История и методология механики

Евгений Алексеевич Зайцев
e_zaitsev@mail.ru

Лекция № 23

План лекции

Принцип Даламбера (история становления)

1. Задача о колебании составного (физического) маятника.
2. Предпосылки и предыстория принципа Даламбера. Принцип Даламбера.
3. Принцип Германа-Эйлера. Трактовка принципа Даламбера Ш. Делоне.

Принцип кинетостатики (принцип Даламбера)

Принцип кинетостатики используют для упрощения решения ряда технических задач.

Реально силы инерции приложены к телам, связанным с разгоняющимся телом (к связям).

Даламбер предложил *условно прикладывать* силу инерции к активно разгоняющемуся телу. Тогда система сил, приложенных к материальной точке, становится уравновешенной, и можно при решении задач динамики использовать уравнения статики.

Принцип Даламбера:

Материальная точка под действием активных сил, реакций связей и условно приложенной силы инерции находится в равновесии:

$$\sum^{n} \overline{F_k} + \sum^{n} \overline{R_k} + \overline{F_{\text{ин}}} = 0; \qquad \overline{F_{\text{ин}}} = -m\overline{a}.$$

Проблема в истории механики

Почему в теоретической механике, начиная с XVII в., было предпринято большое число попыток свести динамику к статике?

1. Статика (гением Архимеда) была математизирована уже в античности.

Динамика античности и средних веков настоящей математизации реально не была математизирована. Проблема простых машин (в статике и динамике), Гвидобальдо дель Монте XVI в.).

2. Конкурс Берлинской академии наук по вопросу о необходимых и контингентных основаниях механики (сер. XVIII в.).

Существуют ли аксиомы динамики, из которых можно вывести все законы динамики (подобно тому, как существуют аксиомы статики Архимеда)?

Если существуют, то законы динамики имеют необходимый характер.

Если нет, то они контингентны, то есть, существенно опираются на практический опыт (который не обладает столь же высокой степенью достоверности как дедуктивный вывод из аксиом).

Проблема в истории механики

Почему в теоретической механике, начиная с XVII в., было предпринято большое число попыток свести динамику к статике?

3. Трудности, связанные с понятием силы. В частности, вопрос об отношении (тождестве и различии) «мертвых» и «живых» сил.

(ср. Галилей и др. в «теория удара»).

«Мертвые» силы действовали в статике. Они не вызывали движения, действие было причиной равновесия. «Живые» силы, напротив, были причиной движения.

Это разные силы или одинаковые? В XVII – XVIII вв. это была проблема.

4. Проблема «силы инерции» (термин введен И. Ньютоном). Каково отношение силы инерции к ускоряющей силе. Проблема параллелограмма сил.

Динамика и ее законы (по Лагранжу)

«Динамика — это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о переменных движениях, которые они должны вызывать. Эта наука целиком обязана своим развитием новейшим ученым, и Галилей является тем лицом, которое заложило первые ее основы. До него силы, действующие на тела, рассматривали только в состоянии равновесия, и хотя ускоренное падение твердых тел и криволинейное движение брошенных тел не могли приписать какой-либо иной причине, кроме постоянного действия тяжести, тем не менее никому до Галилея не удалось определить законов этих повседневных явлений — несмотря на то, что причина их столь проста. Галилей первый сделал этот важный шаг и этим открыл новый и необозримый путь для прогресса механики. Его открытие было изложено и развито в работе, озаглавленной: «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук»(1638).

Открытие спутников Юпитера, фаз Венеры, солнечных пятен и т. д. потребовало лишь наличия телескопа и известного трудолюбия, но нужен был необыкновенный гений, чтобы открыть законы природы в таких явлениях, которые всегда пребывали перед глазами, но объяснение которых тем не менее всегда ускользало от изысканий философов».

Лагранж о динамике и ее законах

«Теория неравномерных движений и ускоряющих сил, вызывающих эти движения, основана на следующих общих законах: каждое движение, сообщенное телу, является по своей природе равномерным и прямолинейным; различные движения, сообщенные одновременно или последовательно одному и тому же телу, складываются таким образом, что в каждое данное мгновение тело находится в той самой точке пространства, в которой оно должно было бы очутиться в результате сочетания этих движений, если бы каждое из них в действительности существовало отдельно в теле.

В этих-то двух законах и содержатся известные принципы силы инерции и сложного движения.

Галилей первый открыл оба эти принципа и вывел из них законы движения брошенных тел, складывая наклонное движение, являющееся результатом сообщенного телу импульса, с падением по вертикали, вызываемым действием силы тяжести».

Задача о колебании физического маятника и ее роль в развитии динамики (по Лагранжу)

Лагранж: «попыткам решения задачи о центре колебания главным образом обязан прогресс, сделанный динамикой».

В ходе решения этой задачи и были сформулированы частные варианты принципа Даламбера.

Впервые задача поставлена М. Мерсенном (что известно из писем Декарта).

Задача о центре удара (мечом).

Замечание Клиффорда Трусделла (которое повторяю вновь и вновь):

Общая идея (общий принцип) механики всегда появляется впервые при решении особой (частной) задачи (К. Трусделл).

И обычно в очень неуклюжей форме…

Задача о колебании физического маятника и ее роль в развитии динамики (по Лагранжу)

Лагранж: «попыткам решения задачи о центре колебания главным образом обязан прогресс, сделанный динамикой».

Впервые задача поставлена М. Мерсенном (что известно из писем Декарта).

Замечание: общая идея (общий принцип) механики всегда появляется впервые при решении особой (частной) задачи (К. Трусделл)

Формулировка Лагранжа:

«Нить, рассматриваемая как несгибаемая линия, лишенная тяжести и массы и закрепленная одним концом в неподвижной точке, а на другом нагруженная небольшим грузом, который можно себе представить сведенным в точку, образует то, что называют *простым маятником,* закон колебаний этого маятника зависит исключительно от его длины, т. е. от расстояния между грузом и точкой подвеса.

Но если на этой нити, на различных расстояниях от точки ее подвеса, укрепить еще один или несколько грузов, то мы тогда получим сложный маятник, движение которого должно дать в известном смысле нечто среднее между движениями различных простых маятников, какие получились бы, если бы каждый из указанных грузов был подвешен на отдельной нити».

Задача о колебании физического маятника (Лагранж)
Качественный анализ

«В самом деле, с одной стороны, сила тяжести стремится заставить все грузы опускаться одинаково в одно и то же время, а с другой стороны, несгибаемость нити заставляет их именно в это самое время описывать неравные дуги, пропорциональные их расстояниям от точки подвеса; таким образом между этими грузами должен иметь место некоторый вид компенсации и распределения их движений, так что грузы, находящиеся ближе всего к точке подвеса, *ускоряют* колебания более далеких, а последние, наоборот, *замедляют* колебания первых.

Таким образом на нити должна существовать такого рода точка, что если в ней укрепить тело, то движение последнего не будет ни ускоряться, ни замедляться остальными грузами, и движение будет совершенно таким же, как если бы только одно это тело было подвешено на нити.

Эта точка и будет истинным центром колебания сложного маятника».

Лагранж о решении Гюйгенса «Маятниковые часы»

Использование Гюйгенсом «энергетических» соображений:

«Вместо того, чтобы вывести этот закон из основных положений механики, Гюйгенс ограничился применением *косвенного положения*, которое заключается в следующем: если несколько грузов, прикрепленных любым образом к маятнику, опускаются исключительно под действием тяжести и если представить себе, что в некоторый момент они освобождены и отделены друг от друга, то каждый из них под влиянием полученной им при падении скорости сможет подняться на такую высоту, что общий центр их тяжести достигнет той же самой высоты, с какой он перед этим опустился».

Гюйгенс. Вывод формулы для центра колебаний физического маятника

Лагранж: «Правда, Гюйгенс не установил этого положения непосредственно, а вывел его из двух гипотез, которые, по его мнению, следовало допустить в качестве постулатов механики.

Одна из этих гипотез заключается в том, что центр тяжести системы тяжелых тел никогда не может подняться на высоту, большую той, с которой он упал, как бы мы ни изменяли взаимное расположение тел, ибо в противном случае стало бы возможным непрерывное движение.

Вторая гипотеза заключается в том, что сложный маятник всегда сам собою способен подняться на такую же высоту, с какой он свободно упал».

Отсюда Гюйгенс получил выражение для центра колебания сложного маятника:

$$y = \frac{\sum mr^2}{\sum mr}.$$

Вопрос: В чем причина скептического отношения Лагранжа к энергетическим гипотезам Гюйгенса?

Замечание: энергетические гипотезы Гюйгенса критиковал также Иаков Бернулли (см. далее). Почему?

Колебание физического маятника (по Гюйгенсу). «Маятниковые часы» гл. 4

«Энергетический принцип» и его следсвия

«Система весомых тел, движущихся под влиянием силы тяготения, не может двигаться так, чтобы общий центр тяжести тел поднялся выше первоначального положения».

