История математики
24 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Алгебра как наука о решении алгебраических уравнений. Основная теорема алгебры и проблема решения уравнений в радикалах. “Размышление об алгебраическом решении уравнений” Ж.Л. Лагранжа. Рассмотрение группы подстановок корней. “Арифметические исследования” Гаусса. Биография К.Ф. Гаусса. Создание теории групп и теории Галуа

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855).

В 1799 г. появилась докторская диссертация Гаусса, в которой он доказал **основную теорему алгебры**.

Основная теорема алгебры,

1) *«Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей величины»* - **Альбер Жирар**(1595-1632), 1629 г.

2) «Любой алгебраический многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных или квадратных множителей», **Эйлер,** 1742 г.

3)«Новое доказательство теоремы о том, что всякая

алгебраическая целая рациональная функция от одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени» - **докторская диссертация Гаусса**

В своей докторской диссертации «**Новое доказательство теоремы о том, что всякая алгебраическая целая рациональная функция от одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени**» Гаусс критически рассмотрел все существовавшие до него доказательства и обнаружил их общий недостаток: априорное предположение, что корни уравнений существуют.

Алгебраическое доказательство Гаусса исходило из предположения, что заранее задана область К комплексных чисел. Состояло это доказательство в установлении того факта, что каждое уравнение с вещественными коэффициентами имеет корень в указанной области. В иной, эквивалентной, постановке требуется доказывать разложимость любого полинома, коэффициентами которого являются действительные числа, на вещественные множители первой и второй степени.

Отказ от предположения о существовании корней уравнения, постулированный Гауссом, а также от обращения к фактам математического анализа, сильно затруднил задачу. Позже, в работах 1815 г., 1816 и 1849 г. Гаусс дал новые доказательства этой теоремы. Так, в работе 1815 г. ему пришлось строить **поля разложений многочленов**.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

«***Размышления об алгебраическом решении уравнений***», 1771

Общий принцип, установленный Лагранжем, таков:

Если $t = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$—данная рациональная функция корней $x_1, x_2, \cdots, x_n$ уравнения, то при всех возможных **перестановках x_i** она принимает n! значений. Поэтому можно составить уравнение степени n!, коэффициенты которого можно выразить через коэффициенты данного уравнения. Решение этой резольвенты (Лагранж вначале называл ее «reduite») дало бы n! корней t, а затем через последние нашлись бы x_i.

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813)

Однако этот метод действительно пригоден для решения уравнения n-й степени лишь в том случае, если **уравнение, содержащее t, можно привести к степени меньшей, чем n**.

Существенный шаг, сделанный Лагранжем заключается в том, что **вопрос о решении уравнений в радикалах он свел к рассмотрению множества подстановок корней уравнения.**

После Лагранжа в алгебре два направления:

1) Исследование уравнений с буквенными коэффициентами

(Руффини, Коши, Абель, Галуа)

