Лекция 26

Вера Николаевна Чиненова

V.chinenova@yandex.ru

Аналитическая механика Лагранжа

Уравнения Лагранжа второго рода

«Аналитическая механика» (1788, 1811 – 2-е изд.)

- «Динамика - это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о переменных движениях, которые они должны вызывать»

Общая формула динамики

- Лагранж применяет принцип виртуальных перемещений к потерянным силам, которые (по Даламберу) пребывают в равновесии. Он неявно считает связи идеальными, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \delta r_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0$$

X_i, Y_i, Z_i проекции результирующей активных сил в каждой точке на декартовы оси координат, $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ проекции ускорения точки в той же системе.

«Аналитическая механика» (1788)

Дифференциальные уравнения первого рода для **голономной системы**

$$X_i - m_i \ddot{x}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \ldots = 0,$$

$$Y_i - m_i \ddot{y}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \ldots = 0$$

$$Z_i - m_i \ddot{z}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \ldots = 0$$

«Аналитическая механика» (1788)

Кроме *3n* неизвестных x_i, y_i, z_i

как функций *t*, для определения множителей Лагранжа $\lambda, \mu, \nu \ldots$

привлекаются *k* уравнений связей

$$L(x_i, y_i, z_i) = 0 \qquad M(x_i, y_i, z_i) = 0$$

- Заметим, что связи, рассматриваемые Лагранжем при выводе обеих форм дифференциальных уравнений, в современной терминологии являются геометрическими или голономными, что видно из контекста.

«Аналитическая механика» (1788)

Анализируя процесс вывода этих уравнений, легко видеть, что изучение движения механической системы материальных точек методом уравнений Лагранжа 1-го рода тем труднее, чем больше наложено на нее связей и чем большее число материальных точек входит в рассматриваемую механическую систему.

Поэтому этот способ решения задач целесообразно применять только в том случае, когда число точек системы и число наложенных связей невелико.

При изучении движения твердых тел и в других аналогичных случаях удобнее вместо декартовых координат, определяющих положение точек системы, ввести в рассмотрение **обобщенные координаты, число которых равно числу степеней свободы.**

Так как число степеней свободы тем меньше, чем больше наложено на систему связей, то число обобщенных координат уменьшается с увеличением числа налагаемых связей.

«Аналитическая механика» (1788)

По существу метод неопределенных множителей имеет в виду дать сразу ответ на очень большое число вопросов. Ведь, решая динамическую задачу методом уравнений Лагранжа 1-го рода, мы получаем и закон движения каждой точки системы, и реакции всех наложенных на систему связей.

Применяя метод обобщенных координат, мы, пользуясь большим числом ограничений, налагаемых связями, принципиально упрощаем рассмотрение, изучая некоторые интегральные характеристики движения системы.

Детали движения отдельных точек познаются в новом методе после исследования интегральных характеристик. Реакции связей при изучении движения методом обобщенных координат полностью исключены.

Таким образом, трудности, вносимые большим числом связей в методе неопределенных множителей, становятся источником преимуществ в методе обобщенных координат.

«Аналитическая механика» (1788)

- **Обобщенными координатами системы называют независимые друг от друга величины, вполне и однозначно определяющие положения системы в произвольно выбранное мгновение.**
- *Обобщенны координаты*. Положение в пространстве свободной материальной точки определяется тремя координатами, независимыми друг от друга. Такая точка имеет три степени свободы. Для определения положения в мгновение t системы, состоящей из n свободных точек, необходимо $3n$ координат.
- Если система не свободна, то связи, наложенные на систему, выражают некоторые зависимости между координатами ее точек, а поэтому число независимых друг от друга координат, определяющих положение в данное мгновение всех точек несвободной системы, меньше чем $3n$.

«Аналитическая механика» (1788)

- Под обобщенными координатами системы мы понимаем независимые друг от друга величины, обычно имеющие размерность *длины* и определяющие полностью и однозначно возможные положения системы в данное произвольно выбранное мгновение.

(Но встречаются случаи, когда обобщенные координаты имеют размерность площади или объема, или других геометрических или даже механических величин).