Гюйгенс считал это утверждение само собой разумеющееся аксиомой, выражением той мысли, что весомые тела не могут двигаться вверх без внешнего воздействия.

Из «энергетического принципа» Гюйгенс выводит центральное предложение IV:

«Если маятник, состоящий из многих весомых частиц, свершив часть колебаний, ударится о плоскость и распадется на все его составляющие частицы, и эти частицы будут двигаться вверх до той высоты, до которой они могут при приобретенной скорости, то центр тяжести общий поднимется на ту же высоту, на которой он был до начала колебания маятника».

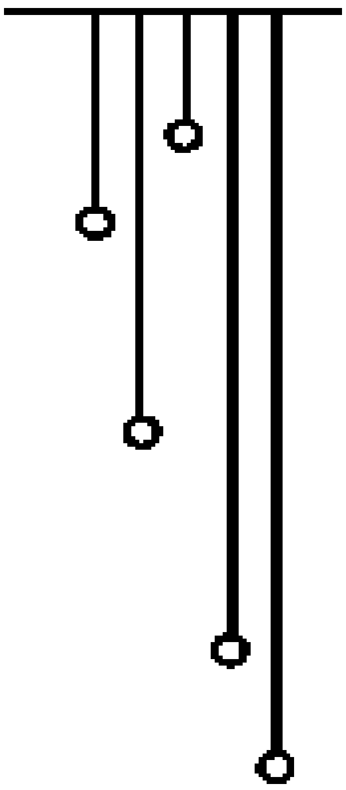
Физический маятник

Более длинные нитяные маятники совершают свое колебание медленнее и более короткие — быстрее.

Представим себе физический маятник, т.е. тяжелое тело, которое может совершать колебания. Каждая часть этого тела, рассматриваемая в отдельности, имеет свой собственный период колебания.

Если мы представим себе много нитяных маятников неравной длины, то более короткие будут колебаться быстрее, а более длинные — медленнее.

Однако, если эти части будут соединены, то вследствие их связи все тело (физический маятник) будет колебаться одним общим движением.



Колебание физического маятника. Основная идея (по Гюйгенсу)

Когда все эти частичные маятники связаны в один маятник, то *колебания более длинных маятников ускоряются*, а *колебания более коротких замедляются.*

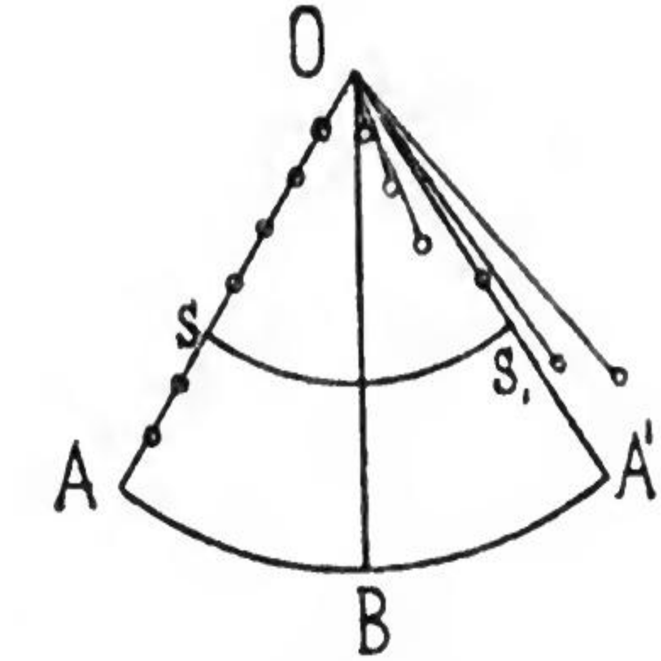
В результате получается один средний период колебаний. Отсюда следует существование математического маятника, длина которого есть нечто среднее между длиной самого короткого и самого длинного маятника и который имеет ту же продолжительность колебания, что и исходный физический маятник.

Это будет маятник, период колебания которого равен периоду колебания исходного физического маятника.

Колебание физического маятника (по Гюйгенсу)

Пусть *OA* – линейный маятник, состоящий из нескольких масс, обозначенных точками. Предоставленный самому себе, он из *OA* через точку *B* перемещается в *OA',* причем *AB = B A'.* Его центр тяжести *S* поднимется столь же высоко, насколько он вначале опустился.

Если в положении *OB* освободить эти массы от связей (маятник «ударится о плоскость и распадется на все его составляющие частицы»), то каждая из них, имея скорость, обусловленную связью, достигнет некоторой высоты. При этом общий центр тяжести этих масс *S* будет находиться на той же высоте, с которой начал падать центр тяжести маятника. Если мы остановим каждую из свободно колеблющихся масс на *наибольшей высоте,* то более короткие маятники окажутся ниже линии *OA',* а более длинные — выше ее; центр тяжести всей системы останется на *OA'* в прежнем своем положении (симметричном).



«Петербургский принцип» Германа-Эйлера и принцип Даламбера. Кинетостатика. Общие замечания

Принципы, история которых излагается ниже,— суть принципы кинетостатики, т. е. того раздела механики, в котором задачи динамики (кинетики) несвободной системы точек решаются методами статики.

Возможность применить уравнения статики к системе точек, не находящихся в равновесии, основывается на двух принципах, которые часто объединяют под общим названием начала Даламбера.

В действительности сначала был разработан принцип, существенно связанный с понятием «силы инерции» («Петербургский принцип»), и лишь после этого появился собственно принцип Даламбера, в котором понятие силы инерции совсем не используется.

Как будет показано, они переводятся один в другой, чем и объясняется их смещение.

Первый шаг на пути к принципу Даламбера. Яков Бернулли. Три мемуара о движении составного маятника (1686, 1691, 1703).

1. Acta Eruditorum (1686), P. 356;

2. Acta Eruditorum (1691), P. 317;

3. «Общее доказательство центра колебания, выведенное из природы рычага» (1703) // *Histoire de l’Acad. Royale des Sci. de Paris (1703), P.78.*

Перепечатка: Bernoulli J. *Opera* (1744), T. 1, P. 277 sq., 460 sq.; T.2, P. 930 sq.

В этих мемуарах Бернулли впервые (в простейшей форме) сформулировал один из важнейших принципов динамики системы со связями – принцип сведения динамической задачи о движении системы к статической задаче о равновесии той же системы.

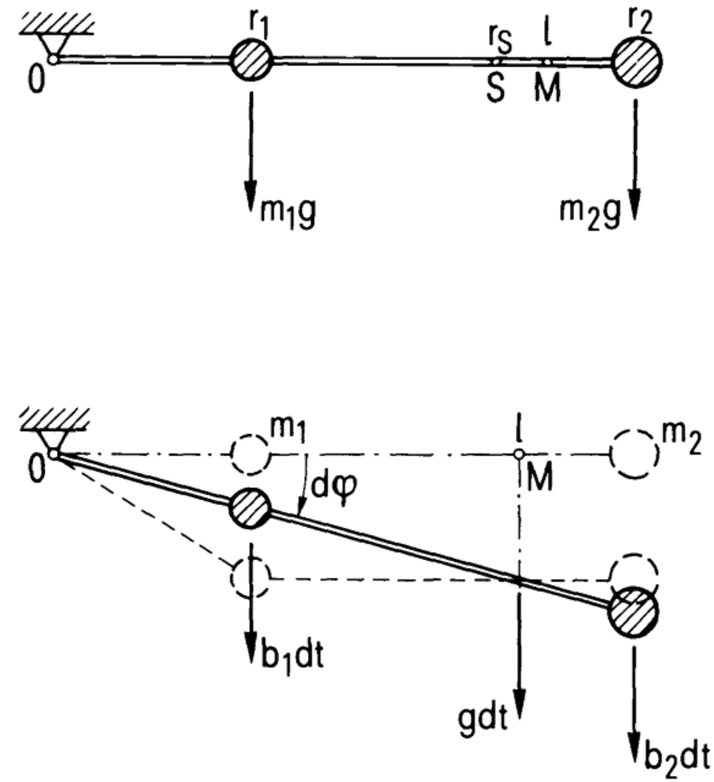
Он впервые ввел при этом в рассмотрение «силы инерции».

Через 50 лет принцип, использованный Бернулли, получил разработку в трудах Даламбера (принцип Даламбера).

Лагранж о первом мемуаре Якова Бернулли (1686)

«Бернулли рассматривает сначала два груза, подвешенных на прямой несгибающейся линии и указывает, что скорость, какую первый груз, т. е. груз, расположенный ближе к точке подвеса, приобретает, двигаясь по определенной дуге, должна быть меньше той скорости, какую он приобрел бы, если бы он свободно описал эту дугу, и что в то же время скорость, которую приобретает второй груз, должна быть больше той скорости, какую он приобрел бы, если бы он свободно описывал эту дугу».