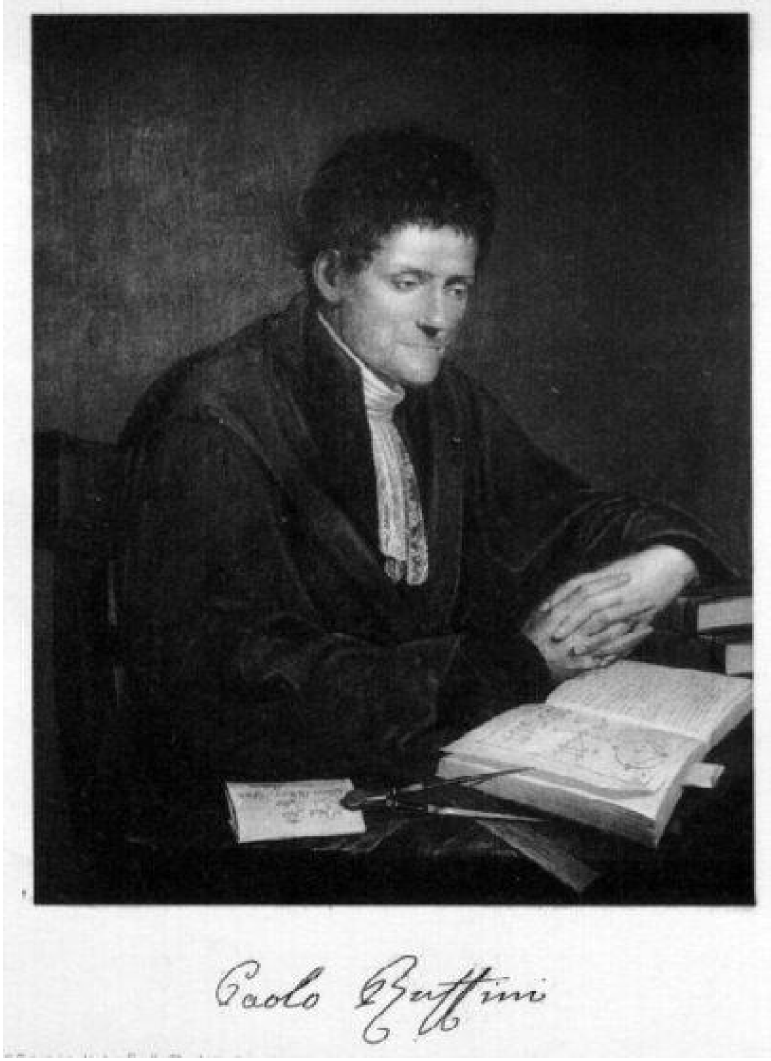
2) Классы разрешимых уравнений и уравнения с числовыми коэффициентами

(Гаусс, Абель, Галуа)

Теория Галуа.

Критерий разрешимости уравнения. Группы, поля.

Паоло Руффини (1765-1822)



В работе 1799 г. «**Общая теория уравнений, в которой доказывается невозможность алгебраического решения общих уравнений выше четвертой степени**» рассмотрел подстановки для n=5.

Паоло Руффини (1765-1822)

Приведенное в нем доказательство невозможности решения уравнения пятой степени он все время пытался улучшить в последующих работах от 1801, 1802, 1806 и 1813 годов. Хотя ему и не удалось это осуществить безупречно, но в названных работах он высказал ряд новых идей, на основе которых покоятся современные алгебраические теории.

Паоло Руффини (1765-1822)

Руффини подверг систематическому изучению проблему определения тех же перестановок, при которых меняют или не меняют свое значение рациональные функции от n величин, и доказал важную теорему, что не **существует трех- или четырехзначных функций от пяти величин**. При этом он впервые выявил основное понятие группы операций и рассмотрел важнейшие виды групп этой области.

Затем он простейшим образом доказал **теорему о невозможности решения уравнений высших степеней в радикалах, если используются лишь функции, рационально зависящие от корней**.

Наконец, Руффини обнаружил зависимость, существующую между **приводимостью уравнения и интранзитивностью его группы**, а также между разрешимостью уравнения посредством вспомогательных уравнений низшей степени и импримитивностью его группы.

Впрочем, у самого Руффини все еще не было подобной терминологии.

«*Арифметические исследования*», Карл Фридрих Гаусс, 1801 г.

Уравнение **деления круга** $\boldsymbol{x^n - 1 = 0}$

Задолго до Гаусса было известно решение этого уравнения для n=5:

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

далее замена: $z = x + \frac{1}{x}$, а т.к. $x^5 - 1 = 0$, то $z = x^4 + x$

В современных терминах результаты **Гаусса** звучали бы следующим образом:

Уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ определяет поле K величин $a + bx + cx^2 + dx^3$, где a, b, c, d — рациональные, и в этом поле мы можем выделить подполе L величин вида $\alpha + \beta$z.

«*Арифметические исследования*», Карл Фридрих Гаусс, 1801 г.

