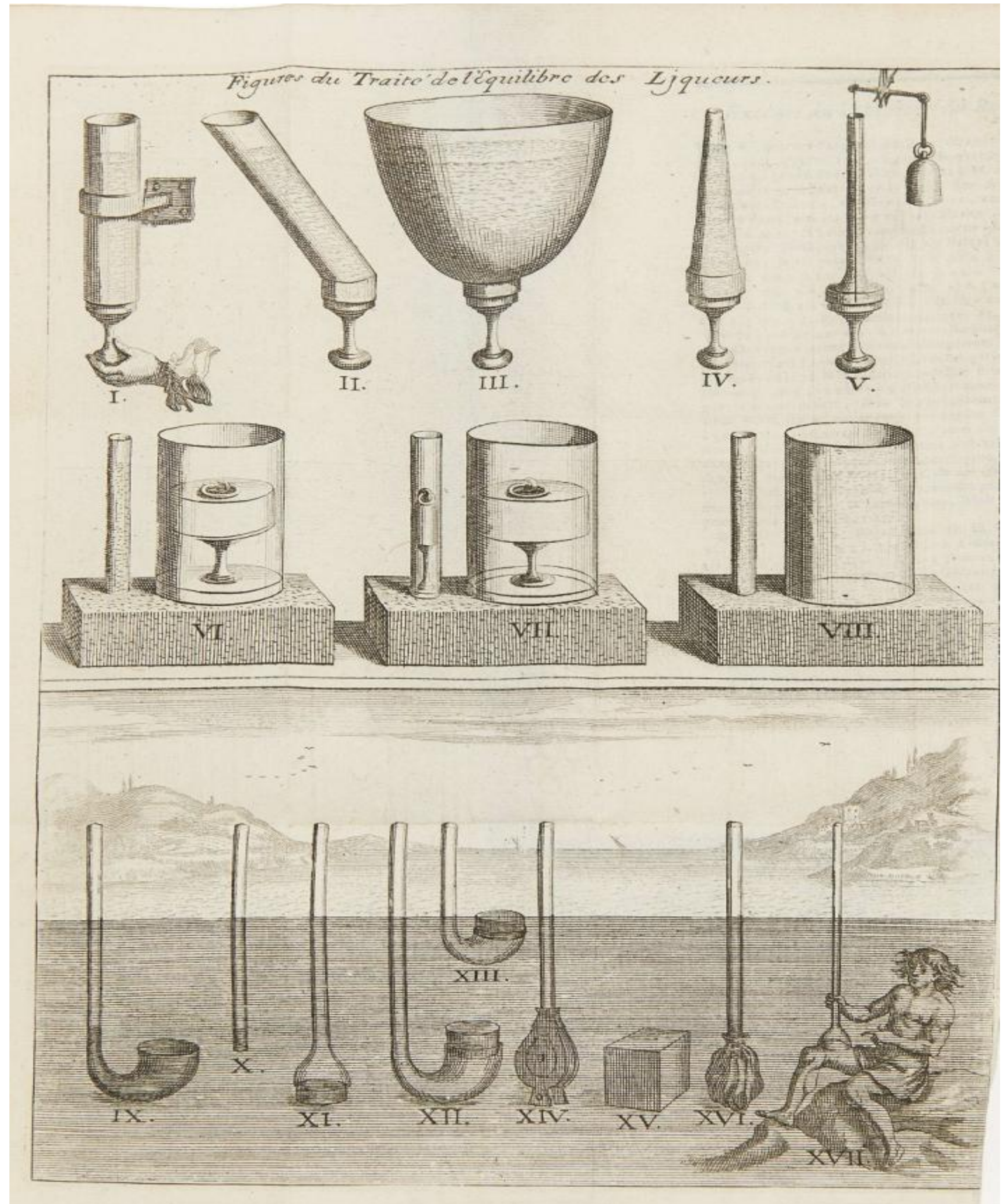
Полное название: «Трактат о равновесии жидкостей и о весе воздуха»(1663)

Основные достижения Паскаля в области механики:

