История и методология механики

Евгений Алексеевич Зайцев
e_zaitsev@mail.ru

Лекция № 25

«История вариационных принципов механики»

План лекции

1. Истоки принципа наименьшего действия. Оптика. Задача об отражении и преломлении света. Оптико-механические аналогии (Ферма, Мопертюи, Гамильтон)

2. Принцип наименьшего действия (Мопертюи).

3. Принцип наименьшего действия (Эйлер, Лагранж)

4. Дальнейшее развитие аналитической механики в XIX в. Принцип стационарности действия Гамильтона-Якоби.

Принцип наименьшего действия. Предыстория
Оптико-механические аналогии (по Л.С. Полаку)

«Вариационный принцип для физической проблемы впервые был отчетливо сформулирован в геометрической оптике в XVII в. и применен к решению задач отражения и преломления света. Это был принцип кратчайшего времени или принцип Ферма. Естественно, возникает вопрос о том, почему экстремальный принцип возник первоначально в оптике, а не в механике, хотя и в последней уже в то время имелось достаточно отдельных высказываний о простоте законов движения или, в телеологическом варианте, о том, что природа достигает своих целей простейшими средствами.

Дело в том, что для оптической задачи величина, которая должна быть минимумом в конкретных явлениях, легко доступна пониманию и не требует дальнейших исследований. Это — время. Как бы ни относиться к философским проблемам, связанным с категорией времени, наглядные и издревле измеряемые интервалы времени в достаточно широких пределах не нуждаются в другом определении, кроме возможности сравнения их, т. е. установления отношений равенства и «больше или меньше».

Принцип наименьшего действия. Предыстория
Оптико-механические аналогии (по Л.С. Полаку)

Иное положение в механике. В механике совсем не очевидно, какая величина в процессе движения должна быть минимумом (или максимумом), и, как мы теперь знаем, структура этой величины отнюдь не является простой; в механике, кроме того, необходимо специальное выяснение характера варьированных движений.

Поэтому, хотя поиски экстремальных соотношений в оптике и механике начались на самой заре развития вариационного исчисления, которое и возникло в связи с этими поисками и при решении соответствующих частных задач (например, задачи о брахистохроне), однако оформились они в виде ясных математических выражений раньше всего в оптике, где не требовалось ни разработки такого сложного понятия, как «действие», ни выяснения характера его варьирования. Однако время входит и в картину механического движения, поэтому, почти одновременно с возникновением принципа кратчайшего времени в оптике, возникла идея о применении его в механике, а также о разработке в механике самостоятельного, но аналогичного по структуре принципа. Механистическая концепция физической картины мира подсказывала возможность единого принципа для оптики и механики — первая, еще не ясная, но чреватая многочисленными последствиями идея оптико-механической аналогии.

Принцип наименьшего действия. Предыстория
Оптико-механические аналогии (по Л.С. Полаку)

«Однако время входит и в картину механического движения, поэтому, почти одновременно с возникновением принципа кратчайшего времени в оптике, возникла идея о применении его в механике, а также о разработке в механике самостоятельного, но аналогичного по структуре принципа.

Механистическая концепция физической картины мира подсказывала возможность единого принципа для оптики и механики — первая, еще не ясная, но чреватая многочисленными последствиями идея оптико-механической аналогии».

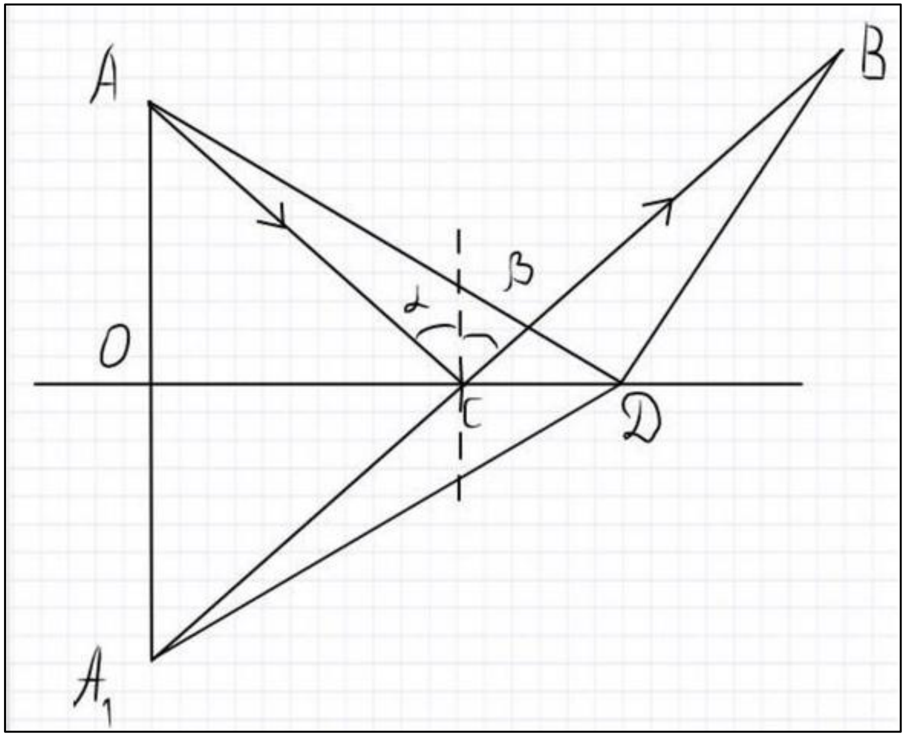
Итак:

1. Общее основание для механики и оптики – механистическая картина мира.

2. Оптика – как источник идей для механики. От особенного ко всеобщему.

3. В XIX в. оптика соединяется с электромагнетизмом. Отсюда роль вариационных принципов в современной физике.

Предыстория вариационных принципов.
Оптика.



Теория распространения света.

Закон равенства углов падения и отражения светового луча.

Был известен еще в эллинистическую эпоху.

Закон доказывается, исходя из требования, чтобы при отражении луч света проходил из начального положения в конечное в кратчайшее время.

Или, что то же самое, – по кратчайшему пути (поскольку скорость распространения светового луча постоянна).

Герон Александрийский «Катоптрика» (I в. н.э.)

Принцип наименьшего действия. Начало современной его истории. П. Ферма. Задача о преломлении света (1662)

В своих исследованиях Ферма исходил из принципа, что

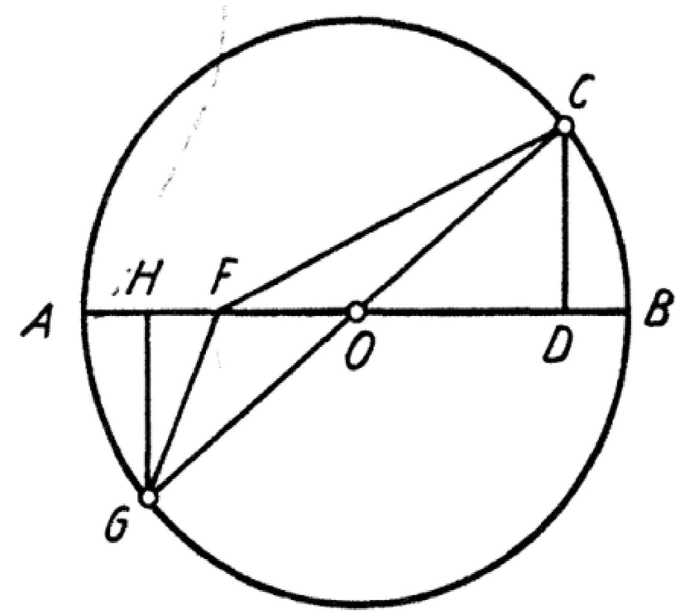
«природа всегда действует кратчайшим путем».

