

История математики

23 лекция

*Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина*

Весенний семестр 2026 года

Математика XIX века.

Преобразование геометрии. Римановы
геометрии.

Экскурс: риманова геометрия и
рождение теории относительности.

Замечание: “непостижимая
эффективность” математики в
физических науках.

Классификация геометрических теорий
– “Эрлангенская программа” Ф. Клейна.

Н.И.Лобачевский

(20.11.1792 – 12.02.1856)



Н. И. Лобачевский

Гаусс, Карл Фридрих (1777-1855)

Брауншвейг-Геттинген



В 1828 г. вышла работа Гаусса *«Общие исследования о кривых поверхностях»*, в которой он вывел квадратичную форму поверхности:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

и ввел понятие гауссовой кривизны.

Полезным нововведением Гаусса явилось и использование в геометрии сферического отображения, обычно применявшегося в астрономии.

Каждой ориентированной прямой ставится в соответствие на единичной сфере точка, радиус-вектор которой параллелен этой прямой. Таким образом, область поверхности отображается с помощью нормалей в область на сфере. Опираясь на это отображение, Гаусс вводит понятие меры кривизны K (гауссова кривизна поверхности в данной точке) как отношение площадей соответствующих бесконечно малых областей на сфере и на поверхности.

Гаусс, Карл Фридрих (1777-1855)

После ряда вычислений Гаусс приходит к замечательному результату: «мера кривизны» является функцией только коэффициентов первой формы и их производных. Эта формула, как указывает Гаусс, *«приводит к славной теореме (theorema egregium): если кривая поверхность будет развернута на любую другую поверхность, то при этом мера кривизны в каждой ее точке остается неизменной»*.

Из своей «славной теоремы» Гаусс сделал следующий вывод: если одну поверхность удастся развернуть (иначе говоря, наложить или изометрически отобразить) на другую, то в соответствующих точках мера кривизны у обеих поверхностей должна совпадать.

«Славная теорема» установила новый неожиданный факт, что гауссова кривизна тоже принадлежит внутренней геометрии, и открыла возможности углубиться в вопросы изгибаемости поверхностей. Впрочем, сам Гаусс не стал заниматься этими вопросами, предоставив эту проблему своим последователям

Лиувилль придал более простой вид выражению для гауссовой кривизны и нашел, повторяя результат Миндинга (напомним, что именно **Готлиб Миндинг**, изучая поверхности постоянной гауссовой кривизны, в 1840 г. среди поверхностей отрицательной кривизны выделил поверхность, которую в дальнейшем назвали псевдосферой или поверхностью Бельтрами), уравнения поверхностей вращения как отрицательной, так и положительной постоянной кривизны.

Август Фердинанд Мёбиус (1790-1868)



*«Барицентрическое
исчисление», 1827 г.*

Август Фердинанд Мёбиус (1790-1868)

В работе «*Барицентрическое исчисление*» Августа Фердинанда Мёбиуса (1790-1868) значительное место занимает изучение «*аффинного сродства*». Мёбиус систематически пользуется не только ориентированными длинами отрезков, но и ориентированными площадями плоских фигур и ориентированными объемами тел, причем «знак» площади треугольника определяется порядком перечисления его вершин или сторон, выходящих из одной вершины, а «знак» объема тетраэдра — порядком перечисления его ребер, выходящих из одной вершины. Мёбиус показывает, что при аффинных преобразованиях сохраняются как отношения ориентированных длин отрезков, так и отношения ориентированных площадей и объемов.

-

Грассман, Герман Гюнтер (1809-1877)



1844 г. *«Учение о
линейном
протяжении»*

Грассман, Герман Гюнтер (1809-1877)

Важную роль в создании аффинной геометрии как отдельной ветви геометрии сыграла работа 1844 г. *«Учение о линейном протяжении»* Германа Грассмана(1809-1877).

Основными понятиями, введенными в «Учении о линейном протяжении», являются «протяженные образы», «протяженные величины» и «системы» различных ступеней — мы в настоящее время сказали бы: различных размерностей. «Протяженный образ» той или другой ступени — на современном языке многообразиие, а «система» — линейное пространство.