Поле K есть радикальное расширение второй степени поля L, а поле L — радикальное расширение второй степени поля рациональных чисел. Передавая таким же образом рассуждения самого Гаусса, мы бы в современной терминологии сказали, что он начинает с рассмотрения (накладывая для простоты ограничение, что n — простое число) поля величин $K = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-2} x^{n-2}, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-2} \epsilon Q\}$.

В одном месте он пишет, что для построения правильного n-угольника имеет значение не геометрическая симметрия n-угольника, а его более скрытая алгебраическая симметрия.

«Арифметические исследования», Карл Фридрих Гаусс, 1801 г.

Затем Гаусс выбирает в поле K другой, более удобный базис $x,\ x^2,\ \dots,\ x^{n-1}$ и определяет для любого разложения числа n — 1 на множители подмножество K_e, выраженное через **гауссовы периоды**. Для определения периода Гаусс рассматривает вместо чисел n, …, n-1 соответствующие им классы вычетов по модулю n.

Далее он показывает, что K_e — поле и $K_e \subset K_f$ тогда и только тогда, когда e делится на f. В этой конкретной ситуации он доказывает лемму о том, что образующий элемент поля удовлетворяет уравнению с коэффициентами из меньшего поля, степень которого равна степени большего поля над меньшим, указывает путь получения этих уравнений и показывает, что для рассматриваемых им полей они **разрешимы в радикалах**.

В итоге Гаусс получает теорему:

Если n — простое и $n - 1 = a_1 a_2 \ldots a_k$ — разложение n— 1 на простые множители, то решение уравнения

$x^n + \ldots + x + 1 = 0$ сводится к решению k уравнений степеней соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

В частности, так как $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, то решение уравнения

$x^{17} - 1 = 0$ сводится к решению четырех квадратных уравнений. Отсюда следует **возможность построения правильного 17-угольника** циркулем и линейкой.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829)

Абель родился в 1802 г. в семье бедного норвежского пастора. Во время своего обучения в университете в Христиании (современное Осло) в 1823 г. он некоторое время считал, что нашел формулу для решения общего уравнения 5-й степени в радикалах. Он скоро обнаружил свою ошибку и опубликовал в 1824 г. в виде брошюры весьма сжатое **доказательство невозможности решения общего уравнения 5-й степени в радикалах**.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829)

Это исследование привлекло к нему внимание, и ему была предоставлена стипендия для продолжения образования за границей. Абель поехал сначала в Берлин, где был с осени 1825 г. до весны 1826 г. В первом же номере журнала Креле (1826) опубликовано несколько статей Абеля. Одна из них — «**Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения степени выше четырех**» 1826, именно после выхода статьи в журнале Крелле, результат Абеля приобрел всеобщую известность.

Летом 1826 г. Абель посетил Италию, а конец этого года провел в Париже, где представил Парижской академии мемуар, содержащий знаменитую **теорему Абеля из теории абелевых функций**. За эту работу, которая сначала осталась без ответа и едва не была утеряна, Абелю посмертно была присуждена большая премия Парижской академии наук.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829)

Побыв еще в начале 1827 г. в Берлине, Абель летом 1827 г. вернулся в Христианию, где оказался в самом бедственном положении без работы и каких-либо средств к существованию. Подрабатывая уроками, Абель продолжал напряженно работать над теорией эллиптических функций и алгебраических уравнений. В 1827 и 1828 гг. были опубликованы две части его «**Исследований об эллиптических функциях**», а в 1829г. — «**Мемуар об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений**».

В конце 1828 г. Абель заболел туберкулезом, и умер в начале 1829 г., незадолго до получения приглашения на работу в Берлин.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829)

В работе 1826 г. «**Доказательство невозможности решения в радикалах общего уравнения степени выше четырех**» Абель рассматривал уравнения пятой степени с переменными коэффициентами. Решения он трактовал как выражения корней через алгебраические функции коэффициентов. Этот вид функций образуется из аргументов посредством конечного числа четырех арифметических операций и операции извлечения корня, показателем которого является простое число.