В отличие от закона отражения эта задача решалась путем минимизации времени, а не расстояния.

Ферма начинает с того, что на конкретном числовом примере показывает, что при прохождении светом двух разнородных сред прямолинейный путь не является самым быстрым.

Принцип наименьшего действия. Предыстория
П. Ферма. Задача о преломлении света (1662)

Пусть свет проходит через среды AGB и ACB, и пусть при этом скорость света в ACB в два раза выше, чем в AGB. Свет распространяется из C в G. Точка O – середина отрезка CG.



«Время, которое необходимо для перехода от C к G по прямой COG может быть представлено в виде «суммы половины CO и всей OG».

Пусть CO = 10, HO = OD = 8. Выберем точку F такую, что OF = 1. Тогда

$$\frac{CO}{2} + OG = 15 \qquad CF = \sqrt{117} \qquad FG = \sqrt{85}$$

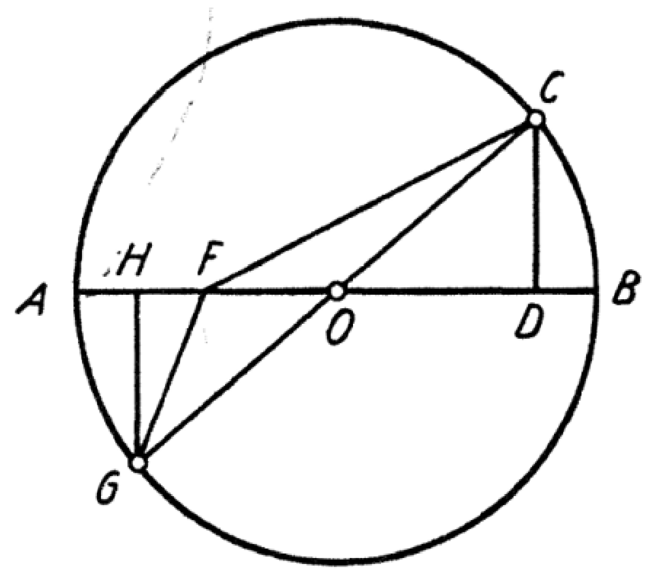
Откуда следует, что CF/2 + FG меньше 59/4 и, следовательно, меньше 15.

Принцип наименьшего действия. Предыстория

П. Ферма. Задача о преломлении света (1662)

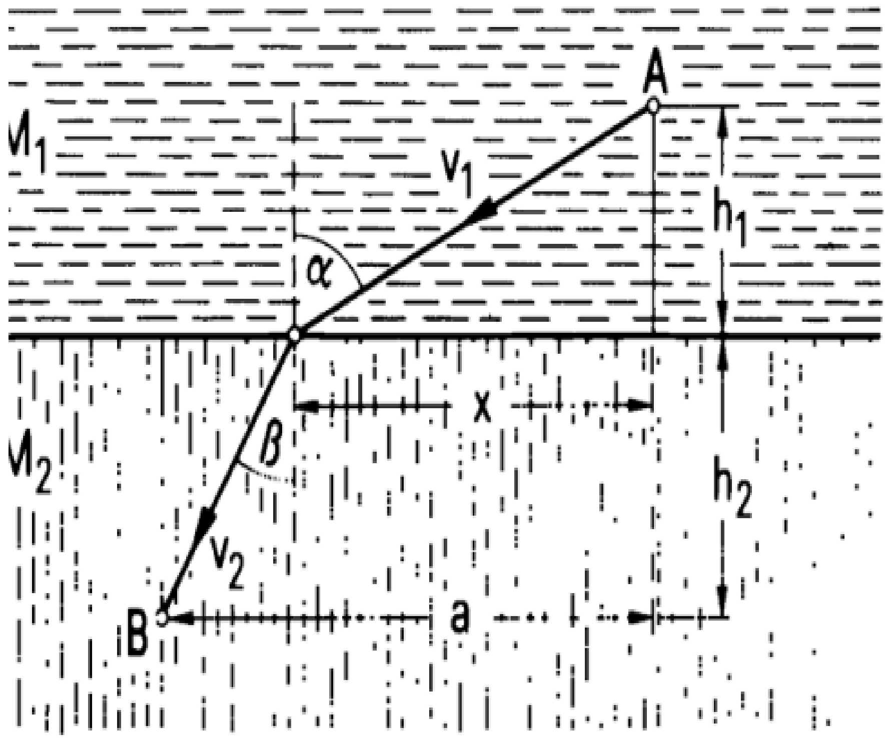
Ферма добавляет:

«Этот вывод я получил без особых проблем, однако, посчитал, что исследование должно быть продолжено. Дело в том, что недостаточно найти точку F, через которую естественное движение совершается быстрее, чем по прямой COG. Необходимо найти такую точку, через которую переход с одной стороны на другую осуществляется за время, меньшее, нежели время, затраченное при прохождении по любой другой прямой. В связи с этим пришлось использовать мой метод максимума и минимума, который довольно успешно решает проблемы такого рода».



Применение этого метода в статье Ферма Synthesis ad refractiones (1662).

Принцип наименьшего действия. П. Ферма. Задача о преломлении света



Преломление светового пучка на границе G двух сред M_1 и M_2,

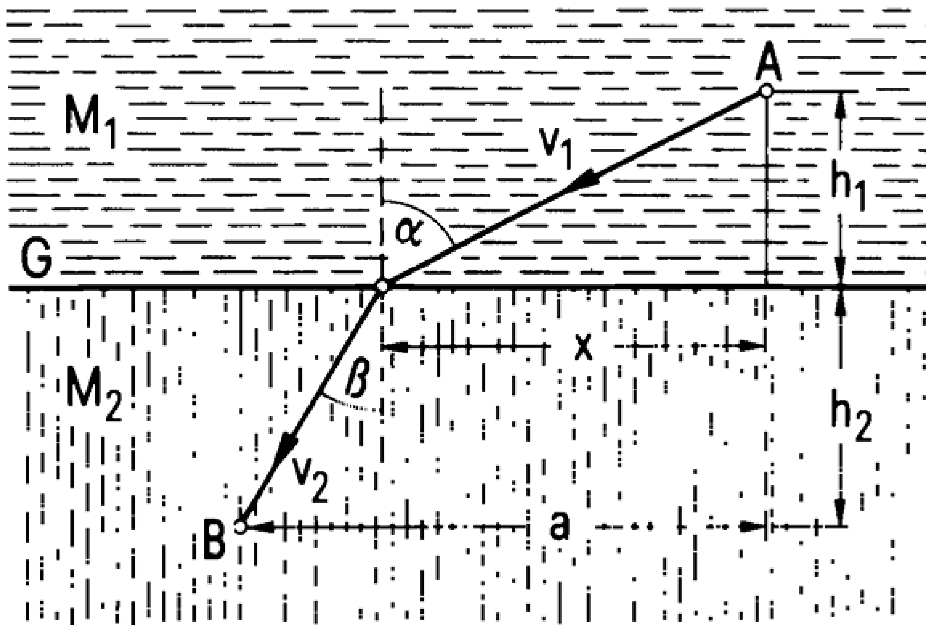
в которых свет распространяется со скоростями v_1 и v_2.