«Аналитическая механика», с. 174

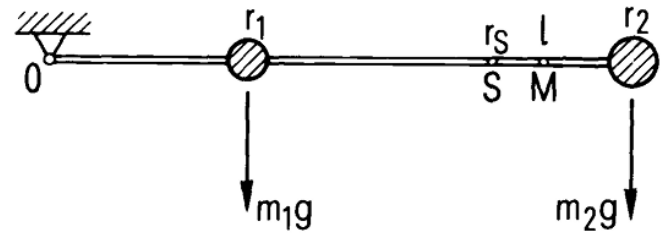


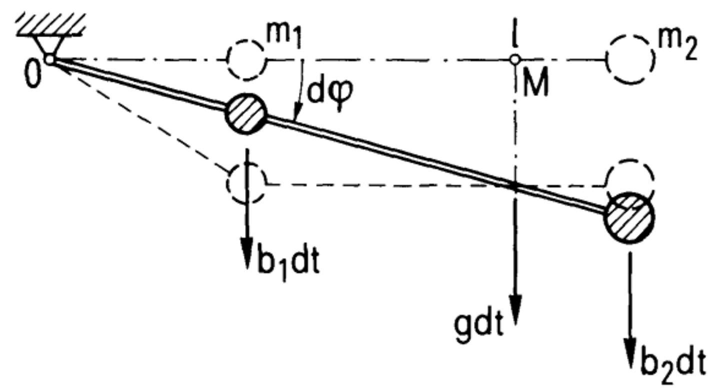
Чертеж: Istvan Szabo (1979), S. 32

Лагранж о первом мемуаре Якова Бернулли (1686)

«Таким образом скорость, теряемая первым грузом, передается второму, а так как эта передача происходит при помощи *рычага*, способного двигаться около неподвижной точки, то она должна следовать закону равновесия сил, приложенных к этому рычагу, так что потеря первого груза в скорости относится к выигрышу второго обратно отношению соответствующих плеч рычага, т. е. расстояний от точки подвеса.

Отсюда, а также из того обстоятельства, что фактические скорости обоих грузов должны быть прямо пропорциональны указанным расстояниям, можно легко определить эти скорости, а следовательно, и движение маятника».





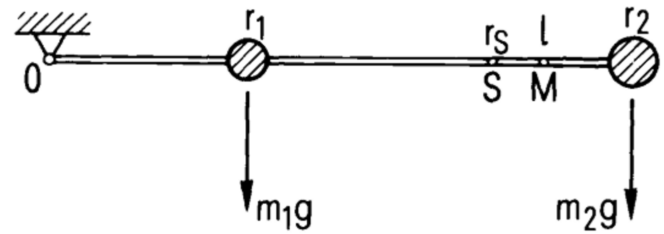
Чертеж: Istvan Szabo (1979), S. 32

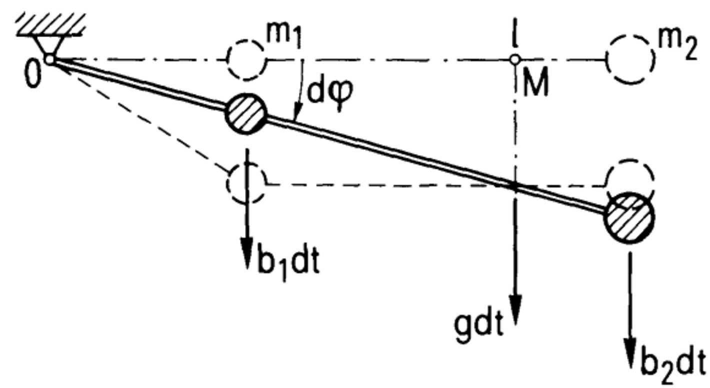
Лагранж о первом мемуаре Якова Бернулли (1686)

«Таков был первый шаг, который был сделан по пути к прямому разрешению этой знаменитой задачи.

Мысль о том, чтобы отнести к рычагу те силы, которые получаются из приобретенных или потерянных грузами скоростей, является очень тонкой и дает ключ к правильной теории; но Яков Бернулли допустил ошибку, рассматривая скорости, приобретенные в течение некоторого <u>конечного</u> времени; было бы правильнее рассматривать элементарные скорости, достигнутые в течение одного <u>мгновения</u>, и сравнить их с теми скоростями, которые стремятся сообщить силы тяжести в течение того же самого мгновения».

На ошибку указал Лопиталь в 1691 году.





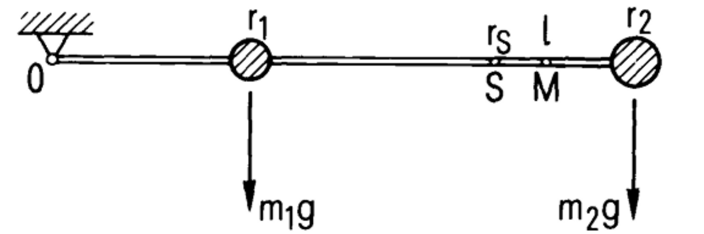
Чертеж: Istvan Szabo (1979), S. 32

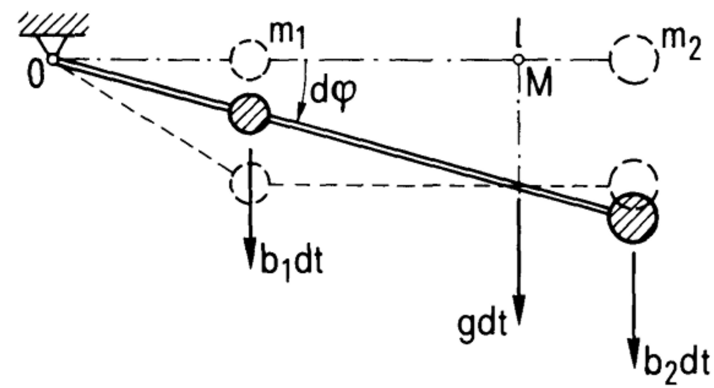
Первое (ошибочное) рассуждение Бернулли (1686). Движение за конечное время

Точечные грузы m_1 и m_2 на невесомом стержне на расстояниях r_1 и r_2 от шарнира. Каждый стремится к движению вниз с ускорением свободного падения (чему препятствует наличие жесткой связи). Поэтому при совместном движении груз m_1 утрачивает часть естественной склонности к падению, а m_2 эту же часть приобретает. Эту идею Бернулли выражает виде принципа: изменения в скорости двух грузов уравновешиваются на рычаге (второго рода) (0 r_1 r_2).

<u>Ошибка</u> Бернулли: скорости (утраченная и приобретенная) рассматриваются за конечное время.

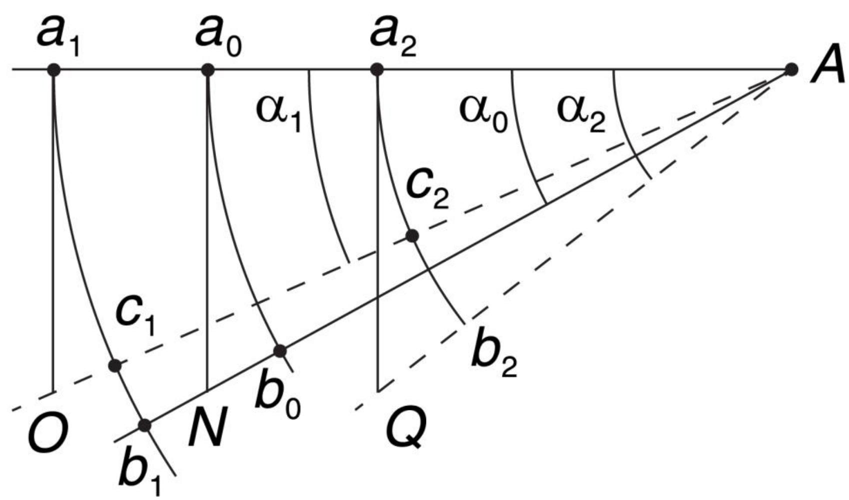
На деле, надо было рассматривать элементарную скорость dv, приобретенная за бесконечно малое время dt. Эту ошибку и заметил Лопиталь. В мемуарах (1691, 1703) Бернулли ее исправил.