«Аналитическая механика» (1788)

- Декартовы координаты точек системы связаны с обобщенными координатами определенными уравнениями. Они являются функциями обобщенных координат и, возможно, времени.
- Так, если положение системы *n* точек определяется *s* обобщенными координатами $(q_{1,}\ q_{2,}\ \ldots q_s,\ t)$), то эти уравнения в параметрической форме имеют вид (*):

$$x_k = x_k(q_{1,}\ q_{2,} \ldots q_s,\ t);$$
$$y_k = y_k(q_{1,}\ q_{2,} \ldots q_s,\ t);$$
$$z_k = z_k(q_{1,}\ q_{2,} \ldots q_s,\ t),$$
$$k = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

- Если на систему наложены только *голономные связи*, *то* ***число обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы***.

Заметим, что к неголономным системам это правило не относится.

«Аналитическая механика» (1788)

- В прикладной механике большое значение имеют полносвязные системы, т. е. механические системы с одной степенью свободы. К числу таких систем относится большинство механизмов.
- Чтобы определить положение полносвязной системы, достаточно одной обобщенной координаты.
- **Примеры.**
- Тело с двумя неподвижными точками имеет одну степень свободы: оно может поворачиваться вокруг неподвижной оси, проходящей через эти закрепленные точки. Для определения положения тела, занимаемого им в данное мгновение, нужна лишь одна обобщенная координата, например угол поворота Ψ.
- Тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы и его положение определяют тремя обобщенными координатами, например тремя углами Эйлера.

«Аналитическая механика» (1788)

- Обобщенные координаты, как и всякие координаты, характеризуют положение неподвижной системы или положение движущейся системы, занимаемое ею в данное мгновение. Чтобы охарактеризовать движение системы, надо выразить обобщенные координаты как непрерывные однозначные функции времени. Изменение каждой обобщенной координаты характеризует соответствующее изменение в положении системы.
- Поскольку обобщенные координаты независимы друг от друга, то элементарные приращения этих координат δq_1, δq_2, … , δq_s так же независимы.
- При этом каждая из этих величин определяет соответствующее, не зависимое от других возможное перемещение системы.

«Аналитическая механика» (1788)

- **<u>Обобщенная скорость</u> выражается первой производной от обобщенной координаты по времени.**

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}.$$

- Полученная величина является пространственно-временной характеристикой изменения одной из обобщенных координат. Ее называют обобщенной скоростью, соответствующей данной координате. Каждой обобщенной координате соответствует своя обобщенная скорость, поэтому число обобщенных скоростей в системе равно числу обобщенных координат. Обобщенная координата обычно выражается длиной или углом, соответственно этому обобщенная скорость может иметь размерность либо скорости точки, либо угловой скорости тела.

«Аналитическая механика» (1788)

- **Обобщенной силой** называют скалярную величину, равную отношению суммы виртуальных работ всех сил системы при изменении только одной из обобщенных координат к вариации этой координаты.
- Пусть положение механической системы в данное мгновение t определяется обобщенными координатами $(q_1, q_2, \dots q_s)$.
- Дадим одной из координат q_i мысленно бесконечно малое изменение δ, сохранив для всех остальных обобщенных координат то значение, которое они в данное мгновение имеют. Вследствие изменения одной из обобщенных координат материальные точки системы получат мысленные бесконечно малые перемещения, а приложенные к этим точкам силы произведут виртуальную работу:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k).$$

«Аналитическая механика» (1788)

Сумма работ всех реакций на данном виртуальном перемещении равна нулю (так как связи предполагаем идеальными), поэтому написанная сумма выражает работу всех активных сил системы. Найдем вариации декартовых координат точек системы, соответствующих приращению δq обобщенной координаты q_i при фиксированном (неизменном) значении других обобщенных координат:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\delta q_i, \quad \delta y_k = \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\delta q_i, \quad \delta z_k = \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\delta q_i.$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}(X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i.$$

«Аналитическая механика» (1788)

- Эту сумму виртуальных работ всех сил (или, что то же, всех активных сил), приложенных к системе, при изменении только одной из обобщенных координат q_i мы можем записать как произведение вариации δq_i, этой координаты на скалярную величину

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right),$$

  называемую **обобщенной силой**, соответствующей координате q_i.
- Если мы дадим воображаемое приращение какой-либо другой из обобщенных координат этой системы при фиксированном значении всех остальных обобщенных координат, то совершенно аналогично получим выражение обобщенной силы, соответствующей этой второй обобщенной координате.