По какому пути (состоящему из двух отрезков) должен пройти луч света,

исходящий из точки A, чтобы добраться до точки B за кратчайшее время?

Принцип наименьшего действия.

П. Ферма. Задача о преломлении света. Современное решение.



Полное время определяется по формуле:

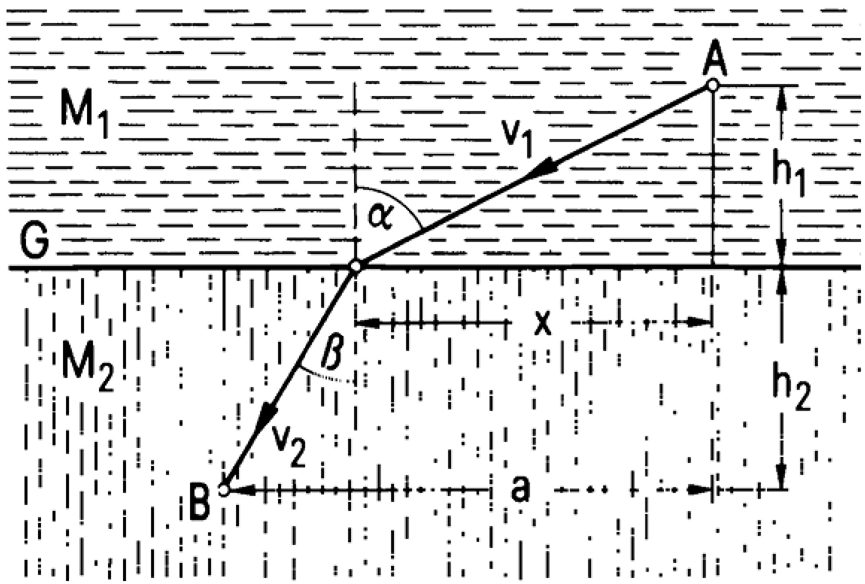
$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}{v_2}$$

Условием минимума времени будет равенство нулю производной:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Принцип наименьшего действия.

П. Ферма. Задача о преломлении света. Современное решение.



Откуда

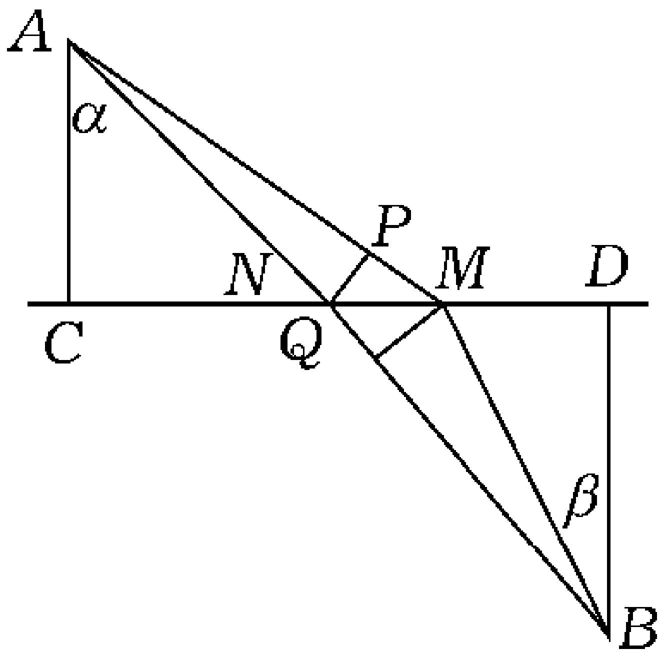
$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}=\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{1}{v_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}=\frac{\sin\beta}{v_2}$$

Т.е.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

Это и есть хорошо известный из оптики закон преломления света.

П. Ферма. Задача о преломлении света (реконструкция Э. Маха)



Итак, Ферма исходит из того, что свет, исходящий из точки А, преломившись в точке М, достигает точки В в кратчайшее время.

Основной тезис:

Если свет проходит путь АМВ в кратчайшее время, то на прохождение бесконечно близкому к нему соседнему пути ANB он затратит *такое же* время.

П. Ферма. Задача о преломлении света (реконструкция Э. Маха)

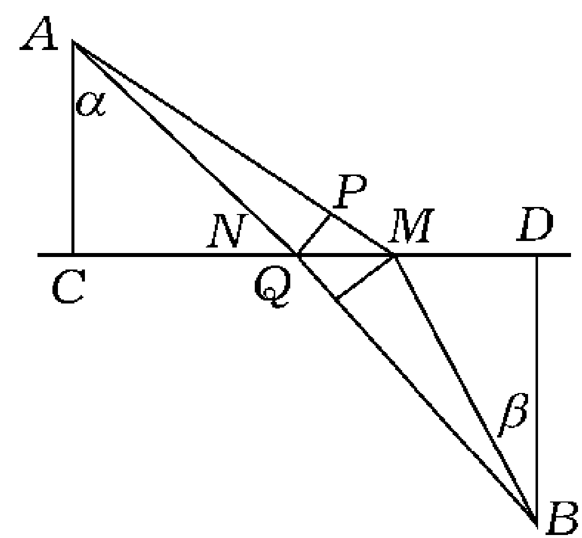
Опустим из точки *N* на линию *AM* перпендикуляр *NP* и из точки *M* на линию *NB* перпендикуляр *MQ*.

Путь до преломления по линии AM превосходит путь по линии AN на величину отрезка

MP = NM sinα.

И напротив, после преломления путь по NB превосходит путь по MB на величину отрезка

NQ = NM sinβ. Если скорости в первой и второй среде будут соответственно v_1 и v_2, то время для *AMB* станет минимумом, когда на прохождение отрезков PM и NQ свет затратит одно и то же время:



$$\frac{NM\sin\alpha}{v_1} - \frac{NM\sin\beta}{v_2} = 0$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

где *n* – показатель преломления.

В случае равных скоростей ($v_1 = v_2$) условие минимума *времени* становится тождественным с условием минимума *пути.*

Принцип «наименьшего сопротивления» Ферма

Ферма:

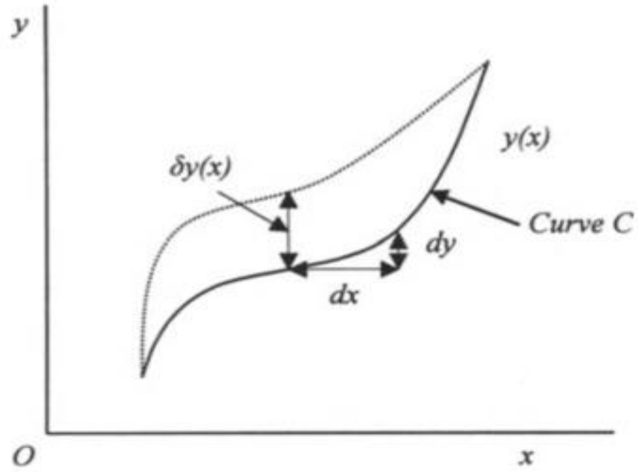
«Мой результат был самым необычным, неожиданным и удачным из всех, что я когда-либо получал. …

Мое доказательство основано на одном единственном требовании, чтобы природа всегда шла по пути наименьшего сопротивления.

Но неверно, что природа всегда выбирает кратчайший путь, как полагает большинство.