Один из параграфов этой работы посвящен вопросу о подстановках и о числе различных значений, которые при этом могут принимать функции нескольких переменных. Здесь доказана теорема: если число различных значений v меньше p — наибольшего простого числа, не превосходящего n, — то оно не превышает 2. Отсюда получается результат, что не существует функции от пяти величин, имеющей три или четыре различных значения.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829)

Однако приведенное в этой работе доказательство Абеля, как и результаты Руффини не дают возможности выделить классы уравнений, разрешимых в радикалах. Они не снимают также возможности такой разрешимости для уравнений с численными коэффициентами подбором подходящих иррациональностей в конкретном случае. Перед Абелем, как и в свое время перед Лагранжем, встала общая проблема разрешимости — основная проблема классической теории Галуа.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829)

В 1829 г. появляется работа Абеля — «**Мемуар об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений**». В ней он явно вводит понятие **области рациональности**, аналога современного понятия поля.

Областью рациональности относительно величин $a_{1,}a_{2,}\ldots, a_n$ Абель называет множество всевозможных величин, полученных из величин $a_{1,}a_{2,}\ldots, a_n$ и вещественных (или рациональных) чисел с помощью четырех арифметических действий (слово множество им не употреблялось).

Введение этого понятия крайне существенно для сколько-нибудь общих исследований в теории уравнений.

Нильс Хенрик Абель (1802—1829).

Вторым существенным шагом является доказательство разрешимости замечательного класса уравнений. Этот класс Абель определяет двумя условиями:

1) Каждый корень x_i уравнения выражается в виде рациональной функции от фиксированного корня x_1: $x_i = \theta_i(x_1)$;

2) Рациональные функции θ_i обладают свойством

$$\theta_i\big(\theta_j(x_1)\big) = \theta_j\big(\theta_i(x_1)\big)$$

Сейчас говорят, что это **нормальные уравнения с абелевой группой Галуа**.

Эварист Галуа (1811-1832)

Э. Галуа.

В 1823 г. родители отдали его учиться в лицей в Париже, там Галуа заинтересовался математикой, читает сочинения Лежандра, Лагранжа, Гаусса.

1828—1829 гг. стали тяжелыми для Галуа: его отец покончил с собой, а сам он дважды провалился на вступительном экзамене по математике в Политехническую школу.

Эварист Галуа (1811-1832)

- 1829 г. – поступил в Нормальную школу;
- 1831 г. – исключение из школы за республиканские выступления;
- июнь 1831 г. – Галуа под судом за вызывающее высказывание в адрес короля Луи-Филиппа, но его оправдали, приняв во внимание юный возраст.
- через месяц он снова был арестован, так как являлся одним из вожаков манифестации молодежи.
- В конце 1831 г. он был приговорен к шести месяцам тюрьмы.
- Вскоре после выхода из тюрьмы Галуа был убит на дуэли.

Эварист Галуа (1811-1832) , работы

Э. Галуа.

«**Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях**», 1829 г.

«**Из теории чисел**»,1830.

29 мая 1832 г. - дополненная рукопись в виде **письма к Огюсту Шевалье.**

«**Мемуар об условиях разрешимости уравнения в радикалах**», 1832 г. (оп. 1846 г. Лиувиллем)

«**Из теории чисел**»,1830.

Галуа рассматривает полиномиальные сравнения вида F (x) = 0 (mod p), не имеющие целых корней.

«*корни этого сравнения нужно рассматривать как род воображаемых символов, так как они не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к целым числам; роль этих символов в исчислении будет часто столь же полезной, как роль воображаемого* $\sqrt{-1}$ *в обычном анализе*» . Далее он рассматривает по сути дела **конструкцию присоединения к полю корня неприводимого уравнения** (явно выделяя требование неприводимости) и доказывает ряд теорем о конечных полях.