Чертеж: Istvan Szabo (1979)

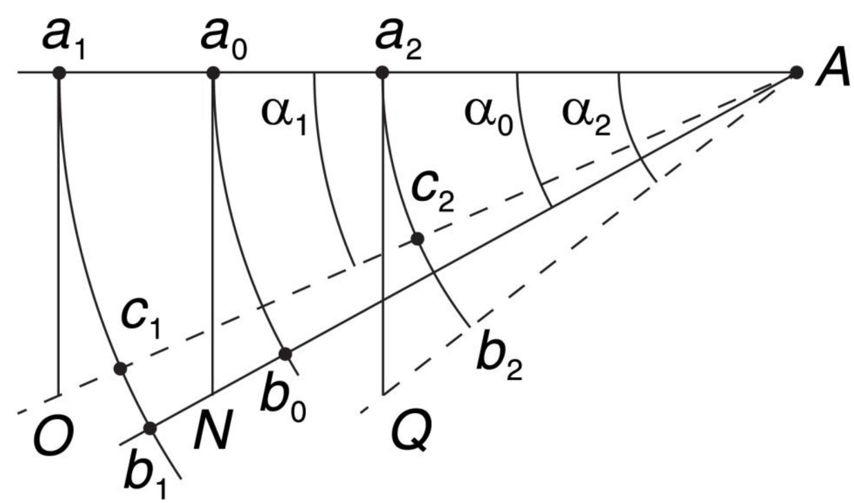
Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания»
Реконструкция идеи: И.Б. Погребысский, В.И. Яковлев



Пусть в точках a_1 и a_2 (рис. 1) жесткого невесомого стержня Aa_1, совершающего колебания около неподвижной точки A, укреплены две точечные массы m_1 и m_2. Необходимо найти длину изохронного математического маятника или расстояние $l_0 = Aa_0$ до точки a_0, в которой сосредоточена масса $m_0 = m_1 + m_2$, если $Aa_1 = l_1, Aa_2 = l_2$.

Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания»
Реконструкция идеи: И.Б. Погребысский / В.И. Яковлев

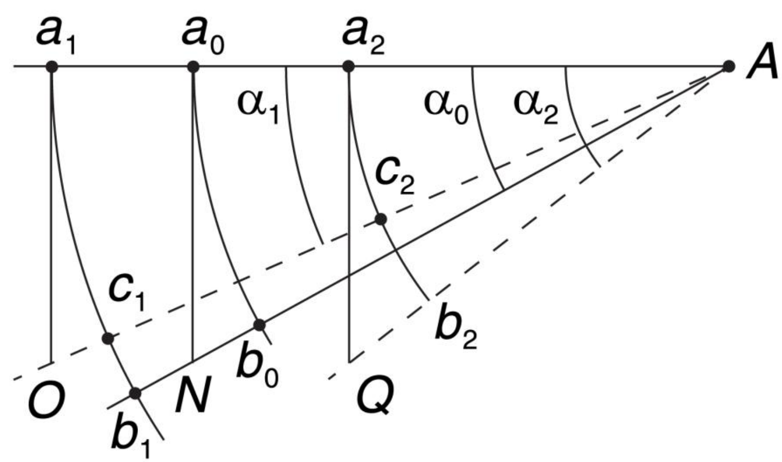
Если бы стержень свободно падал под действием тяжести грузов m_1 и m_2, то за Δt точки a_1, a_2, a_0 переместились бы в положения O, N, Q, причем $Oa_1 = Na_0 = Qa_2$. Но стержень поворачивается вокруг точки A и через Δt займет положение AN, точка a_1 пройдет путь $a_1b_1 > a_1O$, точка a_0 – путь $a_0b_0 \approx a_0N$, точка a_2 – путь $a_2b_2 < a_2Q$ Пока точка a_1 не достигла положения c_1, все точки "падали" свободно. Но в положении c_1, как говорит Я. Бернулли, "действие веса точки a_1 истощилось" [1, с.150] и она продолжает свое движение к точке b_1 за счет веса точки a_2.



Принципиальный +момент: Δt – *бесконечно малое (!) время*

Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания»
Реконструкция: И.Б. Погребысский / В.И. Яковлев

За время прохождения точкой a_1 дуги c_1b_1 точка a_2 пройдет меньшую дугу c_2b_2, то есть точка a_1 действует на a_2 замедляющим образом. Таким образом, точка a_1 своей инерцией (силой инерции) замедляет вращение стержня, а точка a_2 – его ускоряет, точка a_0 не вносит никакого вклада, оставаясь в данный момент как бы неподвижной. В таком случае стержень Aa_1 можно отождествлять с рычагом второго рода с точкой опоры в A, находящимся в равновесии под действием сил инерции $m_1c_1b_1$ и $m_2c_2b_2$ грузов m_1 и m_2, направленных в противоположные стороны.



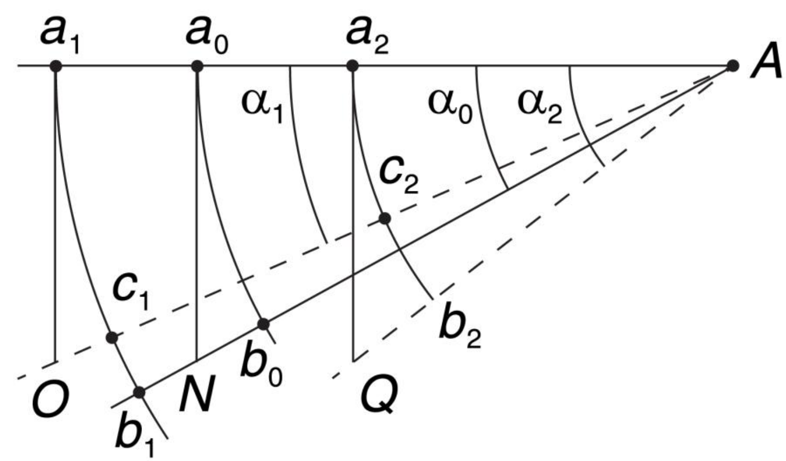
Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания»
Реконструкция идеи: И.Б. Погребысский / В.И. Яковлев

Уравнение равновесия рычага

$$m_1 l_1 \cdot c_1 b_1 = m_2 l_2 \cdot c_2 b_2 ,$$

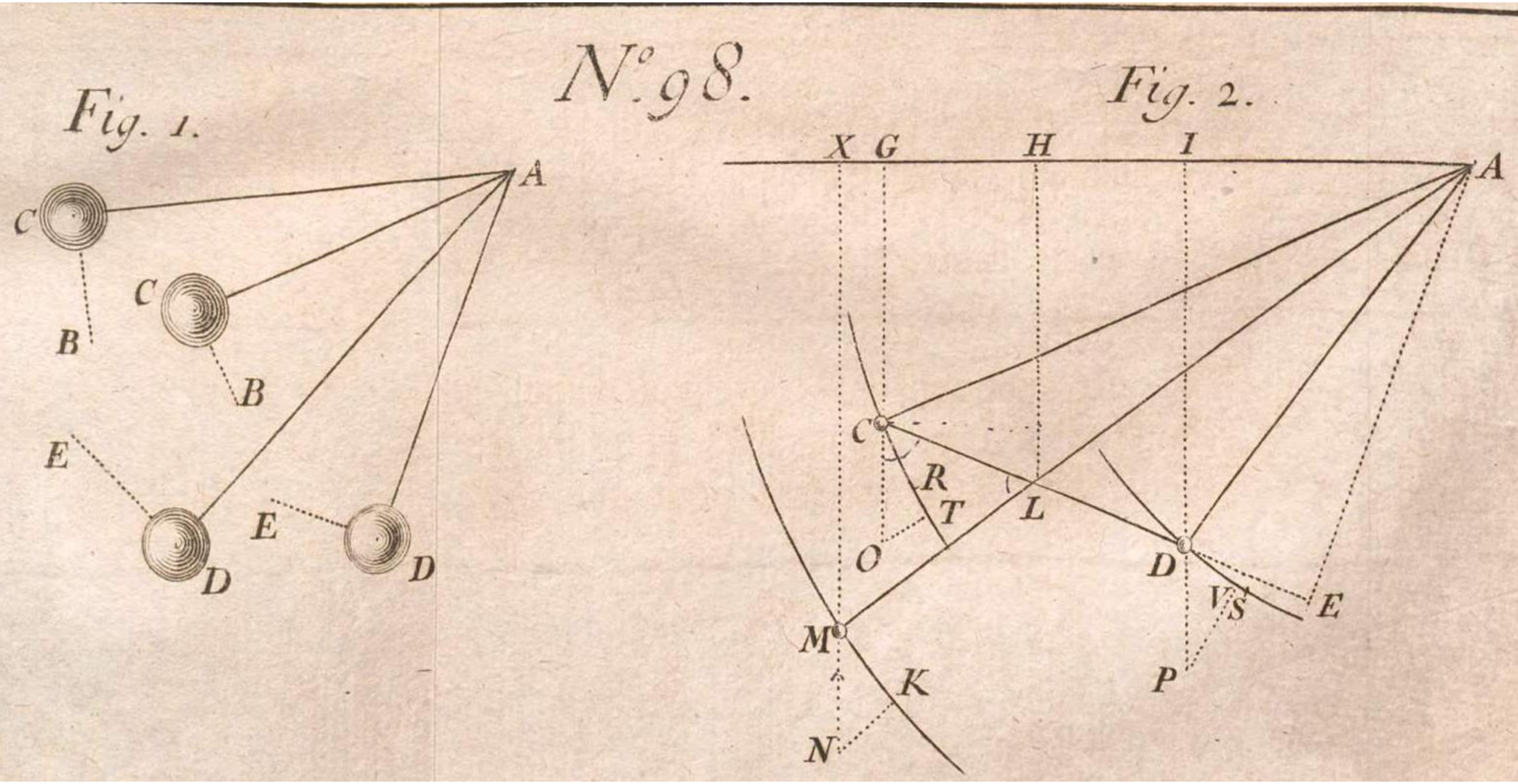
из-за малости дуг $c_1 b_1 = l_1(\alpha_0 - \alpha_1)$, $c_2 b_2 = l_2(\alpha_2 - \alpha_0)$ и углов $\alpha_1 \sim tg\alpha_1 = \dfrac{Oa_1}{l_1}$; $\alpha_2 = \dfrac{Qa_2}{l_2}$; $\alpha_0 = \dfrac{Na_0}{l_0}$, после преобразований приводит к искомому выражению:

$$l_0 = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2} .$$



<u>Замечание</u>. Точка a_0 может лежать левее точки a_1!
См. ниже реконструкцию R. Dugas