1. Формулировка принципов гидростатического равновесия

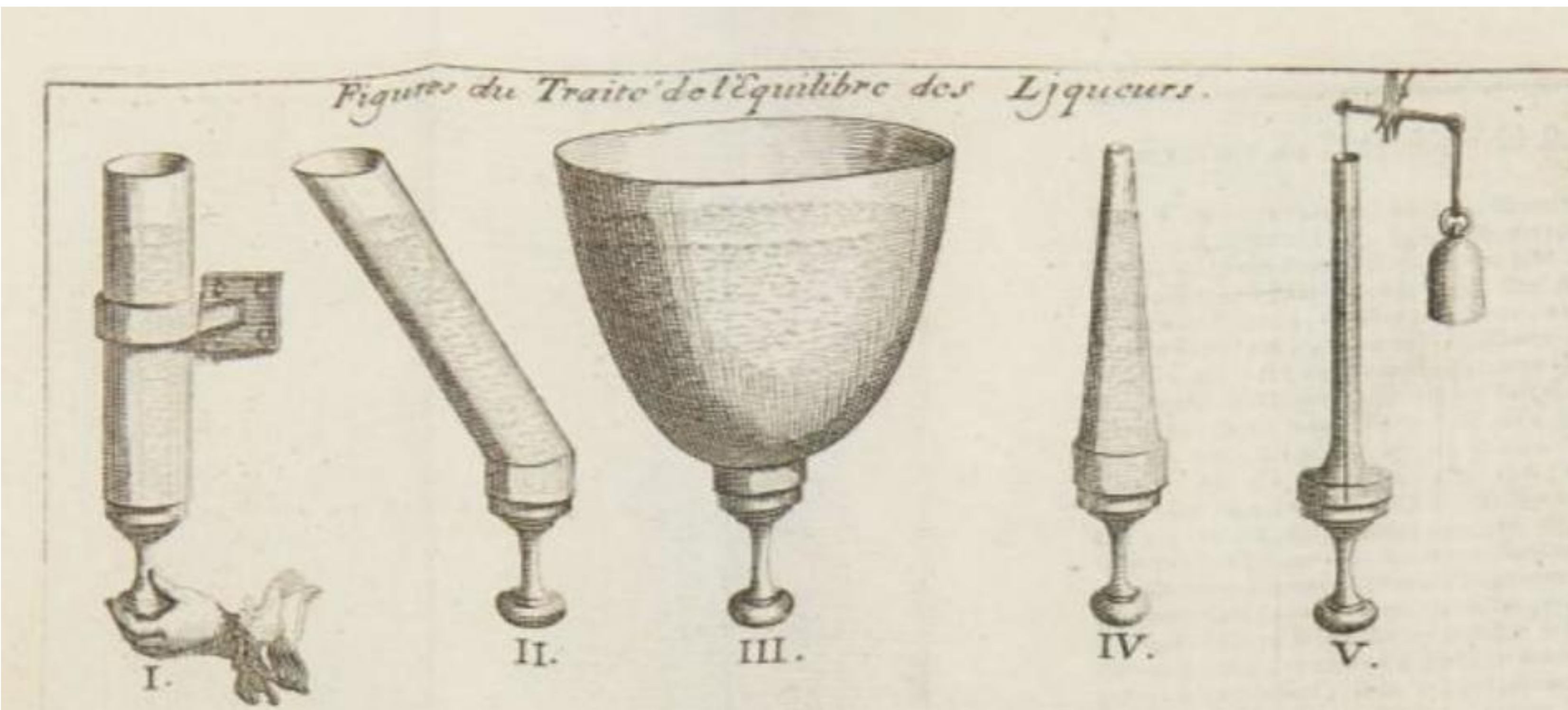
2. Открытие давления воздуха (отказ от идеи «боязни пустоты»)

В обоих областях – источником проблемы является техническое устройство – насос для подъема воды (нагнетательный и всасывающий)



Первое правило Паскаля «О том, что жидкости имеют вес, соответствующий высоте их стояния» (обосновывается опытным путем)

«Если прикрепить к стене несколько сосудов, один такой, как на фигуре первой, другой наклонный, как на второй, затем более широкий, как на третьей, потом узкий, как на четвертой, затем такой, который представляет собою не что иное, как узкую трубку, примыкающую внизу к широкому, но не имеющему почти высоты сосуду, как на фигуре пятой, наполнить их все водой до одинаковой высоты, сделать у всех внизу одинаковые отверстия, каковые закрыть пробками, чтобы удержать воду, то опыт покажет, что нужна одинаковая сила для того, чтобы воспрепятствовать этим пробкам выпасть, хотя вода в этих различных сосудах находится в весьма различных количествах».