«Аналитическая механика» (1788)

- Таким образом, в системе столько же обобщенных сил, сколько в ней обобщенных координат.
- Размерность обобщенной силы равна размерности работы, поделенной на размерность обобщенной координаты, а эта последняя обычно имеет размерность длины или угла. Следовательно, обобщенная сила может иметь размерность силы или же размерность момента силы в зависимости от размерности соответствующей обобщенной координаты.

«Аналитическая механика» (1788)

- **Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах**.
- (*)
- Производную от кинетической энергии по обобщенной скорости назовем **обобщенным импульсом.**
- Разность производной по времени от обобщенного импульса и частной производной от кинетической энергии системы по обобщенной координате равна обобщенной силе:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \quad \text{где } i=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

получили уравнения движения материальной системы в обобщенных координатах, называемые иначе **уравнениями (второго рода) Лагранжа.**

«Аналитическая механика» (1788)

- **Случай существования силовой функции**
- В потенциальном поле обобщенная сила равна частной производной от силовой функции *U* по обобщенной координате:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

- Или, так как U = - П , (где П— потенциальная энергия), то

подставляя в уравнения Лагранжа вместо обобщенной силы Q ее выражение через потенциальную энергию, получим удобную форму уравнений Лагранжа для случая ***консервативной системы:***

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

«Аналитическая механика» (1788)

- Иногда этому выражению придают еще более простой вид, пользуясь тем, что ***потенциальная энергия П не зависит от обобщенных скоростей:***

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,$$

где ***L = T – П*** называют **функцией Лагранжа** или **кинетическим потенциалом**

Уравнения Лагранжа «второго рода»

- Вводятся обобщенные параметры или координаты, число которых равно числу степеней свободы системы, т.е. меньше или равно числу обыкновенных координат.
- Выразив обычные координаты через обобщенные или независимые параметры, Лагранж подставляет соответствующие выражения для координат, скоростей и ускорений в общую формулу динамики. Вынося за скобки вариации независимых (обобщенных) параметров, он приравнивает нулю каждую скобку, используя полную произвольность и независимость вариаций обобщенных координат.

Уравнения Лагранжа «второго рода»

Пусть q_i- обобщенные параметры;

T –кинетическая энергия системы, *U* - силовая функция*,* *l* - число степеней свободы, тогда:

(i=1,2,…,l)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Если поставлена задача Коши, то можно найти единственное решение системы дифференциальных уравнений 2-го порядка.

«Аналитическая механика» (1788)

Кроме *3n* неизвестных x_i, y_i, z_i
как функций *t*, для определения множителей Лагранжа $\lambda, \mu, \nu \ldots$
привлекаются *k* уравнений связей

$$L(x_i, y_i, z_i) = 0 \qquad M(x_i, y_i, z_i) = 0$$

- Заметим, что связи, рассматриваемые Лагранжем при выводе обеих форм дифференциальных уравнений, в современной терминологии являются геометрическими или голономными, что видно из контекста.

«Аналитическая механика» (1788)

- Лагранж смог все многообразие механических явлений облечь в единую формулу. В этой общей формуле динамики заключена
- теория движения и равновесия небесных и земных тел,
- гидростатика и гидродинамика,
- динамика твердого тела, (значительно продвинутая в сочинении Лагранжа «Аналитическая динамика»),
- теория малых колебаний;
- условие устойчивости консервативной системы; построена теория устойчивости невозмущенного движения

Лагранж замечает, что дифференциальные уравнения движения системы «требуют еще интегрирований, которые зачастую превышают возможности известного нам анализа; поэтому приходится прибегать к приближениям, и наши формулы дают также наиболее подходящие средства для этой цели».

Приближенный метод интегрирования уравнений движения динамики был навеян задачами небесной механики и теми способами последовательных приближений, которые использовались в астрономической практике XVIII в.