Иаков Бернулли «Общее доказательство центра колебания» (оригинал 1703 г.)
Шары C задерживают ся, шары D ускоряются



И. Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания»
Полная реконструкция (R. Dugas)

Рассмотрим рычаг, свободно вращающийся вокруг точки *A*; к нему на разных расстояниях от точки А подвешены грузы или (приложены) силы, действующие перпендикулярно плечам. Эти силы разделены на две группы, действующие на рычаг в противоположных направлениях.

Если сумма произведений величин сил на плечи для каждой группы сил имеет одно и то же абсолютное значение, то рычаг будет находиться в равновесии.

Речь идет о рычаге 2-го рода. Это утверждение доказал Мариотт в «Трактате о соударении тел».

Бернулли берет его за основу.

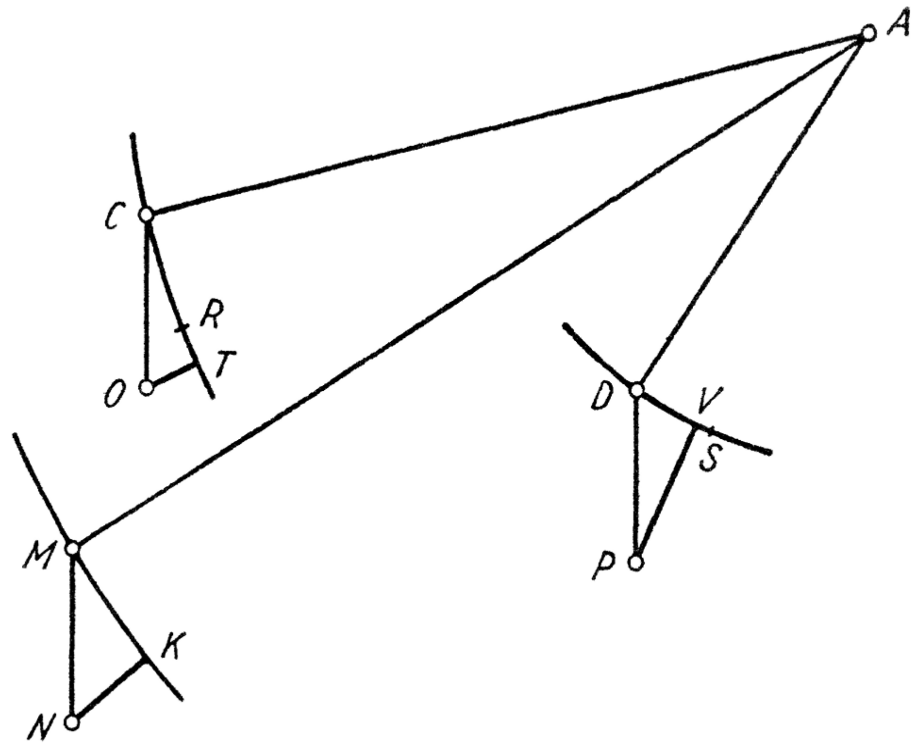
И. Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания» (по R. Dugas)

Задача: Найти центр колебания составного маятника.

Пусть *A* – ось вращения и пусть *AC* и *AD* соединяют *A* с двумя произвольными элементами *C* и *D* составного маятника (для простоты предполагается, что маятник плоский).

Пусть *AM* – простой маятник, изохронный составному маятнику.

Рассмотрим движение составного маятника, составленного из элементов *C, D* и *M*. Их скорости пропорциональны плечам *AC, AD* и AM. В каждый момент времени сила тяжести добавляет элементам маятника импульс, представленный «короткими вертикальными линиями одинаковой длины» *MN*, *CO, DP*.



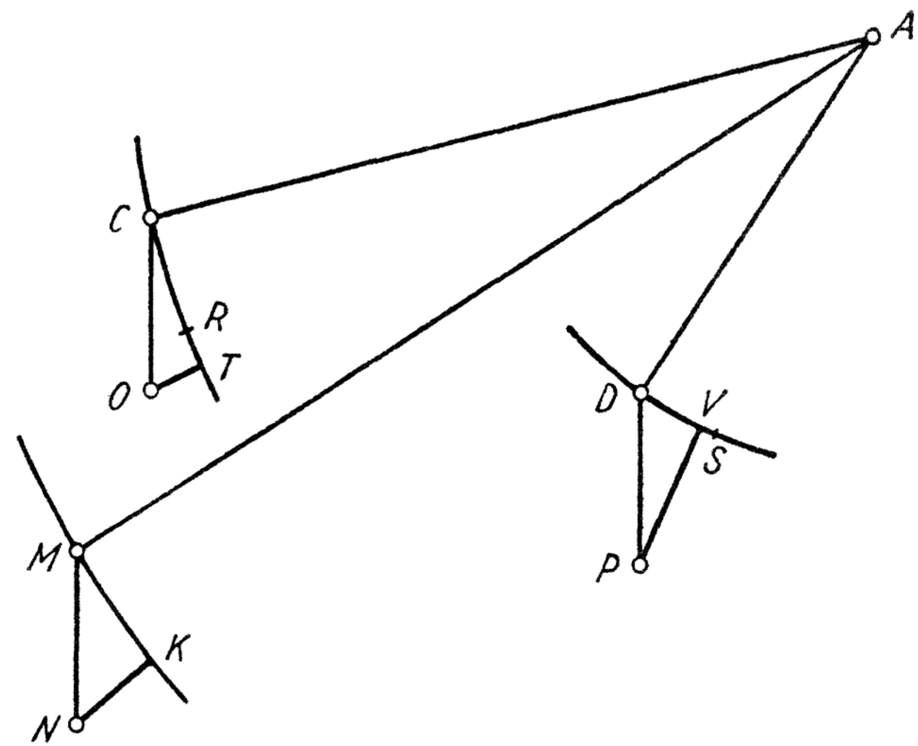
И. Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания» (по R. Dugas)

Проведем отрезки *NK*, *OT* и *PV* перпендикулярно дугам *MK*, *CT*, *DV*.

«Движения» *MN*, *CO*, *DP* можно разложить на движения *MK* и *KN*; *CT* и *TO*; *DV* и *VP*.

Движения *KN*, *TO*, *VP* «распределяются по всей оси *A* и там полностью теряются» (т.е. уравновешиваются реакцией стержней). Вследствие изохронности колебания точек *C*, *D* и *M*, движения *MK*, *CT* и *VD* претерпевают «некоторые изменения».