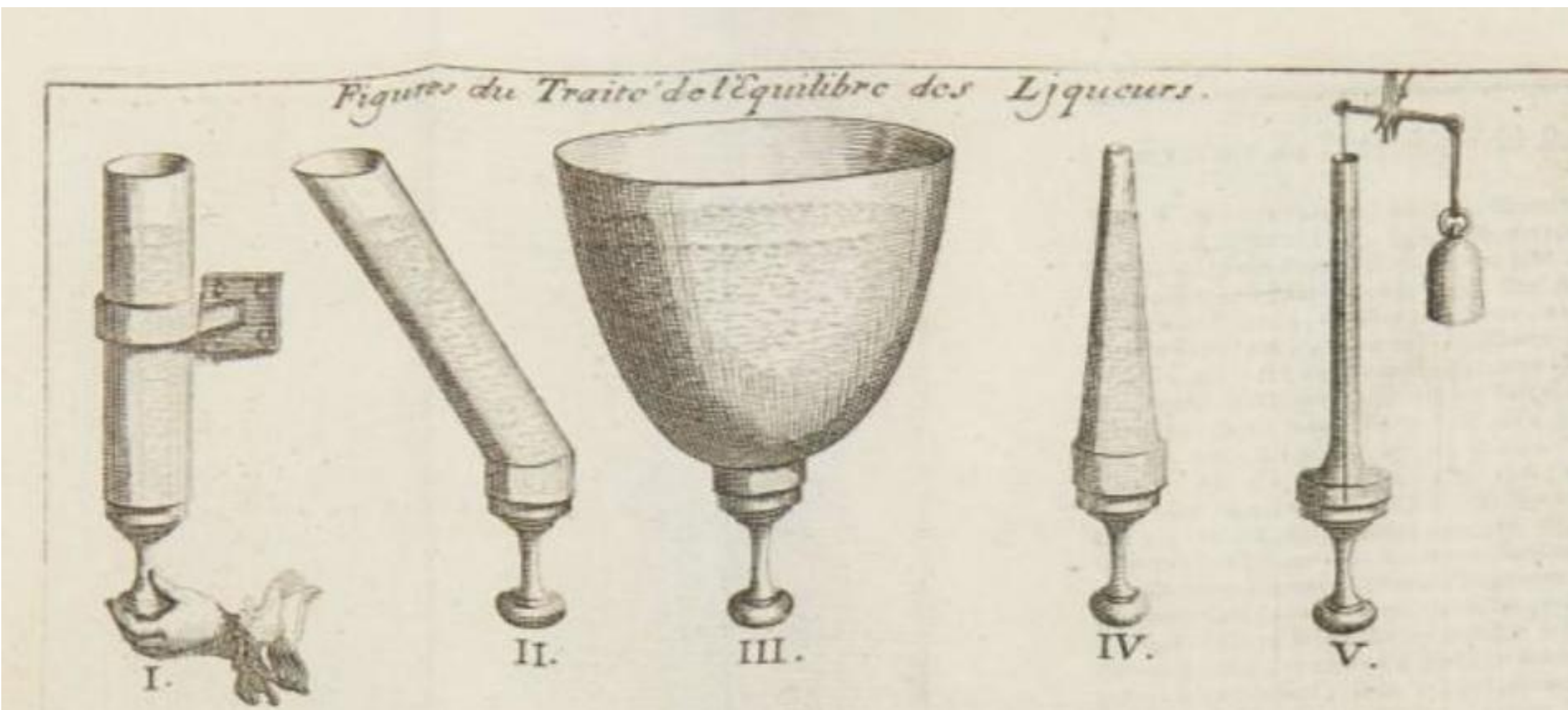


Первое правило Паскаля

Паскаль: «Происходит это потому, что вода имеет одинаковую высоту во всех сосудах, и мерой указанной силы является вес воды, содержащейся в первом сосуде, однородном по своей форме.

И если это количество воды весит сто фунтов, то нужна сила в сто фунтов, чтобы удержать каждую из пробок, даже и у пятого сосуда, хотя вода, заключенная в нем, не весит и одной унции».