Грассман определяет «системы» третьей и высших ступеней

«Если я возьму далее третье основное изменение, которое не переводит тот же начальный элемент в элемент этой системы второй ступени и которое я поэтому буду называть независимым от первых двух, и подвергну произвольный элемент этой системы второй ступени этому третьему изменению (или противоположному ему), произвольно продолженному, то совокупность таким образом образуемых элементов является системой третьей ступени».

**Важной особенностью
многомерной геометрии
Грассмана является «внешнее
произведение» отрезков:**

«под внешним произведением n отрезков понимается такая протяженная величина n -й ступени, которая получается, если каждый элемент первого отрезка образует второй, каждый таким образом образованный элемент образует третий и так далее».

Экстенсивные величины» Грассмана — это наши векторы абстрактного линейного пространства. С такими векторами связывались и конкретные представления о направленных отрезках, которые Грассман здесь называл *Stab*, буквально «палка». «Внутреннее произведение» двух экстенсивных величин — это по существу скалярное произведение векторов, а «внешние произведения» двух и трех экстенсивных величин — по существу соответственно векторное и смешанное произведения векторов.

Уильям Роуэн Гамильтон (1805-1865)



Независимо от Грассмана к понятию вектора пришел **Уильям Роуэн Гамильтон** (1805-1865), которому принадлежит и сам этот термин. Понятие вектора у Гамильтона было тесно связано с введенными им кватернионами, и векторное исчисление он систематически изложил в *«Лекциях о кватернионах»* (1853).

Терминология многомерной геометрии появилась впервые в математическом сочинении **А. Кэли «Главы аналитической геометрии n измерений»** в 1843; впрочем, сама работа чисто алгебраическая и термин «геометрия n измерений», кроме заголовка в ней, больше не встречается.

Риман, Георг Фридрих Бернхард
(17.09.1826 – 20.07.1866)



Работы Римана по многомерной геометрии

- 1) «О гипотезах, лежащих в основании геометрии»;
- 2) вторая часть работы по теплопроводности, так называемый «Парижский мемуар»;
- 3) эскизы по топологии;
- 4) исследования по минимальным поверхностям

«О гипотезах, лежащих в основании геометрии»;

Эта работа — знаменитая речь Римана, произнесенная им в 1854 г. в Гёттингенском университете в качестве пробной лекции. Как мы уже говорили на одной из предыдущих лекций, в том году Римана в должности не утвердили, но именно с этого доклада ведет свое начало риманова геометрия.

В этой работе содержится в очень краткой (и причем чисто словесной) форме **учение о многомерных метризованных протяженностях или многообразиях**, которые сейчас мы называем римановыми пространствами.

Введённое Риманом понятие **n-мерного многообразия** по существу вполне отвечает современному понятию области в n-мерном пространстве: достаточно представить себе какую угодно систему, различные «состояния» (или «точки») которой определяются совокупностью числовых значений n независимых параметров, или координат, способных меняться в заранее заданных пределах, и тогда совокупность всех этих «состояний» уже образует n-мерное многообразие.

Необходимо, впрочем, обратить внимание на весьма важное **различие в словоупотреблении**: в наше время (например, в функциональном анализе) свободно употребляют термин «пространство» и называют так любое множество элементов при условии установления в нём надлежащих порядковых или предельных отношений; у Римана же «пространство» понимается в реально-физическом смысле: это — то трёхмерное многообразие, в котором располагаются наблюдаемые нами предметы внешнего мира.

Непрерывное многообразие по Риману

«Предположим, что некоторому понятию сопоставлено непрерывное множество состояний, причем от одного состояния определенным образом можно переходить ко всякому другому; тогда все эти состояния образуют просто протяженное или однократно протяженное многообразие, отличительным признаком которого служит возможность непрерывного смещения на каждом данном этапе лишь в две стороны — вперед и назад»

Переводя это множество состояний непрерывным образом в другое множество состояний, Риман определяет «дважды протяженное многообразие», из него аналогично получает «трижды протяженное многообразие», а повторяя эту операцию n раз, — « n -кратно протяженное многообразие».