Подобно тому, как Галилей в своих исследованиях движений под действием силы тяжести выбирает в качестве меры движения не путь, а время, так и для нас решающее значение имеет тот факт, что расстояния проходятся с наименьшим сопротивлением и в кратчайшее время».

Идея Ферма – идея вариации (для функции и функционала)



Основной тезис:
Если свет проходит путь AMB в кратчайшее время, то на прохождение бесконечно близкому к нему соседнему пути ANB он затратит *такое же* время.

Обычная функция. Идея Фурье. В точке минимума (обычная) функция имеет производную, равную нулю. Это означает, что в в ее разложении в ряд Тейлора в окрестности этой точки отсутствует линейный член. То есть, значение функции в этой окрестности отличается от значения постоянной функции на величину 2-го порядка малости. Иначе говоря, значения двух функций равны с точностью до величины 2-го порядка.

Функционал. Обобщение Фурье этой идеи. Величина функционала на кривой, близкой к той, на которой достигается его минимальное значение, и на самой этой кривой, «почти» равны.

Возражения картезианцев

Клод Клерселье (издатель работ Декарта):

«Принцип, который вы берете за основу своего доказательства, а именно, что природа всегда действует кратчайшими и простейшими способами, является моральным, а не физическим принципом; его нельзя считать законом, в соответствии с которым действует природа. Иначе пришлось бы признать, что природа обладает своего рода разумом.

Мы, однако же, понимаем под «природой» только такой порядок и такой закон, который детерминирован, который действует автоматически, не выбирая и не предвидя последствий.

Что касается Вашего принципа, то его принятие наделило бы природу нерешительностью ... Ибо, если следовать Вашей точке зрения, то луч света, проходящий из точки менее плотной среды в точку более плотной среды, должен будет колебаться [в выборе пути]… И кто же тогда будет принимать за него решение?»

Иоганн Бернулли. Первая формулировка оптико-механической аналогии. Задача о брахистохроне (1696)

Брахистохрона – кривая наискорейшего спуска. Это кривая, по которой должно спускаться тяжелое тело, чтобы пройти в кратчайшее время из начального положения в конечное, не лежащее на одной вертикали с началом.

Задача была решена самим И. Бернулли, Ньютоном, Я. Бернулли, Лопиталем.

Искомая кривая – циклоида.

В решении И. Бернулли речь идет одновременно об оптике и механике, о движении луча и тяжелой частицы.

И. Бернулли дает, по существу, первую формулировку оптико-механической аналогии, хотя, еще в очень частной форме. Он пишет :

«Я укажу, что мною открыто удивительное совпадение между кривизной луча света в непрерывно изменяющейся среде и нашей брахистохронной кривой».

Для того чтобы перейти к механике в целом, необходимо было выяснить, какая величина может быть минимальной (или максимальной) в процессе движения. Эта проблема, которая, так же как и принцип Ферма, возникла еще в XVII в., была более или менее отчетливо выяснена только в середине XVIII в. и доведена до такой же математической ясности и определенности, как принцип Ферма, только в XIX в.

Лейбниц и принцип наименьшего действия. «Божественный механизм»

Будучи универсальным гением, Лейбниц работал в различных разделах математики, естественных наук, философии и теологии, руководствуясь при этом идеей *предустановленной гармонии*. С его точки зрения,

«*мир, как он существует, является наилучшим из возможных*».

Этому философско-богословскому принципу Лейбниц попытался придать механико-математическую форму :

«В вещах всегда заложен принцип определенности, выражающийся при помощи понятий максимума или минимума, а именно:

наибольшее действие (эффект) достигается, так сказать, с наименьшим усилием.

При этом нужно учитывать время, место, способность и восприимчивость тел к усилию. Отсюда удивительным образом усматривается, что у истоков вещей лежит некая Божественная математика и метафизический механизм – определенность, связанная с понятием максимума».

Принцип наименьшего действия по Лейбницу

Согласно Лейбницу, «действие» = «живая сила» (т.е. кинетическая энергия)

Из письма Я. Герману (подлинность письма оспаривается):

«В действие входит не только время, как вы полагаете; оно есть произведение массы на время или времени на живую силу. Я заметил, что в изменениях движений оно остается обычно максимумом или минимумом. Отсюда можно вывести различные предложения ... .»

«Действие движущейся материальной точки состоит из соотношения пройденного расстояния и скорости, а именно, из простого отношения времени и квадрата скорости».

Пусть *m* – масса, *v* – скорость, *ds* – бесконечно малый элемент пути, *dt* – бесконечно малый элемент времени.

Поскольку $ds = vdt$, действие равно $mvds = mv^2dt$.

Таким образом, под «действием» Лейбниц, вероятно, понимал величину интеграла

$$\int m\,v\,\mathrm{d}s = \int m\,v^2\,\mathrm{d}t = A$$

Принцип наименьшего действия. П.-Л. Мопертюи (1698 – 1759)

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

- 1698 born in St.Malo
- 1717 Collège de la Marche in Paris (Philosophy)
- 1718 -1722 cavalry officer
- 1723 adjoint in Académie des Sciences (Geometry, Mechanics)
- 1728 visit of London, Fellow of Royal Society, admired Newton's theories (*Newtonian*)
- 1729 studies in Basel under Johann Bernoulli
- 1730 Paris, studies on shape of earth
- 1736-1737 expedition to Lappland
- 1740 invitation by King Frederick the Great to come to Berlin, joined war against Austria
- 1741 returned to Paris, 1743-46 Académie Française published paper "Loi du repos des corps"
- **1746 President of Prussian Royal Academy in Berlin, announced Principle of Least Action,**
- **1751-1753 dispute on his Principle (König, Voltaire)**
- 1753-58 stayed in Paris, Berlin, Bordeaux, Basel
- 1759 died in Basel

Принцип наименьшего действия. Оптика Мопертюи

И снова, как у Ферма, введение принципа мотивируется задачей о преломлении света (1747).

Мопертюи:

«Глубоко размышляя над этим вопросом, я подумал, что, поскольку свет, когда переходил из одной среды в другую, уже покинул кратчайший путь, который является прямой линией, то с таким же успехом он может не следовать и по пути кратчайшего времени.

В самом деле, почему предпочтение в этом вопросе может быть отдано времени или расстоянию?»

«Вариационный принцип» в формулировке Мопертюи:

«Свет выбирает путь, который имеет реальное преимущество. На этом пути наименьшим должно быть *количество действия*».

Принцип наименьшего действия. Оптика Мопертюи

«Теперь необходимо объяснить, что я имею в виду под «количеством действия».

Для того, чтобы перенести тело из одной точки в другую, необходимо определенное действие. Это действие зависит от скорости тела и расстояния, которое оно проходит, но это не скорость и не расстояние, взятые по отдельности.

Количество действия тем больше, чем больше скорость и чем длиннее пройденный путь.

Оно пропорционально сумме расстояний, каждое из которых умножается на скорость, с которой тело движется по нему».

«Количество действия является истинным хранилищем Природы, которое она в случае движения света расходует максимально экономно».