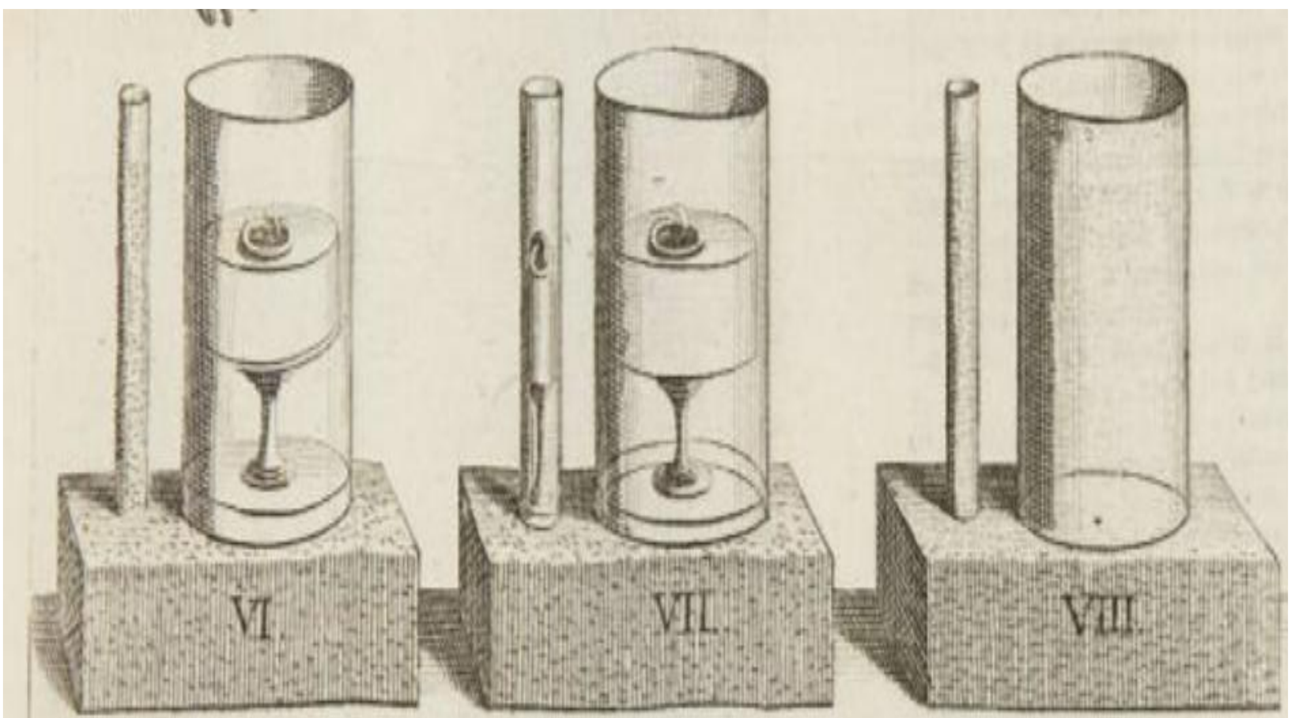
На рис. V показано устройство типа весов, при помощи которых измеряется сила, препятствующая пробке выпасть.



Второе правило Паскаля. Сообщающиеся сосуды

«… если вставить теперь в широкую трубку поршень, а в тонкую налить воды, то легко видеть, что на поршень надо будет положить большой груз, чтобы вес воды в тонкой трубке не вытолкнул его вверх, подобно тому как в первых опытах нужна была сила в сто фунтов, чтобы воспрепятствовать выталкиванию поршня вниз, когда и отверстие находилось внизу.

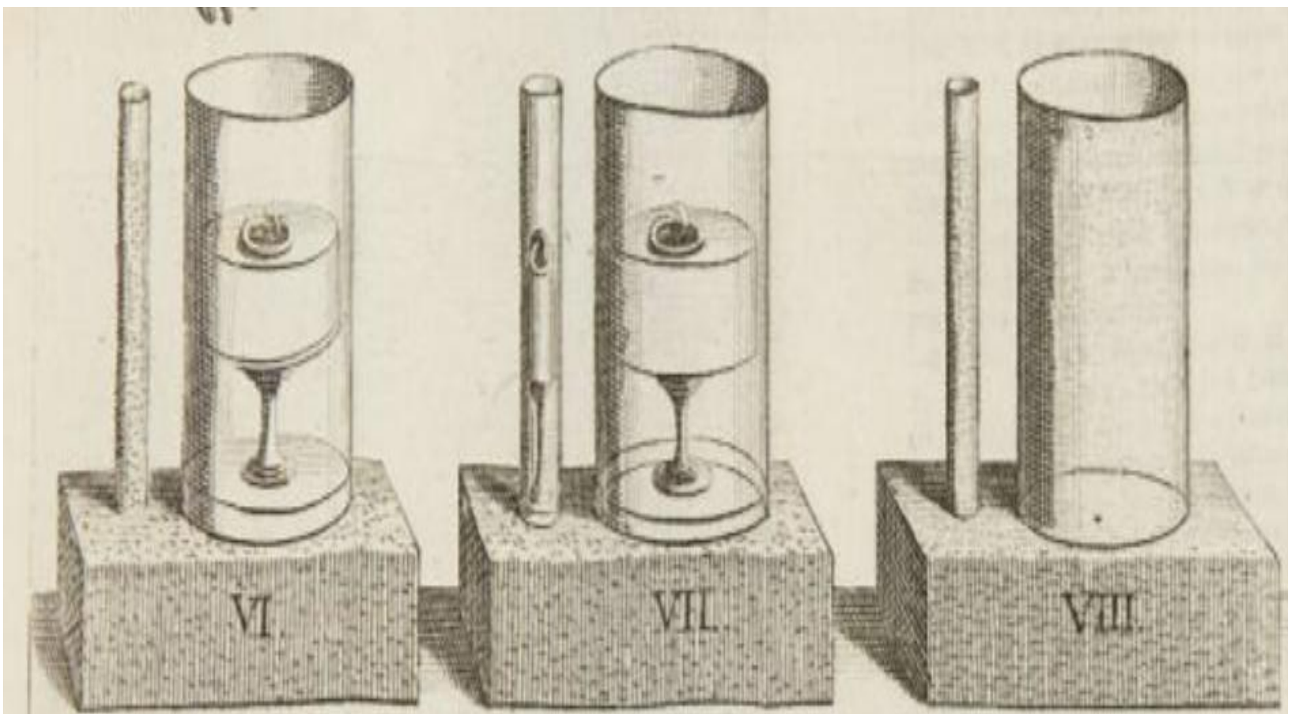
И если бы трубка, заполненная водой, была во сто раз шире или во сто раз уже, но вода стояла бы во всех случаях на одной высоте, то всегда понадобился бы один и тот же груз, чтобы уравновесить воду; как только груз этот будет уменьшен, вода опустится и поднимет уменьшенный груз». (Fig. VI)