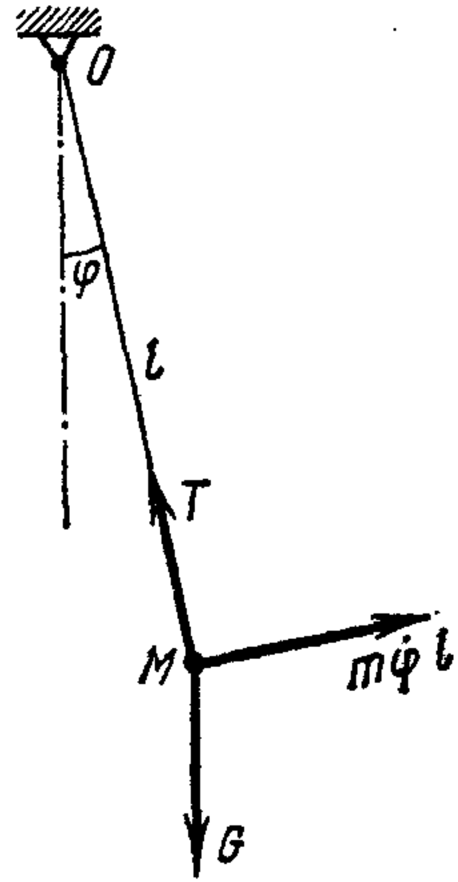
Сущность метода, который позже превратился в общий метод вариации произвольных постоянных, сводилась к тому, что, зная движение планеты под действием притяжения одного только Солнца, пытались найти близкое к данному невозмущенному движению реальное, вызванное также и действием соседней планеты, масса которой много меньше солнечной массы.

- Ирландский математик, механик и астроном **В. Г. Гамильтон,** оценивая вклад, сделанный Лагранжем в развитие механики после Галилея и Ньютона, писал:

  "***Из всех последователей этих блестящих ученых Лагранж, пожалуй, больше, чем какой-либо другой аналитик, сделал для того, чтобы расширить и придать стройности подобным дедуктивных исследованиям, доказав, что самые последствия, касающиеся движения системы тел, можно вывести из одной основной формулы. При этом красота метода настолько соответствует достоинству результата, что эта большая работа превращается в своеобразную математическую поэму*** ".
- Этой поэмой завершился плодотворный период разработки основ теоретической механики. Механика становится зрелой, вполне сложившейся отраслью естествознания.

Задача

Материальная точка М массы ***m*** подвешена на невесомой и нерастяжимой нити длины ***l***, другой конец которой закреплен неподвижно в точке О. Точке М сообщили начальную скорость v, перпендикулярную нити, и вывели из равновесного состояния («математический маятник»). Определить движение точки при условии, что начальная скорость мала.



ЗАДАЧА

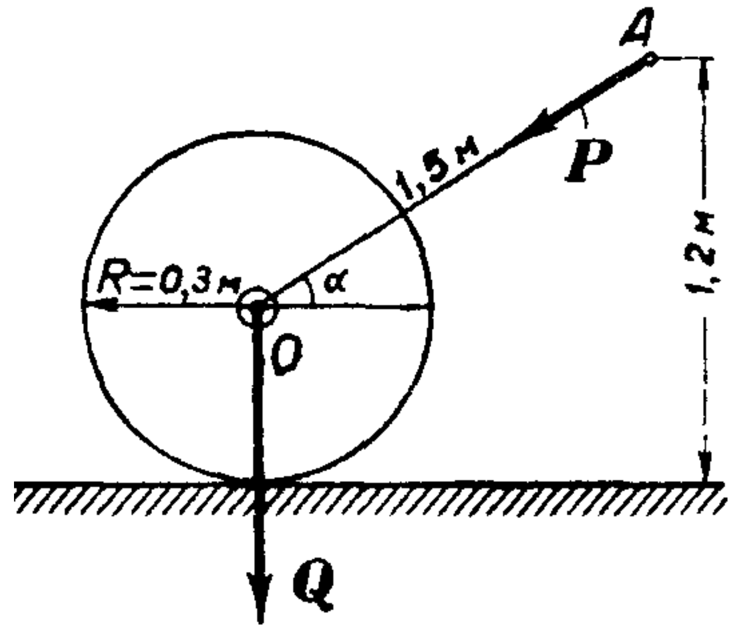
Цилиндрический каток диаметром 60 см и весом

Q = 392 кГ приводится в движение человеком, который давит на рукоятку AO с постоянной силой P в направлении AO длина

AO=1,5 м, высота точки A над горизонтом 1,2 м. Определить, пренебрегая силами трения в подшипниках, силу P, при которой человек, пройдя 2 м, сообщит оси катка скорость

80 см/сек

(принять g= 980см/сек^2).



Задача (центробежный регулятор Уатта)

Центробежный регулятор Уатта вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Определить угол отклонения ручек ОА и ОВ от вертикали, принимая во внимание только вес Р каждого из шаров А и В и вес P_1 муфты С; все стержни имеют одинаковую длину *l*.