Мопертюи. Принцип наименьшего действия. Закон преломления света (1747)

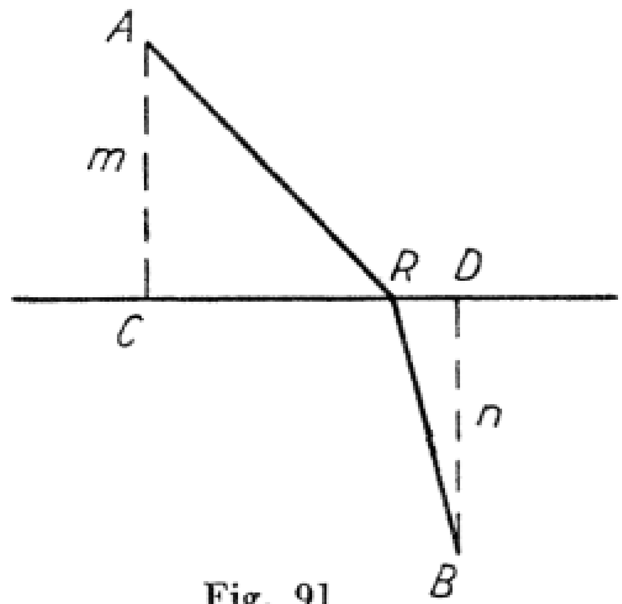
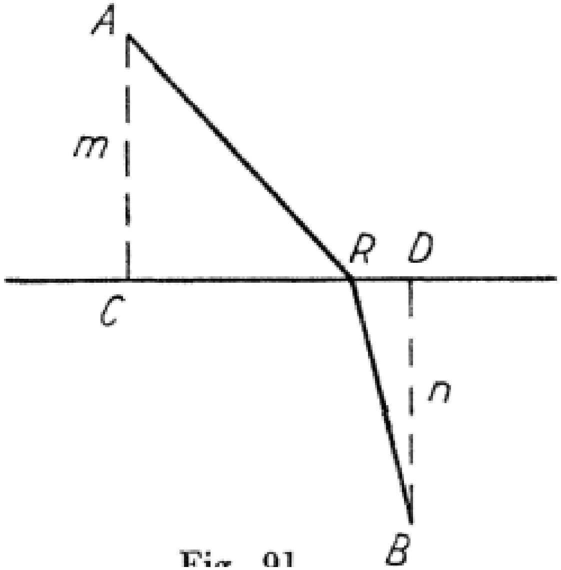


Fig. 91

«Пусть две разные среды разделены поверхностью, представленной линией CD. Скорость в верхней среде пропорциональна m, а скорость в нижней среде пропорциональна n. Рассмотрим луч света, исходящий из заданной точки A, который должен попасть в заданную точку B. Чтобы найти точку R на линии разделения, через которую должен пройти луч, я ищу точку, в которой количество действия минимально. А именно, я ищу такую точку R, для которой значение mAR + nRB будет минимальным.

Мопертюи. Принцип наименьшего действия. Закон преломления света (1747)



«Проведя перпендикуляры AC, BD к поверхности, разделяющей среды, я получаю

$$m\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CR}^2}+n\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{DR}^2}=\mathrm{Min}.$$

Учитывая, что AC и BD являются константами, получаем

$$\frac{mCR\cdot dCR}{\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CR}^2}}+\frac{nDR\cdot dDR}{\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{DR}^2}}=0.$$

Мопертюи. Принцип наименьшего действия. Закон преломления света (1747)

Но поскольку CD – константа, получаем

$$dCR = -dDR.$$

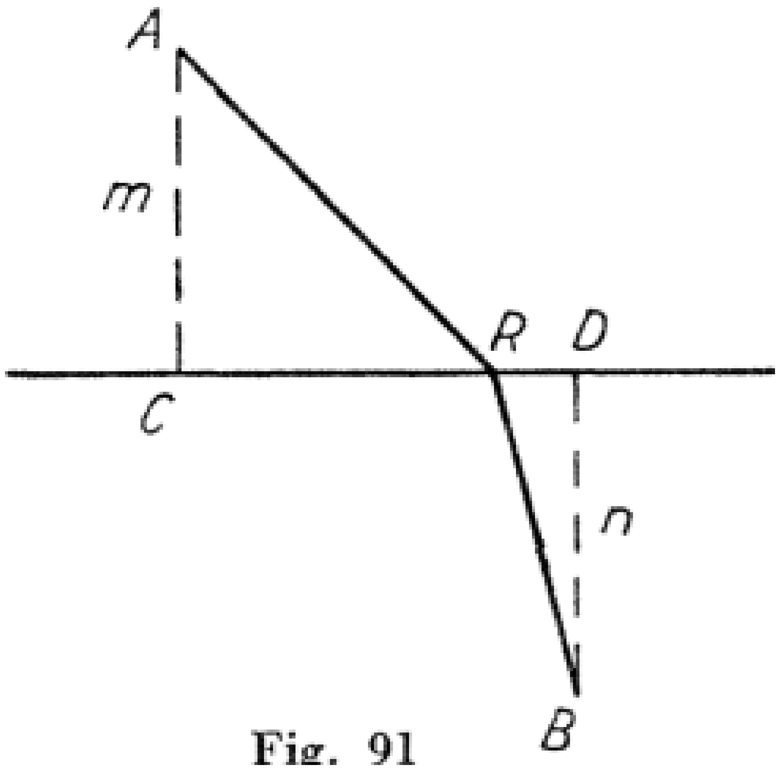


Fig. 91

Следовательно

$$\frac{mCR}{AR} = \frac{nDR}{BR}$$

и

$$\frac{CR}{AR} : \frac{RD}{BR} :: \frac{n}{m},$$

Иными словами, синусы углов падения обратно пропорциональны скоростям света в каждой среде.

Мопертюи. Закон преломления света (1747).

Заключение:

«Таким образом, все явления преломления света согласуются с великим принципом, согласно которому Природа при создании своих произведений всегда действует самым простым способом».

«Я знаю то отвращение, которое некоторые математики испытывают к применению целевых причин в физике, и, в определенной степени, я согласен с ними. Я считаю, что введение этих причин рискованно.

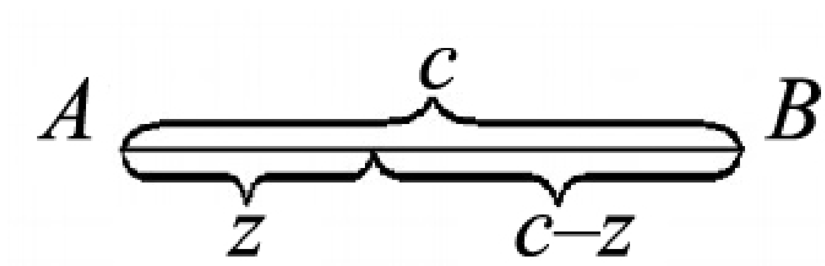
Ошибка, которую совершили такие люди, как Ферма и его последователи, показывает, что их использование слишком часто бывает опасным.

Однако, виноват не сам принцип, а, скорее, поспешность, с которой за принцип было принято то, что является лишь одним из его следствий.

Нет сомнений в том, что все вещи регулируются Высшим Существом, которое, вкладывая в материю силы, свидетельствующие о Его могуществе, предназначил их для осуществления действий, достойных Его мудрости».

Мопертюи. Принцип наименьшего действия.

Закон рычага

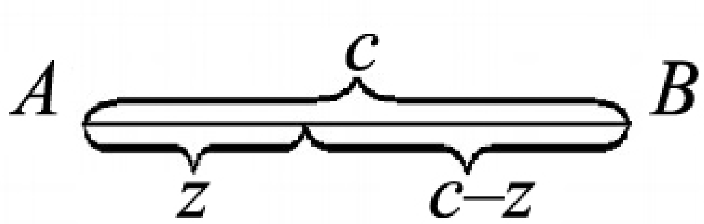


«Рассмотрим невесомый рычаг длиной *c*, на концах которого размещены два тела массами *A* и *B*. Найти точку опоры, при которой рычаг будет в равновесии.