Определение области рациональности у Галуа:

«Более того, можно условиться рассматривать как рациональности все рациональные функции от некоторого числа определенных количеств, предположенных априори известными. Например, можно выбрать некоторый корень из целого числа и рассматривать как рациональности все рациональные функции от этого радикала».

Он указывает, что можно изменять область рациональности, присоединяя как известные новые количества, например, корни уравнения. Если к этой области присоединить все корни уравнения, то вопрос о разрешимости уравнения делается тривиальным.

Галуа доказал, что

для всякого уравнения $P_n(x) = 0$ можно в той же области рациональности найти некоторое уравнение Q (x) = 0, сейчас называемое **нормальным**.

Корни данного уравнения $P_n(x) = 0$ и соответствующего нормального уравнения Q(x) =0 выражаются друг через друга рационально.

Нормальное уравнение — это уравнение, обладающее тем свойством, что все его корни рационально выражаются через один из них и элементы поля коэффициентов.

Эварист Галуа (1811-1832)

Все подстановки корней нормального уравнения образуют группу G. Это и есть группа Галуа уравнения Q(x) = 0, или, что то же самое, уравнения $P_n(x) = 0$.

Она обладает, как выяснил Галуа, замечательным свойством: любое рациональное соотношение между корнями и элементами поля R (изначальная область рациональности) инвариантно относительно подстановок группы G. **Таким образом, Галуа связал с каждым уравнением группу подстановок его корней.**

Эварист Галуа (1811-1832)

Он же в 1830 г. ввел и само понятие «группа». Впрочем, строгого аксиоматического определения группы Галуа не дал.

Структура группы Галуа оказалась связанной с задачей разрешимости уравнений в радикалах. ***Чтобы разрешимость имела место, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая группа Галуа была разрешима.***

То есть, должна существовать цепочка вложений:

- $G \supset H_{p_1} \supset H_{p_2} \supset \ldots \supset H_{p_k}$,

- где H_{p_i} — нормальные делители с простыми индексами.

Эварист Галуа (1811-1832)

Общие алгебраические уравнения $P_n(x) = 0$ при n > 5 такой цепочки не имеют, так как группы подстановок имеют только один нормальный делитель индекса 2— подгруппу всех четных подстановок. Поэтому эти уравнения в радикалах неразрешимы.

Аппарат, введенный Галуа для установления разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, имел значение, выходящее за рамки указанной задачи. Его идея изучения структуры алгебраических полей и сопоставления с ними структуры групп конечного числа подстановок была плодотворной основой современной алгебры.

Поворотным пунктом в возникновении теории групп была публикация в 1846 г. основных работ Галуа.

Вскоре после работ Галуа началось уже систематическое развитие теории групп.

Артур Кэли (1821-1895)

В своих лекциях по истории математики Ф. Клейн говорит, что Кэли является «*создателем современной алгебраической геометрии как со стороны теории инвариантов, так и в ее геометрической части*».

В 1854 г. были опубликованы две части работы Кэли: ***«О группах, зависящих от символического уравнения $\boldsymbol{\theta^n = 0}$***». В этой работе Кзли определяет группу как множество символов с заданным законом композиции, который удовлетворяет условиям ассоциативности, существования единицы и однозначной разрешимости уравнений

$ax = b$, для любых a и b.

Артур Кэли (1821-1895)

Кэли указывает, что элементами группы могут быть подстановки, но могут быть и элементы другой природы, например кватернионы. В 1859 г. Кэли опубликовал третью часть этой работы, в ней он доказывает, что все группы простого порядка циклические, а также находит всевозможные группы порядка восемь.

Само название «группа» взято Кэли в память Галуа. Эти работы Кэли не сразу получили широкую известность, но потом стали примером определения группы и пересказываются почти во всех учебниках.