Второе правило Паскаля

Формулировка:

«Если же налить году в трубку на двойную высоту, то для уравновешивания воды понадобится действие на поршень двойного груза; точно так же, если сделать отверстие, в которое вставлен поршень, вдвое большего размера, то надо сбудет удвоить и силу, необходимую для удержания удвоенного поршня. Отсюда видно, что сила, нужная для того, чтобы воспрепятствовать воде вытекать из отверстия, пропорциональна высоте стояния воды, а не ширине сосуда, и что мерой этой силы всегда является вес воды, заключающейся в колонне ее, с высотой, равной высоте стояния воды, и основанием, равным величине отверстия».



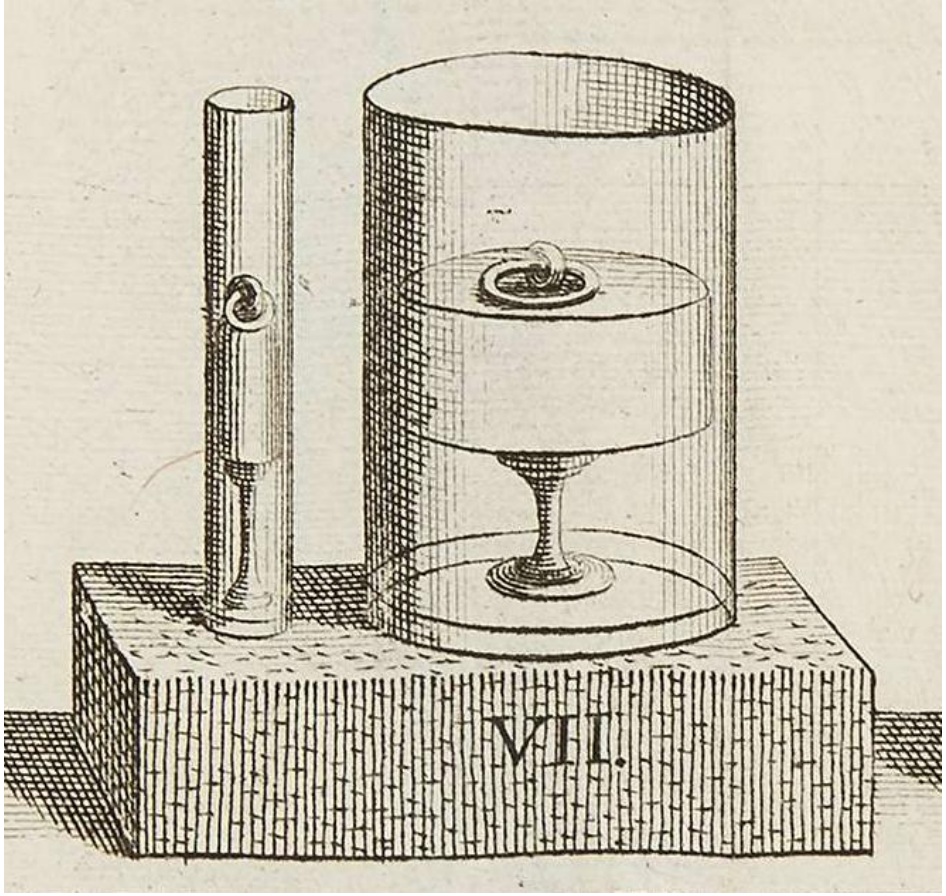
Третье правило Паскаля

Золотое правило механики в отношении жидкостей в сообщающихся сосудах

Паскаль предлагает «новый вид машин для увеличения сил (в дополнение к пяти «простым машинам»)