Обозначим через *z* неизвестное расстояние от точки опоры до тела *A*, а через (*c* – *z*) – ее расстояние до тела *B*.

Когда рычаг совершает *небольшое* движение, тела *A* и *B* описывают небольшие подобные дуги, величины которых пропорциональны расстояниям от точки опоры до тел. Эти дуги будут выражать одновременно и расстояния, пройденными телами, и их скорости».

Мопертюи. Вывод закона рычага из принципа наименьшего действия



Таким образом, *количество действия* каждого тела будет пропорционально произведению (массы) тела на квадрат пройденной им дуги. Или (поскольку дуги подобны) количество движения будет пропорционально произведению (массы) тела на квадрат его расстояния до точки поворота рычага, то есть Az^2 и $B(c - z)^2$. Сумма этих величин должна быть наименьшей из всех возможных.

Следовательно

$$Az^2 + B(c - z)^2 = \text{Min.}$$

$$2Azdz + 2Bzdz - 2Bcdz = 0$$

Откуда следует закон рычага Архимеда: $$z = \frac{Bc}{A + B}$$

Мопертюи. Принцип наименьшего действия

Резюме:

- Согласно Мопертюи, в природе действует универсальный закон движения и равновесия — принцип наименьшего количества действия.
- Термин «количество действия» понимается им в смысле «деятельности» и измеряется произведением mvs, где m — масса, v — скорость, s — путь, пробегаемый телом.
- Для движения mvs = minimum, а в случае равновесия положение тела таково, что когда ему сообщено малое движение, то произведенное этим количество действия оказывается минимальным.

Философско-богословская позиция Мопертюи

Для понимания философской позиции Мопертюи, оправдывающей принцип наименьшего действия, обратимся к его «Эссе по космологии» (Essai de Cosmologie).

В этом сочинении Мопертюи противопоставляет рационалистическую философскую школу, «желающую подчинить Природу чисто материальной причине и полностью исключить целевые причины», другой философской школе, которая «постоянно ссылается на эти причины и тем самым обнаруживает намерения Творца. во всех уголках природы …» .

«Согласно первой [школе], Вселенная могла бы обойтись без Бога; согласно второй, даже самые малые части Вселенной являют собой доказательство существования Бога».

Философско-богословская позиция Мопертюи

Мопертюи критикует обе эти крайности.

«Философы, приписавшие Богу причину движения, были вынуждены сделать это потому, что не знали, куда ее (эту причину) поместить. Будучи неспособны представить себе, что материя обладает способностью производить, распределять и уничтожать движение, они обратились к Нематериальному Существу.

Но когда известно, что все законы движения основаны на принципе *наилучшего*, нельзя сомневаться в том, что свою основу они имеют во Всемогущем и Всеведущем Существе, которое снабдило тела способностью взаимодействовать друг с другом или же использовали другие средства, которые все еще непонятны для нас».

В заключение Мопертюи пишет о своем принципе:

«Какое удовлетворение для человеческого разума при созерцании этих законов – таких прекрасных и таких простых. Ибо только они могут быть законами, которые Творец и Управитель вещей придал материи для осуществления всех явлений видимого мира».

Даламбер. Критика принципа наименьшего действия

Даламбер:

«Законы равновесия и движения являются необходимыми истинами. Метафизик, возможно, был бы удовлетворен, сказав, что мудрость Создателя и простота его намерений состоит в том, чтобы не устанавливать других законов равновесия и движения, кроме тех, которые вытекают из самого существования тел и их взаимной непроницаемости.

Но мы сочли своим долгом воздержаться от такого рода аргументов, потому что нам показалось, что они основаны на слишком расплывчатом принципе.

Природа Верховного Существа слишком глубоко сокрыта, чтобы мы могли непосредственно знать, что в соответствии с его мудростью, а что – нет.

Мы можем обнаружить действие его мудрости, только наблюдая законы природы, поскольку математические рассуждения сделали простоту этих законов очевидной для нас, а эксперимент показал нам их применение и область действия».

Даламбер. Критика принципа наименьшего действия

«Мне кажется, что это соображение можно использовать, чтобы судить о ценности доказательств законов движения, которые были даны некоторыми философами, в соответствии с принципом целевой причинности, то есть, в соответствии с намерениями, которые, возможно, сформулировал Автор природы при установлении этих законов.

Такие доказательства не обладают той степенью убедительности, как прямые доказательства, которые выводятся из принципов, более доступных нам. Зачастую они вводят нас в заблуждение.

Следуя этому методу и считая, что Создатель поступил мудро, установив сохранение количества движения во Вселенной, Декарт был введен в заблуждение относительно законов удара. Те, кто ему подражают, рискуют быть обманутым подобным образом…»

Л. Эйлер. Принцип наименьшего действия

В 1744 г. Эйлер писал :

«Поскольку все эффекты в природе подчиняются некоторому закону максимума или минимума, нет сомнений в том, что какое-то свойство максимума или минимума должно быть локализовано на траекториях тел, движущихся какой-либо силой.

Но что это за свойство, не так легко увидеть из метафизических принципов; однако, поскольку эти кривые также могут быть определены с помощью прямого метода, можно будет сделать вывод, что̀ в них является максимальным или минимальным … .

Главное, что следует учитывать, – это эффект, возникающий в результате действия активных сил, который заключается в движении тела; поэтому представляется правильным, что само это движение должно быть минимальным».

«Метод нахождения кривых линий по свойствам максимальности и минимальности»
(Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietete gaudentes)

Л. Эйлер. Принцип наименьшего действия

«Даже если этот вывод не кажется достаточно определенным, он, если я докажу его с помощью истины, уже признанной априори, приобретет такой вес, что все сомнения, которые могут возникнуть, исчезнут. И по правде говоря, если будет доказана правильность этого вывода, будет легче исследовать внутренние законы природы и первопричины и подтвердить это утверждение самыми надежными обоснованиями».

Добавление: «Поскольку план всей вселенной является наиболее совершенным и определяется мудрейшим Создателем, в мире не происходит ничего, что не основывалось бы на каком-то соотношении максимума или минимума».

Эйлер. «Метод нахождения кривых линий по свойствам максимальности и минимальности»

По-сути, Эйлер стоял на той же философско-богословской позиции, что и Мопертюи (за что его критиковали Даламбер и Лагранж).

Л. Эйлер. Принцип наименьшего действия

В отличие от Мопертюи, Эйлер, начав с высказываний в том же духе, приходит к другим выводам.

Исследуя фактическое применение принципа к частным задачам механики, Эйлер увидел, что найти выражение, которое должно быть максимумом или минимумом, для каждой данной частной задачи можно только тогда, когда уже известно решение этой задачи, проведенное исходя из обычных общих принципов механики, формулирующих не конечные цели, а причинно-следственные связи явлений.

Таким образом, эвристическое значение принципа оказалось ничтожным. Он не дает возможности предвидеть или установить законы даже тех механических явлений, которые всесторонне исследуются обычными дифференциальными уравнениями движения Ньютона.

Как также было отмечено Эйлером, универсальность принципа наименьшего действия даже в пределах механики не является установленной и он, Эйлер, не может сколько-нибудь уверенно оценить границы его применимости.