Жордан, Мари Энмон Камиль (1838—1922)

1) 1865 г. «**Комментарии к мемуару Галуа**»,
2) 1869 г. ее продолжение «**Комментарии к Галуа**»,
3) 1870, «**Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях**»

В сочинениях Жордана уже есть:

- явное выделение **нормальных подгрупп**,
- понятие **простой группы**,
- обстоятельное исследование **кратно-транзитивных групп**.

В сочинении 1870 г. впервые появляется понятие **гомоморфизма** (вернее, гомоморфизма на или эпиморфизма), причем любопытно, что выражение Жордана «группа Г изоморфна группе G» означает, что определен эпиморфизм G на Г.

Первое приложение теории групп

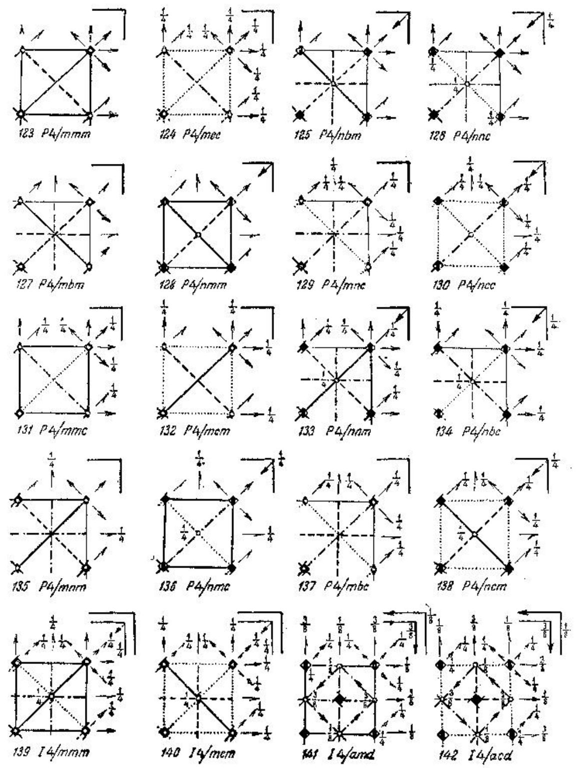


Рис. 116. Федоровские группы дитетрагонально-дипирамидального вида симметрии

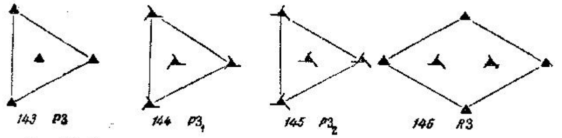


Рис. 117. Федоровские группы тригонально-пирамидального вида симметрии

В 1890—1891 гг. русский кристаллограф и геометр **Е. С. Федоров** и немецкий математик А. Шёнфлис независимо друг от друга решили ***методами теории групп*** задачу классификации всех кристал-лических пространственных решеток.

Они установили нали-чие 230 пространственных групп (на плоскости их 17) симметрии, состоящих из совокупности самосовмещений кристаллических структур.

Аксиоматика теории групп

Общепринятая аксиоматика появилась в работе **«Курс алгебры»** 1898 г. Генриха Вебера (1842-1913).

Группа G – множество элементов произвольной природы, в котором:

1) задана операция;
2) существует нейтральный элемент;
3) операция ассоциативна;
4) для любого элемента существует обратный

К концу XIX в. теория конечных групп сформировалась настолько, что для нее приобрела актуальность проблема классификации.

Проблема Бернсайда (поставлена в 1902 году): Если G - конечно порожденная периодическая группа, то обязательно ли G конечна?

На этот вопрос отрицательно ответили в 1964 году Евгений Соломонович Голод (1935-2018) и Игорь Ростиславович Шафаревич (1923-2017) которые привели пример бесконечной p-группы, которая конечно порождена.

Литература:

1) Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. Из-во «Наука», М., 1978 г.
2) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994
3) Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.1960, Из-во физматлит
4) Ф.Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М. Наука. 1989.