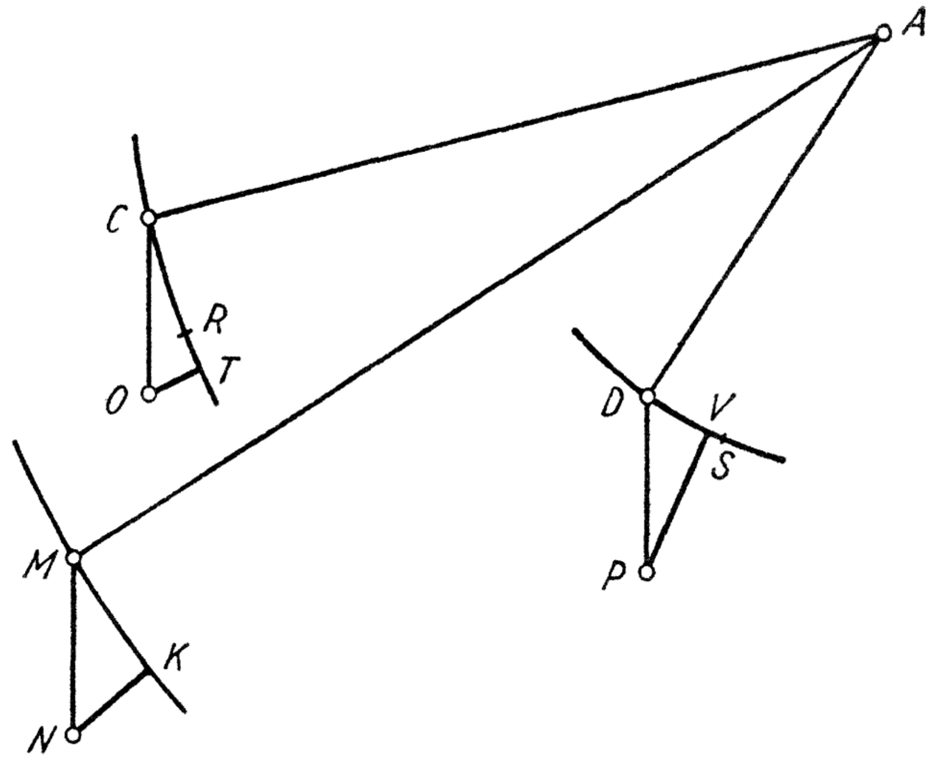
Точка *M* перемещается в точку *K*, не претерпевая изменений. При этом *C* переместится в точку *R*, а *D* в точку *S*; при этом дуги *MK*, *CR* и *DS* будут подобны».



И. Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания» (по R. Dugas)

Сила тяжести, действующая на *C*, не исчерпывается в точке *R*, и «ее остаток *RT* используется для перемещения тела *D* по дуге *VS*».

При этом тело *D* оказывает движению сопротивление с силой, равной той, с которой его толкают. Все происходит так, как будто на тело *D*, достигнувшее точки *S*, действует «сила, стремящаяся оттолкнуть его обратно из *S* в *V*».



Таким образом: рычаг *CAD* находится в равновесии под действием веса *C*, который «тянет или толкает с силой или скоростью *RT* в одну сторону», и вес *D*, который тянет или толкает в противоположном направлении.

В итоге, Бернулли записывает уравнение

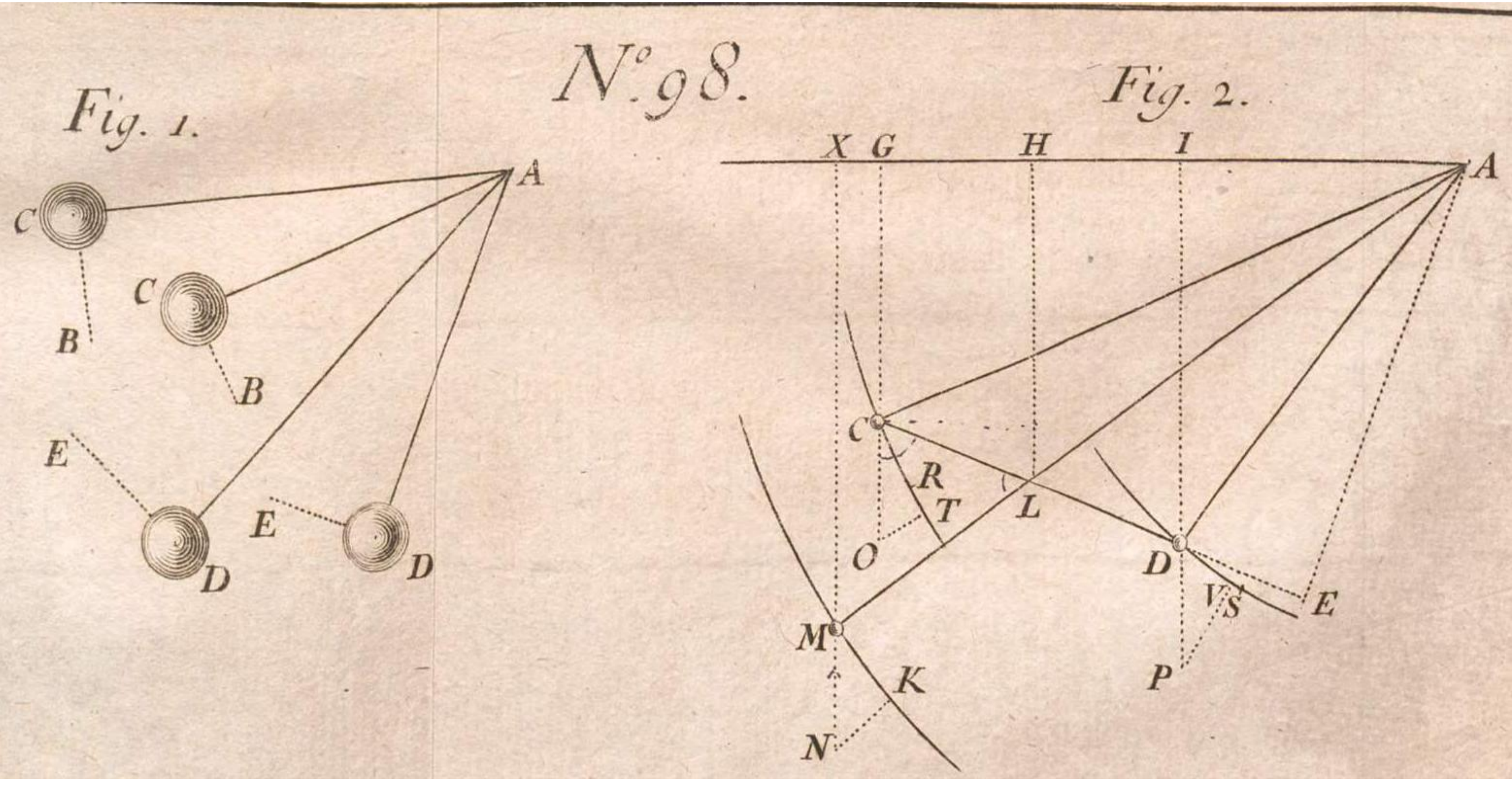
$$\Sigma(C \times CA \times RT) = \Sigma (D \times AD \times VS),$$

из которого затем находит величину *AM*.

Рычаг *CAD* находится в равновесии под действием, с одной стороны, грузов *C*, которые «тянут или толкают с силой или скоростью *RT*», а с другой, – грузов *D*, которые «тянут или толкают с силой или скоростью *SV* в противоположном направлении».

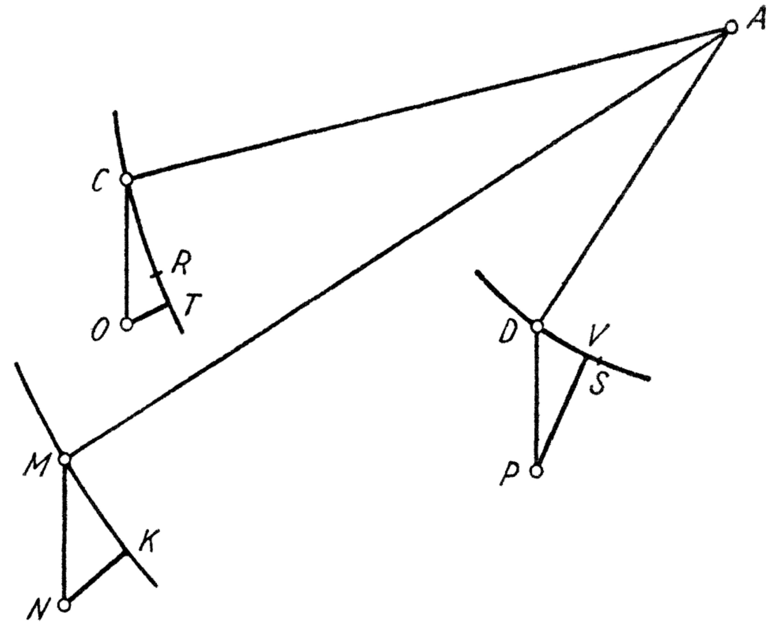
Используя соотношение Σ(*C* x *CA* x *RT*) = Σ(*D* x *AD* x *SV*),

Бернулли находит центр колебаний.



И. Бернулли (1703) «Общее доказательство центра колебания». Резюме: основные идеи (И.Б. Погребысский)

Способ Я. Бернулли легко обобщить на случаи произвольного числа точек, в том числе и бесконечно большого (случай твердого тела).



Два пункта имеют для дальнейшего особенно большое значение.

1. Свободное движение точек должно было происходить вдоль отрезков *CO* и *DP*. Это движение разложено на отрезки *CT* и *TO*, *DV* и *VP*. Что происходит с движениями *TO* и *VP*? Я. Бернулли считает, что составляющие сил вдоль стержня уравновешиваются реакциями в точке *A*.

2. Второй и еще более важный пункт заключается в том, что силы инерции приводят рычаг к равновесию. Именно введение сил инерции позволило применять методы статики в динамике.