Написав несколько работ, посвященных принципу наименьшего действия, Эйлер оставил занятия этой проблематикой.

Л. Эйлер. Принцип наименьшего действия (Л.С. Полак)

Математическое выражение, называемое принципом наименьшего действия, у Эйлера естественно вытекало из его работ по отысканию кривых, обладающих экстремальными свойствами.

Однако если геометрическая задача блестяще решалась «методом изопериметров», то в случае механического движения приходилось ограничиваться решением уже решенных задач, поскольку указать на основании общих соображений, какая именно величина в том или ином случае будет иметь максимум или минимум, не удавалось.

Это значительно ограничивало сферу применения и эвристическое значение принципа наименьшего действия у Эйлера.

Еще одно ограничение универсальности принципа вытекало из того обстоятельства, что у Эйлера он органически связан с законом живых сил и справедлив только там, где применив последний.

Математическая форма принципа наименьшего действия у Эйлера

Согласно Мопертюи, формулировка принципа наименьшего действия звучит так:

Интеграл $\int mv\mathrm{d}s$ имеет минимальное значение.

Эйлер воспользовался равенством $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ и написал этот интеграл в виде

$$\int mv^2\mathrm{d}t = \int 2T\mathrm{d}t.$$

Л. Эйлер. Принцип наименьшего действия в задаче о полете снаряда

Эту идею Эйлер использовал при решении задачи о полете снаряда. Эйлер берет в качестве элемента действия произведение mvds, где

$$v \sim \sqrt{y}$$

(y = высота падения) и решает вариационную задачу

$$\int \sqrt{y}\, \mathrm{d}s = \text{Extremum}$$

Л. Эйлер. Задача о полете снаряда

Эйлер также рассматривает на этой основе несколько проблем механики движения точки, включая движение планет. Сам Эйлер считал свое «открытие» частным случаем принципа Мопертюи:

«Но я должен подчеркнуть, что мое открытие, поскольку оно было опубликовано только после того, как г-н де Мопертюи изложил свой принцип, не может оспаривать его приоритет. Вдобавок я обнаружил эту интересную связь не априори, а апостериори, в том смысле, что после нескольких попыток я, наконец, нашел выражение для величины, которая становится минимальной во время этих движений. Поскольку я не осмеливался придать ему какую-либо дополнительную значимость, кроме случая, который я исследовал, я не думаю, что я нашел бы общий принцип».

Эйлер признает, что метафизическая отправная точка не полностью удовлетворяет его, и, возможно, это одна из причин, почему он не пошел дальше по этому пути. Но еще более правильным кажется то, что, согласно его собственному утверждению, «траектории могут быть получены из обычных механических принципов с меньшими вычислениями».

Лагранж. Принцип наименьшего действия («Аналитическая механика»)

«Перехожу, наконец, к четвертому принципу, который я называю принципом *наименьшего действия* — по аналогии с тем, который был дан под этим же названием Мопертюи и который затем приобрел известность благодаря работам многих знаменитых авторов.

Этот принцип с аналитической точки зрения заключается в том, что при движении тел, действующих друг на друга, сумма произведений масс на скорости и на пройденные пути является минимумом.

Мопертюи выводит отсюда законы отражения и преломления света, равно как и законы удара тел; эти выводы помещены в двух мемуарах, из которых первый был опубликован в Mémoires de l’Académie des Sciences de Paris за 1744 г., а второй спустя два года в Mémoires de l’Académie des Sciences de Berlin».

Лагранж. Принцип наименьшего действия

«Однако указанные применения носят слишком специальный характер, чтобы на них можно было построить доказательство общего принципа; кроме того, они несколько неопределенны и произвольны, что придает некоторую ненадежность и выводам, которые можно было бы сделать на основании их о точности самого принципа.

Поэтому мне кажется, было бы неправильно изложенный в таком виде принцип ставить в один ряд с теми принципами, которые были указаны выше. Существует, однако, и другой способ его применения, более общий и более точный, который один только и заслуживает внимания математиков».

Лагранж. Принцип наименьшего действия

«Первую идею этого принципа дал Эйлер в конце своего сочинения «De isoperimetricis», напечатанного в Лозанне в 1744 г.; он показал, что при траекториях, описанных под действием центральных сил, интеграл скорости, умноженный на элемент кривой, всегда является максимумом или минимумом.

Указанное свойство, найденное Эйлером при движении изолированных тел, которое представлялось присущим только этим телам, я, пользуясь принципом сохранения живых сил, распространил на движение любой системы тел, действующих друг на друга каким угодно образом; отсюда вытекает новый общий принцип, согласно которому сумма произведений масс на интегралы скоростей, умноженных на элементы пройденных путей, является всегда максимумом или минимумом».

Лагранж. Принцип наименьшего действия

Лагранж заинтересовался этим принципом еще в туринский период своей деятельности. Он придал новую форму выражению действия, а именно вместо эйлерового выражения $A = \int_A^B v ds$ (где v — скорость, s — дуга), записанного для одной материальной точки, Лагранж вводит величину действия для системы материальных точек (под действием консервативных сил), суммируя по точкам величину действия A, умноженную на массу m_i точки, и переходя к аргументу времени t вместо эйлерова аргумента s — длины дуги траектории точки. Действие, по Лагранжу,

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_A^B v_i^2 \, dt = \int_A^B 2T \, dt,$$

где T — кинетическая энергия системы в данный момент времени. Как и Эйлер, Лагранж утверждает, что истинное движение системы отличается от ее кинематически возможных движений тем, что вариация действия для истинных движений равна нулю. В раннем периоде творчества Лагранж придавал фундаментальное значение этому принципу механики, указав ряд его интересных приложений.

Лагранж. Принцип наименьшего действия

«Таков тот принцип, которому, хотя и не вполне точно, я даю здесь название принципа *наименьшего действия* и на который я смотрю не как на метафизический принцип, а как на простой и общий вывод из законов механики. Во втором томе Mémoires de Turin можно увидеть применение, которое я дал ему для разрешения многих трудных проблем механики.

Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, как и общий, метод разрешения проблем, касающихся движения тел. Однако этот метод представляет собою не что иное, как следствие метода, составляющего предмет второй части настоящей работы и обладающего в то же время тем преимуществом, что он выводится из первых принципов механики».

Лагранж. Принцип наименьшего действия

Резюме

Принцип наименьшего действия Лагранж выводит, исходя из общей формулы динамики и закона живых сил. Таким образом, весь вывод применим только к таким системам, которые удовлетворяют закону живых сил.

$$\delta \sum m \int v ds = 0$$

Формулировка принципа:

«При движении любой системы тел, находящихся под действием сил взаимного притяжения, или сил, направленных к неподвижным центрам и пропорциональных каким-либо функциям расстояний, кривые, описываемые различными телами, а равно их скорости необходимо таковы, что сумма произведений отдельных масс на интеграл скорости, умноженной на элемент кривой, является максимумом или минимумом при условии, что первые и последние точки каждой кривой рассматриваются как заданные, так что вариации координат, соответствующих этим точкам, равны нулю».

«Аналитическая механика» т.1 (2 изд.), с. 382

Дополнение к лекции 25

Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865).
Принцип стационарности действия
Принцип Гамильтона

Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865). Принцип стационарности действия Принцип Гамильтона

В. Р. Гамильтон родился в Дублине. К 12 годам он владел уже двенадцатью языками, в том числе персидским и арабским. В 10 лет прочитал Евклида в латинском переводе, в 13 лет изучил «Универсальную арифметику» И. Ньютона, в 16 лет познакомился с его «Началами», а в 17 лет приступил к изучению «Небесной механики» Лапласа.