Риман четко отделяет вторую, **метрическую, часть** своей работы от **первой, топологической**. Здесь он постулирует возможность измерения расстояний между точками многообразия. Риман определил метрику на « n -кратно протяженном многообразии», не сводящуюся к евклидовой и по существу являющуюся обобщением гауссовой внутренней геометрии поверхности. Именно, определив n -кратно протяженное многообразие, Риман поставил вопрос о «метрических отношениях, возможных на таких многообразиях», и о возможности *«результаты вычислений выразить в геометрической форме»*.

Математически квадрат длины линейного элемента выражается у Римана в виде «основной» положительной квадратической формы от дифференциалов координат, причём коэффициенты формы являются функциями координат данной точки. Риман приводит доводы в пользу выбора именно такой формулы; легко заметить, что эта формула является обобщением гауссовой формулы

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

После того, как введена длина линейного элемента ds , представляется возможным вычислить расстояние между двумя точками многообразия A и B вдоль соединяющей их кривой γ посредством интеграла $\int_{\gamma} ds$.

Таким образом, для того чтобы ввести мероопределение на многообразии, Риман указывает форму линейного элемента, т. е. задает коэффициенты соответствующей квадратической формы в виде функций от координат: линейный элемент «определяет метрику» многообразия.

Задача «Парижского мемуара»

«Определить, каково должно быть тепловое состояние однородного твердого тела, чтобы система изотермических кривых, заданная в определенный момент времени, оставалась системой изотермических кривых в любой момент времени таким образом, чтобы температура точки выражалась в виде функции времени и еще двух независимых переменных».

Риман о физическом пространстве

«Если допустим, что тела существуют независимо от места их нахождения, так что мера кривизны везде постоянна, то из астрономических наблюдений следует, что она не может быть отлична от нуля; или, если она отлична от нуля, то по меньшей мере можно сказать, что часть Вселенной, доступная телескопам, ничтожна по сравнению со сферой той же кривизны».

Теория инвариантов появилась в середине XIX в. на стыке трех наук:

- 1) теории чисел (гауссова классификация бинарных квадратичных форм);
- 2) геометрии (проективные свойства кривых);
- 3) алгебры (теория определителей).

Теория инвариантов

1) Артур Кэли (1821-1895), большинство его работ написано по линейной алгебре, дифференциальным уравнениям, эллиптическим функциям. Именно он первый сформулировал определение группы в современном виде (до него группы — группы перестановок)

2) Джеймс Джозеф Сильвестр (1814-1897), в 1878 г. основал Американский математический журнал. Основные работы по теории матриц, теории чисел и комбинаторике.

Именно Сильвестр ввел в математику почти все термины теории инвариантов, даже само слово «инвариант».

Теория инвариантов

- 3) Карл Густав Якоби (1804-1851);**
- 4) Людвиг Отто Гессе (1811-1874);**
- 5) Шарль Эрмит (1822-1901).**

Клейн Феликс (1849 – 1925)