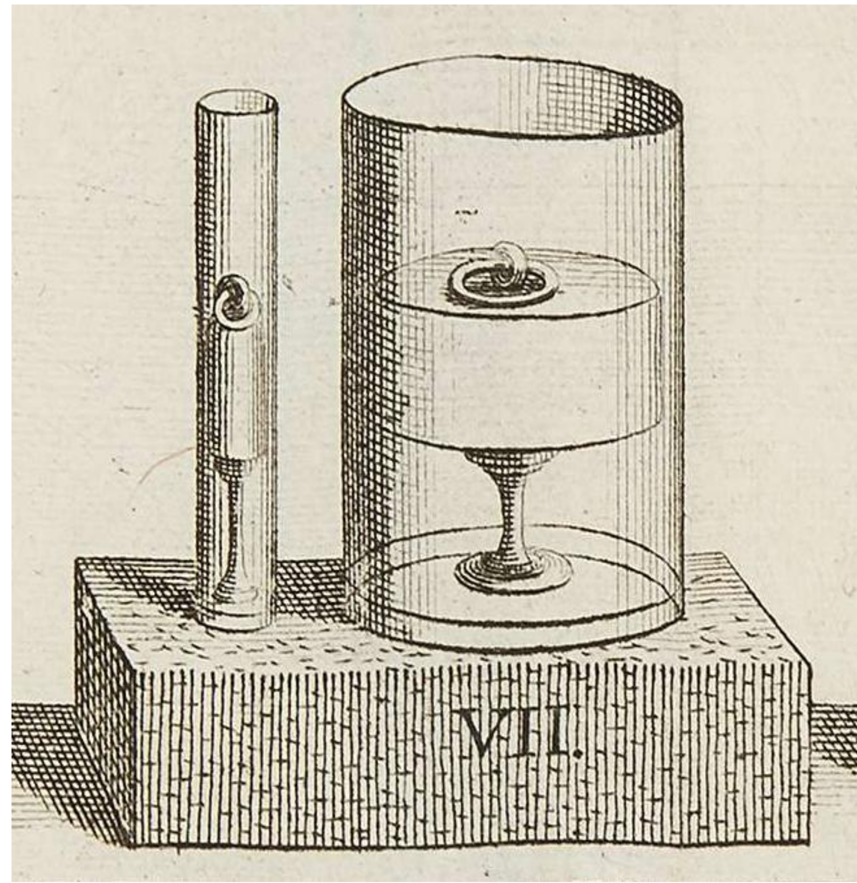
Утверждение:

«Если сосуд, наполненный водою и закрытый со всех сторон, имеет два отверстия, одно во сто раз больше другого, которые прикрыты точно пригнанными к ним поршнями, то один человек, надавливающий на малый поршень, уравновесит силу ста человек, надавливающих на поршень в сто раз больший, и преодолеет силу девяноста девяти (фиг. VII).



Третье правило
Золотое правило механики в применении к жидкостям в сообщающихся сосудах

Первое доказательство (применяется «золотое правило» механики)



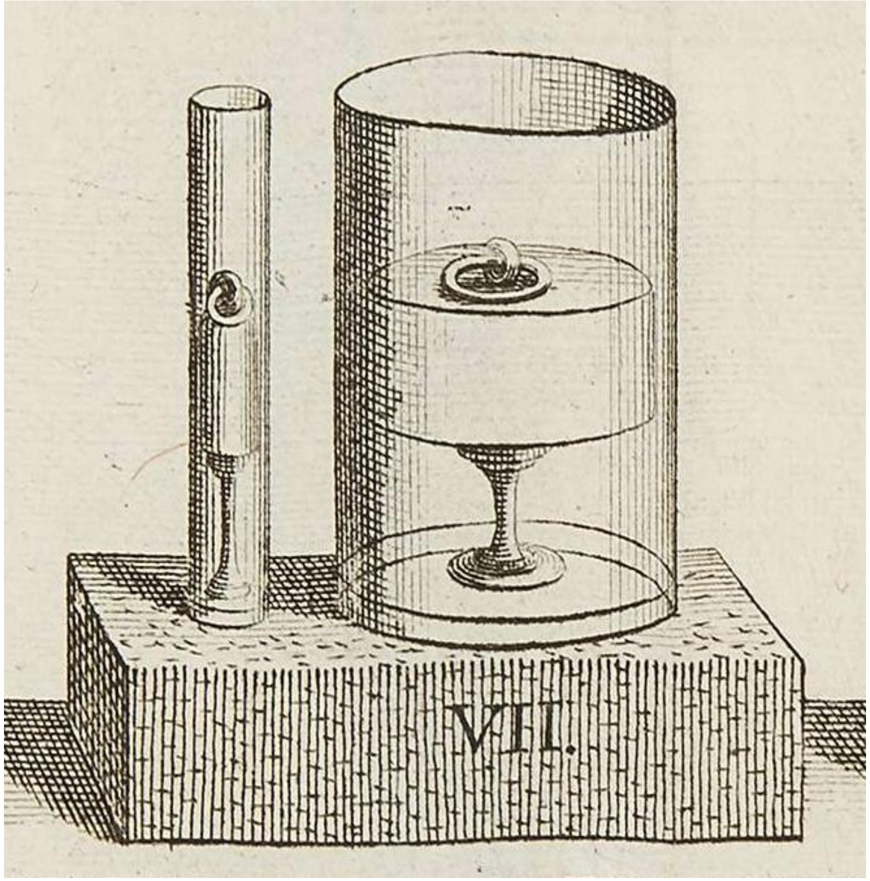
«И каково бы ни было отношение этих отверстий, всегда, когда силы, приложенные к поршням, относятся друг к другу, как отверстия, то силы эти будут в равновесии.