Роль этих сил в механике системы несвободных точек стала ясной после работ Я. Бернулли.

Жан Лерон Даламбер (1717-1783)

1735 – окончил Коллеж Мазарини

1743 – Трактат «Динамика»

1744 –Трактат «О равновесии и движении жидкостей»

1775-1777 – опыты по определению сопротивления тел, движущихся в каналах и в безграничной жидкости

1751-1757 – «Энциклопедия наук, искусств и ремесел» (совместно с Дени Дидро)

1765 – член Парижской королевской Академии наук

1764 – член Петербургской Академии наук

1746 – член Берлинской Академии наук

Ж. Даламбер «Динамика» (1743)

О методологии научного исследования. Примат общего абстрактного подхода.

У Даламбера <u>особенные</u> приемы решения задач (в частности, о маятнике Бернулли) обретают характер <u>всеобщности</u>.

«Наилучший метод в любом отделе математики (можно даже сказать: в любой науке) состоит в том, чтобы не только вводить туда и максимально применять знания, полученные из <u>более абстрактных</u>, а следовательно, и более простых наук, но и самый объект данной науки рассматривать <u>наиболее абстрактным</u> и наиболее простым из всех возможных способов, ничего не предполагать и ничего не приписывать объекту данной науки, кроме тех свойств, из которых, как из предпосылки, исходит сама данная наука.

Отсюда вытекают два преимущества: во-первых, принципы получают всю возможную для них ясность; во-вторых, эти принципы оказываются сведенными к наименьшему числу, выигрывая тем самым в своей общности, так как, поскольку предмет науки необходимо определен, принципы этой науки тем плодотворнее, чем меньше их число».

Ж. Даламбер «Динамика» (1743)

«В настоящем сочинении я поставил себе двойную цель: расширить рамки механики и сделать подход к этой науке гладким и ровным.

При этом я больше всего заботился о том, чтобы одна задача разрешалась с помощью другой, т. е. я стремился не только вывести принципы механики из наиболее ясных понятий, но и расширить область их применений.

Наряду с этим я стремился показать как бесполезность многих принципов, употреблявшихся до сих пор в механике, так и выгоды, которые можно получить для прогресса этой науки от объединения остальных.

Одним словом, я стремился расширить область применения принципов, сокращая в то же время их число».

Основные принципы механики Даламбера

1. Закон инерции

«Прежде всего совершенно очевидно, что никакое тело не может сообщить движения самому себе. Оно может быть выведено из состояния покоя только в результате действия какой-либо внешней причины. Но будет ли оно само по себе продолжать свое движение, или для его движения необходимо повторное действие этой причины? Как бы мы ни решали этот вопрос, одно несомненно: если сделано раз предположение о существовании движения без какого-либо другого особого допущения, то простейшим законом, которому может следовать тело в своем движении, будет закон равномерности; поэтому именно такому закону тело и должно следовать, как это будет показано ниже. Движение, таким образом, является равномерным вследствие своей природы. Правда, те доказательства, которые давались этому принципу до сего времени, были, может быть, недостаточно убедительными; в настоящем сочинении указываются возникающие здесь трудности, как равно и путь, избранный мною для того, чтобы уклониться от обязательств их разрешить.

Мне кажется, что указанный закон равномерности, присущий .движению, как таковому, дает нам одно из лучших оснований, на которое может опираться <u>измерение времени при помощи равномерного движения</u>. Я счел необходимым осветить этот вопрос несколько подробнее, хотя может показаться, что в сущности эти рассуждения выходят из рамок механики».

Основные принципы механики Даламбера

2. Принцип сложения движений

«До сих пор мы говорили лишь об изменениях скорости движущегося тела под влиянием причин, могущих изменить движение, и совершенно не исследовали, что должно происходить, если движущая причина стремится двигать тело в направлении, отличном от того, которое имеет тело. Принцип силы инерции в данном случае нам говорит лишь то, что тело будет стремиться описывать прямую линию и притом описывать равномерно; но отсюда нельзя узнать ни скорости тела, ни его направления.

Здесь необходимо прибегнуть к другому принципу, который называют сложением движений и при помощи которого определяют единое движение тела, стремящегося двигаться с заданными скоростями по различным направлениям одновременно. В настоящем сочинении дается новое доказательство принципа сложения движений, где я ставил себе целью избежать всех тех трудностей, которые присущи обычным доказательствам данного принципа, и в то же время стремился к тому, чтобы не выводить его из большого числа сложных предпосылок: этот принцип, один из первых принципов механики, необходимо должен опираться на простые и легкие доказательства».

Основные принципы механики Даламбера

2. Принцип сложения движений (продолжение)

«Поскольку движение тела, меняющего свое направление, можно рассматривать как движение, составленное из первоначального движения тела и из движения вновь им полученного, постольку и первоначальное движение тела можно рассматривать также как движение, составленное из нового, воспринятого телом, движения и из некоторого другого движения, им утраченного.

Отсюда следует, что законы движения, изменяющегося благодаря тем или иным препятствиям, зависят исключительно от законов движения, уничтоженного этими самыми препятствиями».

Основная идея: «В самом деле, легко видеть, что достаточно разложить движение, которым тело обладало до встречи с препятствием, на два таких движения, из которых одному препятствие ни в какой мере не является помехой, а другое им уничтожается».

Замечание: это, по сути, сделал Бернулли в задаче о колебании маятника

Основные принципы механики Даламбера

3. Принцип равновесия

«Каков же должен быть общий закон равновесия тел? Все геометры сходятся на том, что два тела с противоположными направлениями уравновешиваются в том случае, когда их массы обратно пропорциональны скоростям, с которыми они стремятся двигаться. Однако, доказать этот закон со всей строгостью и притом так, чтобы не оставалось никакой неясности, невидимому, не так легко. Поэтому большинство геометров предпочитает это положение рассматривать в качестве аксиомы, не давая себе труда доказывать его. Между тем, при внимательном рассмотрении можно заметить, что имеется только один единственный случай, когда равновесие проявляется ясно и четко: это — тот случай, когда массы обоих тел равны, а скорости их равны и противоположны. И мне кажется, единственный путь, который можно избрать для доказательства равновесия в других случаях, должен заключаться в том, чтобы, если это возможно, привести их к указанному случаю, простому и очевидному самому по себе.

Принцип равновесия вместе с принципом силы инерции и принципом сложения движений позволяют находить решение всех задач, относящихся к движению одного тела».

Принцип Даламбера

«Общая задача. *Дана система тел, расположенных друг относительно друга произвольным образом. Каждому из этих тел передается некоторое движение, которое оно, однако, не может воспринять вследствие действия прочих тел. Найти движение каждого из данных тел.*

Решение. Пусть система состоит из тел *A, B, C* и т. д., и предположим, что им передаются движения *a, b, c* и т. д., которые, вследствие взаимного действия тел, последние изменяют в a_1, b_1, c_1 и т. д. Ясно, что передаваемое телу *A* движение *a* можно рассматривать как составленное из воспринятого им движения a_1 и из некоторого другого движения α. Точно так же и движения *b, c* и т. д. можно рассматривать как составленные из движений b_1 и β, c_1 и к и т. д. Следовательно, движение действующих друг на друга тел *A, B, C* и т. д. будет точно такое же, как если бы вместо импульсов *a, b, c и* т. д. им передавались сразу по два импульса: a_1 и α, b_1 и β, c_1 и к и т. д. Но, по предположению, тела *A, B, C* и т. д. сами по себе восприняли движения a_1, b_1, c_1 и т. д. Отсюда следует, что движения α, β, к и т. д. должны быть таковы, чтобы нисколько не нарушались движения a_1, b_1, c_1 и т. д.; другими словами, если бы тела получили только эти движения α, β, к и т. д., то эти движения взаимно уничтожились бы, и тела оставались бы в покое.

Принцип Даламбера (продолжение)

Отсюда вытекает следующее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга.