В 22 года он стал профессором астрономии Дублинского университета, занялся усовершенствованием астрономических приборов и приступил к оптическим исследованиям. В Европе в то время шла борьба между корпускулярной теорией света Ньютона и теорией волнообразного распространения света Френеля. Гамильтон поставил цель создать общую аналитическую теорию, которая покрывала бы оба эти варианта оптики.

Основной идеей, из которой изначально вдохновлялся Гамильтон, был принцип Ферма, гласивший, что при распространении света в различных средах переход светового луча из начальной точки в конечную совершается в кратчайшее время (см. слайды 3-10).

«Принцип Ферма» из оптики – как источник принципа стационарности действия Гамильтона

Гамильтон о своих занятиях оптикой:

«Моей целью было не открывать новые феномены, не улучшать конструкции оптических инструментов, но с помощью дифференциального исчисления преобразовать <u>геометрию света</u>, посредством установления <u>единого метода</u> для решения всех проблем этой науки».

Конкретизация поставленной цели : «Общей проблемой, которую я поставил перед собой в оптике, является исследовать математические следствия принципа наименьшего действия».

Этот принцип, далеко обобщающий классический «принцип наименьшего времени» Ферма, оказался <u>единым</u> как для оптики, так и для механики.

Истоки принципа Гамильтона. Самая первая работа Гамильтона по оптике «Теория систем лучей» (1827)

Гамильтон начинает с рассмотрения движения света в оптически однородной среде. Он исследует в общем виде свойства световых лучей, исходящих из одной светящейся точки и претерпевающих либо отражения, либо преломления.

В основу кладутся известные законы отражения и преломления, как установленные опытом. Рассмотрим самый первый и самый простой результат, полученный Гамильтоном. В нем уже просматривается ведущая идея Гамильтона – минимизация некоторого функционала (действия).

Истоки принципа Гамильтона. Самая первая работа Гамильтона по оптике «Теория систем лучей» (1827)

Рассмотрим задачу об отраженных лучах).

Пусть ρ — расстояние от произвольной точки (X, Y, Z) на падающем луче до точки (x, y, z) отражения на зеркале, а ρ' — расстояние от произвольной точки (X', Y', Z') на отраженном луче до той же точки (x, y, z).

Рассмотрим на зеркале точку $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$, бесконечно близкую к точке (x, y, z). Пусть расстояния от этой точки до точек (X, Y, Z) и (X', Y', Z') будут равны $\rho + \delta\rho$ и $\rho' + \delta\rho'$.

Пользуясь основным законом оптики (угол падения равен углу отражения), Гамильтон показывает, что

$$\delta\rho + \delta\rho' = 0. \qquad \text{(D)}$$

Истоки принципа Гамильтона. Самая первая работа «Теория систем лучей» (1827) «Принцип наименьшего действия»

Далее Гамильтон делает характерное замечание:

«Уравнение (D) называется принципом наименьшего действия, так как оно выражает, что если координаты точки падения бесконечно мало варьировать в соответствии с природой зеркала, то вариация искривленного пути $\rho + \rho'$ будет нулем; и если свет — материальная субстанция, движущаяся со скоростью, сохраняющейся при отражении, этот искривленный путь измеряет то, что в Механике называется действием, от одной из выбранных точек до второй.

Лаплас вывел формулу (D), а также аналогичные формулы для обыкновенного и необыкновенного преломления, предположив, что свет состоит из частиц материи, которые движутся с определенными скоростями и на которые действуют только такие силы, какие неощутимы на сколько-нибудь заметных расстояниях.

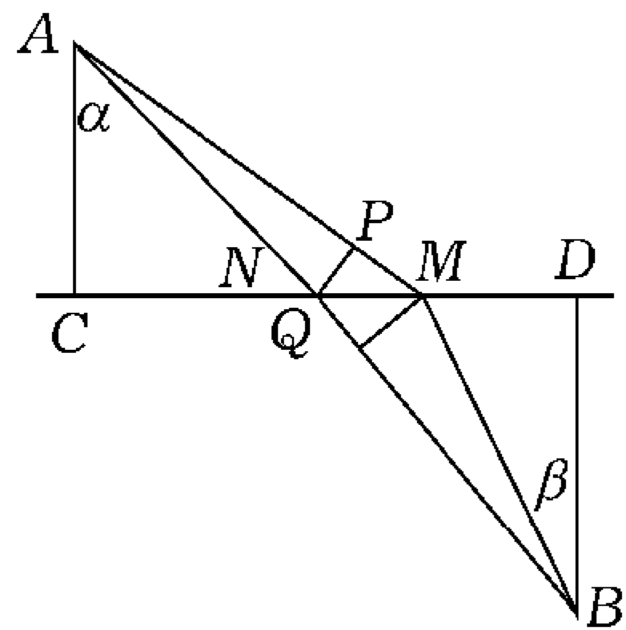
Способ, которым я вывел это уравнение, не зависит от каких-либо гипотез относительно природы или скорости света, но я все же буду называть это уравнение, по аналогии, принципом наименьшего действия».

Истоки принципа Гамильтона. «Принцип Ферма» из оптики – как источник принципа стационарности действия Гамильтона

Время распространения света из точки А в точку В определяется суммой

$t = n_1\, AM + n_2\, MB$

Где n_1 и n_2 – коэффициенты преломления в данной среде



Если луч света проходит через несколько сред с различными коэффициентами преломления, то, разбив его траекторию на бесконечно малые участки *ds* и помножив их на соответствующие коэффициенты преломления *n*, для суммы *t* получим выражение

$$t = \int_A^B n\,ds$$

Траектория распространения света определится из условия обращения этого интеграла в минимум.

Истоки принципа Гамильтона. «Принцип Ферма» из оптики – как источник принципа стационарности действия Гамильтона

Тот же вид имеет принцип наименьшего действия Мопертюи-Эйлера для движения материальной точки массой *m*

$$\int mvds$$

который обращается в минимум. Так как масса *m* есть величина постоянная, то движение материальной точки определяется интегралом

$$\int \mathrm{vds}$$

который только значением букв отличается от интеграла, характеризующего распространение света.

Принцип Гамильтона.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\,\mathrm{d}t$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U)\,\mathrm{d}t = 0$$

S – действие по Гамильтону

Действительный переход из начального положения в конечное совершится, если действие по Гамильтону будет иметь минимальную величину.

Литература

1. *Полак Л. С.* В. Р. Гамильтон и принцип стационарного действия // Труды Института истории науки и техники АН СССР. М.—Л.: Изд. АН СССР, 1936.
2. Вариационные принципы механики. Сборник классических работ. Ред., послесловие и примеч. Л. С .Полака. М.: ГИФМЛ, 1959 (в Dropbox).
3. *Полак Л. С.* Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. М.: ГИФМЛ, 1960.
4. *К. Ланцош*. Вариационные принципы механики. Ред и предисловие Л. С. Полака. М.: Мир, 1965.
5. *Л. С. Полак*. Вариационные принципы механики // История механики с древнейших времен до конца XVIII в. Под ред. А. Т. Григорьяна и И. Б. Погребысского. М.: Наука, 1971 (гл. 8, с. 191-223).