Отсюда следует, что сосуд, наполненный водою, является новым принципом механики и новой машиной для увеличения сил в желаемой степени, потому что при помощи этого средства человек может поднять любую предложенную ему тяжесть».

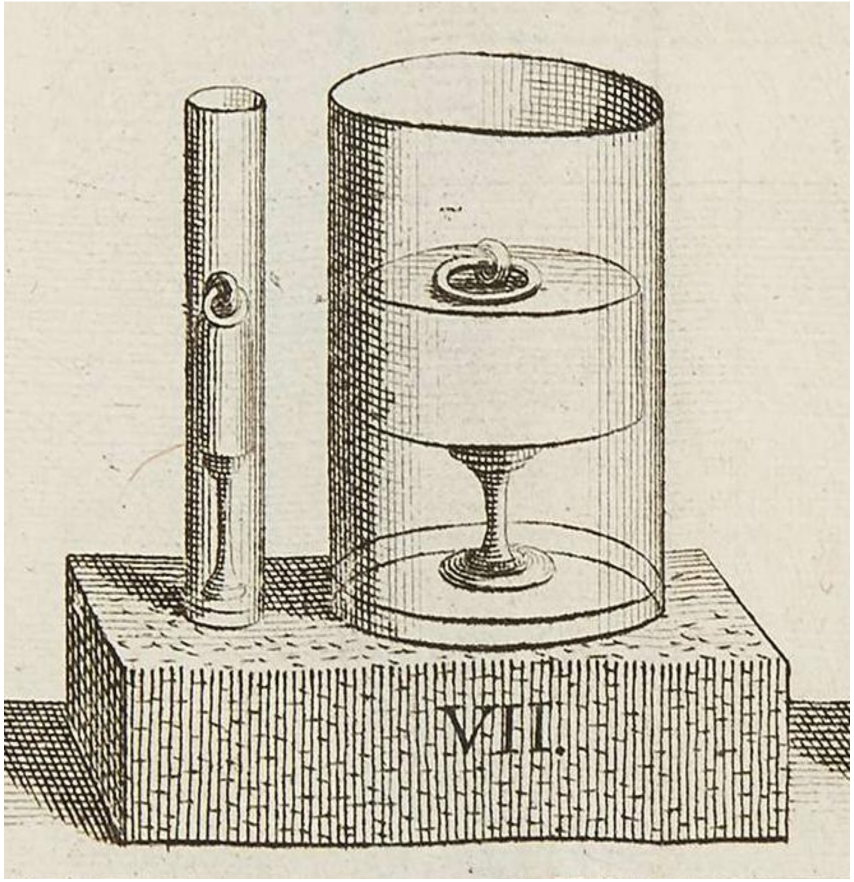
Третье правило Паскаля
Золотое правило механики в применении к жидкостям в сообщающихся сосудах

«Надо признать, что в этой новой машине проявляется тот же постоянный закон, который наблюдается и во всех прежних, как то: рычаге, блоке, бесконечном винте и т. д., и который заключается в том, что путь увеличивается в той же пропорции, как и сила.

Ибо очевидно, что если одно из этих отверстий во сто раз больше другого, то человек, который давит на малый поршень и опускает его на дюйм, вытолкнет другой поршень лишь на одну сотую часть дюйма».