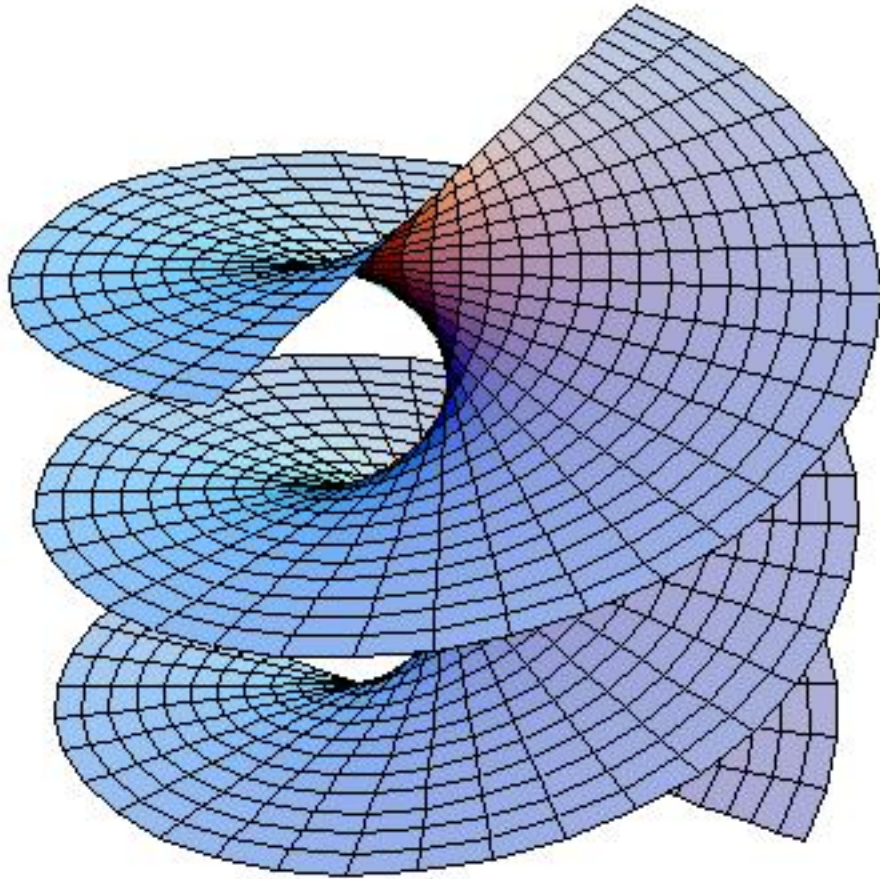


Клейн Феликс (1849 – 1925)

Феликс Клейн родился в Дюссельдорфе, в семье чиновника. Окончил гимназию в родном городе, затем учился математике и физике в Боннском университете.

В это время в Бонне отделением математики и экспериментальной физики заведовал **Юлиус Плюккер (1801-1868)** и Клейн стал его ассистентом. Он помогал Плюккеру не только в подготовке лекций по экспериментальной физике, но и в работе над изданием рукописи «Новая геометрия пространства, основанная на рассмотрении прямой линии как элемента пространства». В этой работе были заложены основы **линейчатой геометрии** и она же определила тематику первых работ самого Клейна.

Линейчатая геометрия



В 1868 г. Плюккер умер, и Клейн вплотную занялся изданием его работы. Так в Геттингене он познакомился с **Альфредом Клебшем** (1833-1872), автором ряда работ по теории инвариантов, алгебраической геометрии и теории абелевых функций.

Благодаря Клебшу Клейн вошел в круг исследований английской теоретико-инвариантной школы (Кэли, Сильвестр и др.).

В 1869 г. Клейн приезжает в Берлин, где встречается с норвежцем **Софусом Ли** (1842-1899), тогда еще тоже начинающим математиком, однако, уже знакомым с наброском **теории групп** подстановок по лекции Л. Силова о теории Галуа.

Софус Ли (1842-1899),



1897 – премия
Лобачевского (вручается
с 1897 г.)

Клейн о своем общении с С.Ли писал:

«Мы работали, начав от различных исходных пунктов, но над одними и теми же или родственными проблемами. Поэтому мы вскоре вступили в почти ежедневный обмен мыслями, и это нас сблизило, тем более что наши геометрические интересы были чужды большинству из нашего окружения»

В 1872 г. Феликс Клейн произносит вступительную лекцию на должность профессора Эрлангенского университета. Позже она была опубликована под названием **«Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований»**, но в историю вошла как **«Эрлангенская программа»**.

В этом докладе Клейн задается вопросом: **«Что такое геометрия?»**

ГЕОМЕТРИЯ

A mind map diagram with 'ГЕОМЕТРИЯ' at the center. Ten lines radiate from the center to ten rectangular boxes, each containing a branch of geometry. The boxes are colored in two shades: light green and light blue. The branches are: 'гиперболическая' (top), 'псевдоевклидова' (top-right), 'топология' (right), 'риманова' (bottom-right), 'афинная' (bottom), 'проективная' (bottom-left), 'конформная' (left), 'евклидова' (left), 'сферическая' (top-left), and 'многомерная' (top-left).

гиперболическая

псевдоевклидова

топология

риманова

комплексная

афинная

проективная

конформная

евклидова

сферическая

многомерная

«Что такое геометрия?»