Третье правило Паскаля



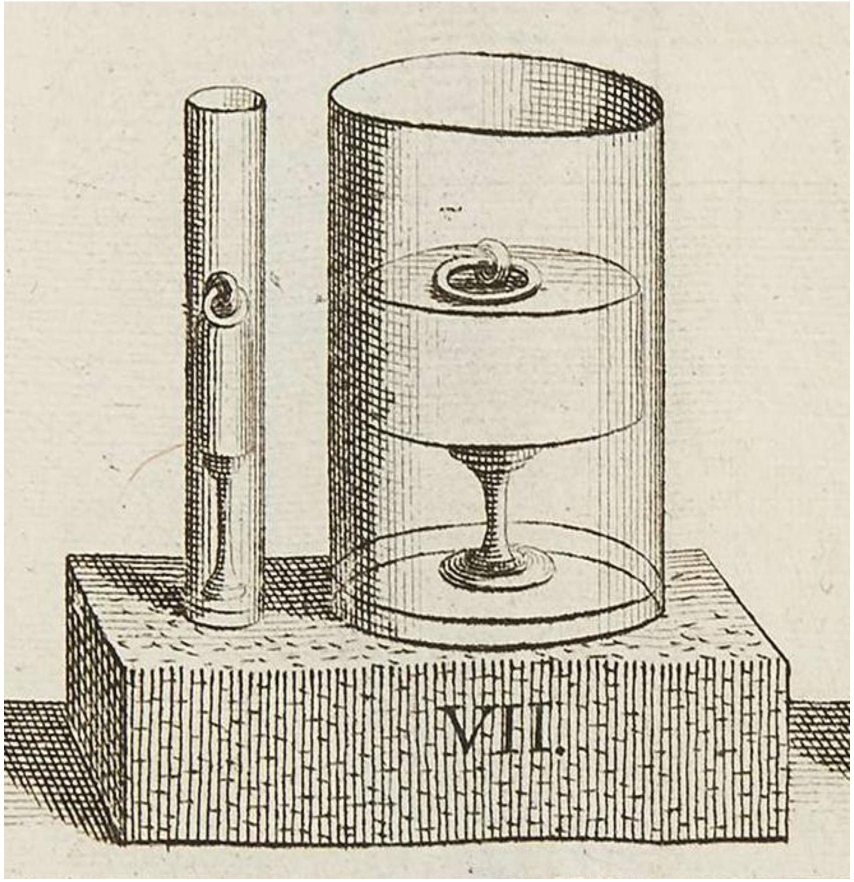
Разъяснение:

«В самом деле, этот толчок происходит вследствие непрерывности воды, соединяющей один поршень с другим и обусловливающей то, что один поршень не может двигаться, не толкая другого; поэтому, когда малый поршень продвинется на один дюйм, то вода, которую он вытеснил, встретит, толкая другой поршень, отверстие во сто раз большее и займет по высоте лишь сотую часть дюйма.

Таким образом путь относится к пути, как сила к силе».

Четвертое правило Паскаля = аналог принципа Торричелли

Это правило Паскаль использует во втором (альтернативном) доказательстве предыдущего утверждения.



«Вот еще доказательство, которое будет понятно только одним геометрам и может быть опущено другими.

Я принимаю за принцип, что никогда тело не движется под действием своего веса без того, чтобы центр тяжести его не понижался.

Отсюда я вывожу, что два поршня, изображенные на фиг. VII, находятся в равновесии».

Доказательство четвертого правила

«Действительно, их общий центр тяжести лежит в точке, которая делит линию, соединяющую их частные центры тяжести, в отношении их весов; пусть теперь эти поршни, если только это возможно, сдвинутся; при этом их пути будут относиться между собою, как мы уже показали, обратно их весам.

Но если отыскать общий центр тяжести их для этого второго положения, то он окажется в том же точно месте, как и в первом случае, потому что он всегда лежит в точке, которая делит линию, соединяющую их частные центры тяжести, в отношении их весов; таким образом вследствие параллельности направлений их путей он всегда будет находиться на пересечении двух линий, соединяющих центры тяжести их в двух положениях.

[Задание: доказать это утверждение самостоятельно].

Следовательно, общий центр тяжести будет находиться в той же точке, как и прежде, и потому два этих поршня, рассматриваемые как одно тело, должны бы были сдвинуться без понижения их общего центра тяжести; это, однако, противоречит принципу, и потому они сдвинуться не могут, а должны оставаться в покое, т. е. в равновесии, что и требовалось доказать».

Паскаль о всеобщем характере четвертого правила

«Этим методом я доказал в небольшом *Трактате по механике* причину всех увеличений сил, которые имеют место во всяких других механических приборах, изобретенных до сего времени.

Ибо я нахожу повсюду, что неравные грузы, находящиеся в равновесии и обусловливающие выгодность применения машин, располагаются благодаря самому устройству этих последних таким образом, что общий центр тяжести грузов не может никогда понизиться, какое бы положение они ни занимали.

Отсюда следует, что они должны оставаться в покое, т. е. в равновесии».