*«Наиболее существенное понятие, необходимое для дальнейшего изложения, есть понятие о **группе пространственных изменений**. . . Существуют такие преобразования пространства, **которые оставляют вообще без изменений геометрические свойства пространственных образов**. Геометрические свойства, по самому определению, не зависят от положения, занимаемого в пространстве изучаемым образом, от его абсолютной величины и, наконец, от ориентации в расположении его частей. Свойства пространственного образа не изменяются поэтому от всех движений пространства, от его преобразований подобия, от процесса зеркального отражения и от всех преобразований, которые могут быть из них составлены. Совокупность всех этих преобразований мы назовем **главной группой изменений пространства**; геометрические свойства не изменяются от преобразований главной группы, и обратно, можно сказать: геометрические свойства характеризуются их неизменяемостью относительно преобразований главной группы».*

По Клейну, чтобы задать геометрию,
необходимо:

- 1) Установить некоторое **многообразие**, на котором мы строим геометрию;
- 2) Установить **группу отображений** этого многообразия на самого себя, которая и будет определять изучаемую геометрию, т.к. в одном множестве может быть много геометрий;

Эрлангенская программа Ф.Клейна

1872 г. речь «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований»

По Клейну для построения геометрии нужно задать:

- 1) Некоторое многообразие элементов
- 2) Группу преобразований, дающей возможность отображать элементы заданного многообразия друг на друга.

Примеры геометрий:

- 1) евклидова геометрия: инварианты группы перемещений;
- 2) аффинная геометрия: инварианты аффинных преобразований;
- 3) проективная геометрия: инварианты дробно-линейных преобразований;
- 4) геометрия Лобачевского: инварианты группы дробно-линейных преобразований, переводящих некий круг или коническое сечение в себя.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

проективные

U

U

U

аффинные

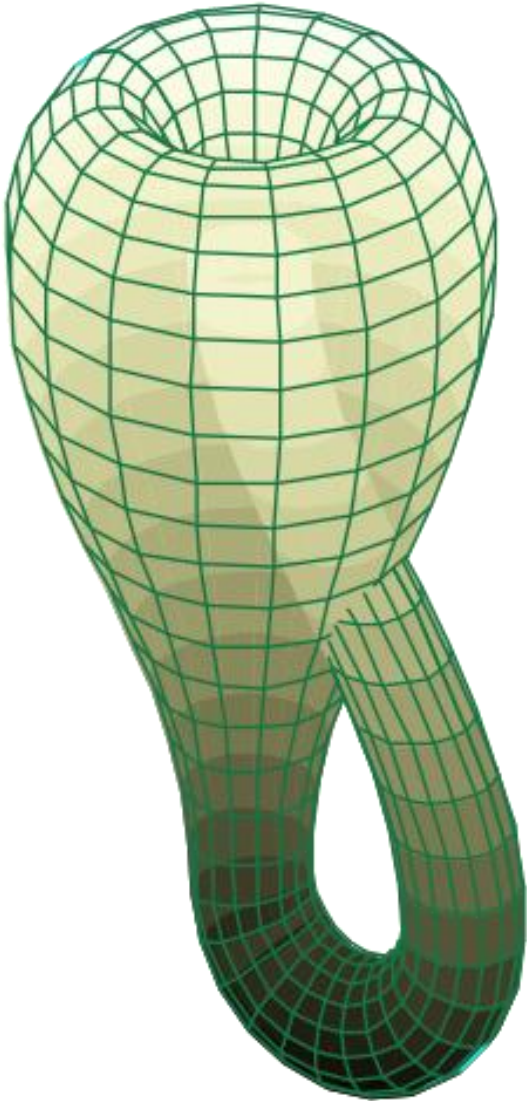
гиперболические

эллиптические

U

конгруэнтные

БУТЫЛКА КЛЕЙНА



die Fläche - *поверхность*
die Flasche - *бутылка*

1905 г. **Герман Минковский** (1864-1909) дополнил классификацию Клейна, введя «эрлангенский» подход в физику. Минковский заметил, что **теорию относительности** можно сформулировать как **теорию инвариантов групп Пуанкаре**.

Литература:

- 1) Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. Изд-во «Наука», 1981
- 2) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994
- 3) Визгин В.П. К истории «Эрлангенской программы» Ф. Клейна. Историко-математические исследования. — М.: Наука, 1973. — № 18. — С. 218-248.
- 4) Бернхард Риман. Сочинения. Перевод с немецкого, под редакцией, с предисловием и примечаниями В.Л.Гончарова, Государственное издание технической литературы, Москва, 1948.