Нужно движения a, b, c и т.д., передаваемые этим телам, разложить каждое на два движения: a_1 *и* α, b_1 *и* β, c_1 *и к и т.д., причем эта последние движения должны быть таковы, что если телам будут переданы лишь движения* a_1, b_1, c_1 *и т. д., то тела могут сохранить эти движения, не мешая друг другу; если же телам будут переданы лишь движения* α, β, к и т. д., *то тела будут оставаться в покое.*

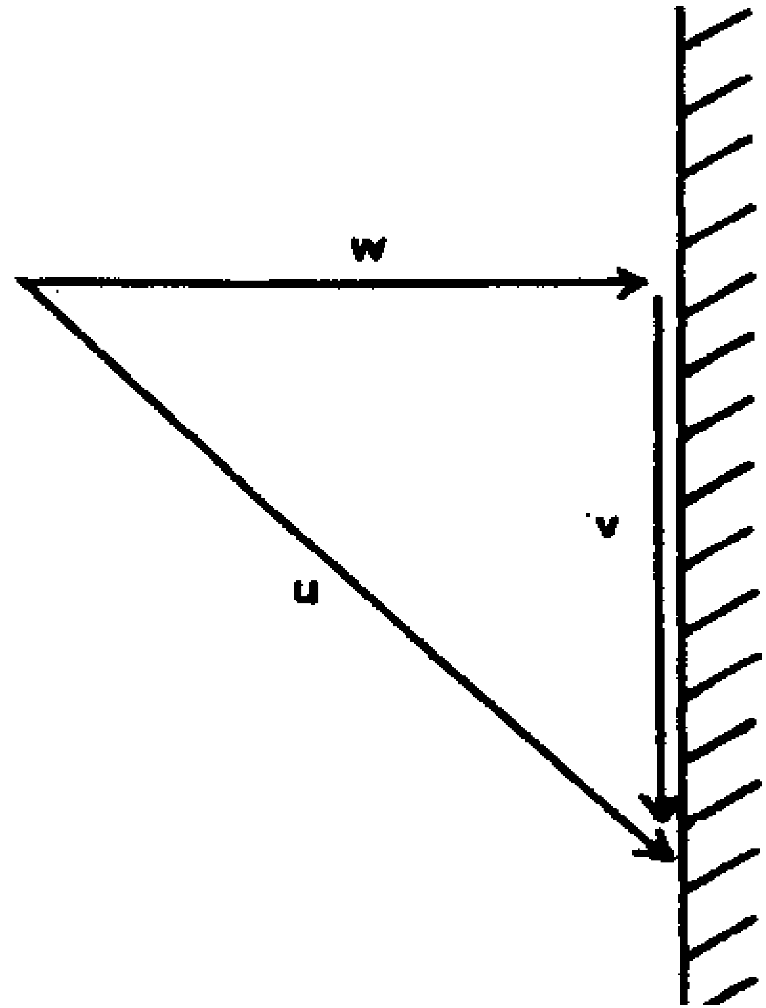
Ясно, что a_1, b_1, c_1 и т. д. и будут теми движениями, которые будут восприняты телами вследствие их взаимного действия друг на друга. *Что и требовалось найти».*

Возможные истоки принципа Даламбера

Даламбер, возможно, заимствовал идею своего принципа из механики удара.

В главе «О движении, разрушаемом или изменяемом препятствиями» он рассматривает «твердую» частицу, которая косо ударяется о неподвижную непроницаемую стену.

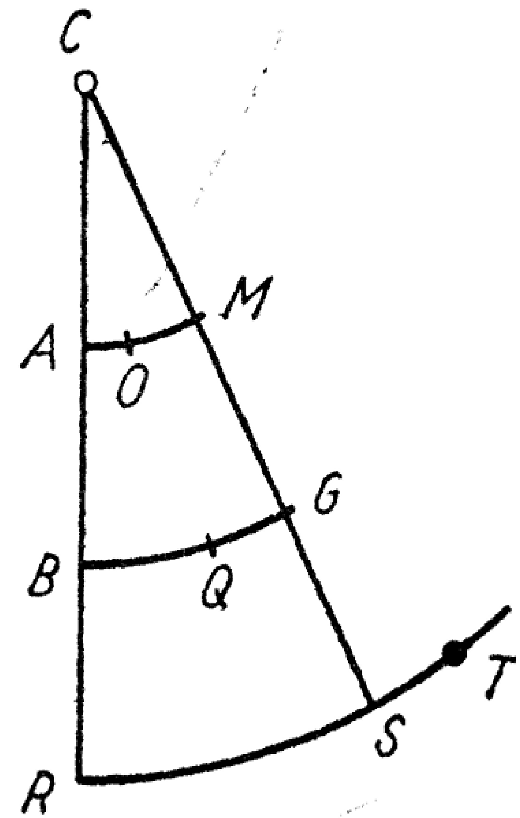
Скорость частицы до удара *u* можно разложить на две компоненты *v* и *w,* параллельную и перпендикулярную стене.



Скорости *u*, *v* и *w* частицы соответствуют движениям a, a_1 и α частицы А в формулировке принципа Даламбера.

Пример задачи, которую Даламбер решает при помощи этого принципа

Задача. *Найти скорость стержня CR, закрепленного в точке C и нагруженного произвольным количеством тел A, B, R, предполагая, что если бы этим телам не препятствовал указанный стержень$_t$ они в равные промежутки времени описывали бы бесконечно малые линии AO, BQ, RT, перпендикулярные к стержню.*



Надо найти линию *RS,* которую тело *R* пройдет за тот же промежуток времени, за который оно в свободном состоянии прошло бы линию *RT;* тогда можно найти и скорости *BG, AM* остальных тел.

Будем рассматривать скорости *RT, BQ, AO* как составленные из скоростей

RS и *ST, BG* и *–GQ, AM* и *– MO.*

В силу принципа Даламбера стержень *CR* должен оставаться в покое, если телам *R*, *B*, *A* переданы только движения *ST, –GQ, — MO.*

Отсюда следует

Пример задачи, которую Даламбер решает при помощи своего принципа

$$A\cdot MO\cdot AC+B\cdot GQ\cdot BC=R\cdot ST\cdot CR\ ^{*}),$$

т. е., вводя обозначения

$$AO=a,\qquad BQ=b,\qquad RT=c,$$

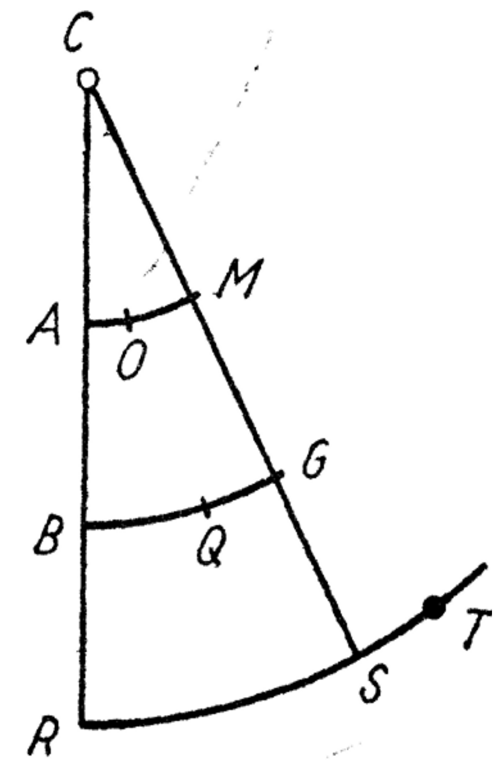
$$CA=r,\qquad CB=\mathrm{r},\quad CR=\rho\quad \text{и}\quad RS=z,$$

мы получим

$$R(c-z)\rho=Ar\left(\frac{zr}{\rho}-a\right)+B\mathrm{r}\left(\frac{z\mathrm{r}}{\rho}-b\right),$$

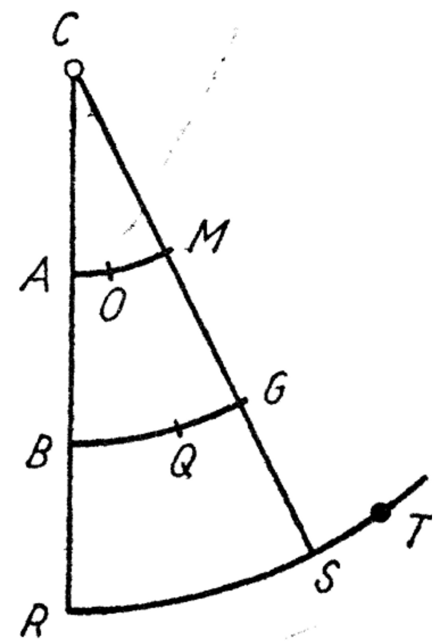
откуда

$$z=\frac{Aar\rho+Bb\mathrm{r}\rho+Rc\rho^2}{Ar^2+B\mathrm{r}^2+R\rho^2}.$$



Подробную (более удачную) реконструкцию решения этой задачи с обсуждением сильных и слабых моментов рассуждения, а также ее связи с практической механикой дает И.Б. Погребысский в кн.
А.Т. Григорян (ред.), История механики до XVIII в., т.1, с. 143. Следующий слайд

Р е ш е н и е. Исходим из принципа Даламбера, для чего выделяем прежде всего «потерянные» движения. Из рисунка видно, что точка R «потеряла» движение ST, точка A «приобрела» движение OM, т. е. «потеряла» отрезок — OM и точка B — движение GQ. Под действием сил, соответствующих этим движениям, стержень, согласно принципу, должен остаться в покое. Силы находятся без труда из следующих соображений. Отрезки ST, OM и QG — суть приращения скоростей. Делим их на Δt, получаем ускорения. Умножаем ускорения на массы, получаем силы



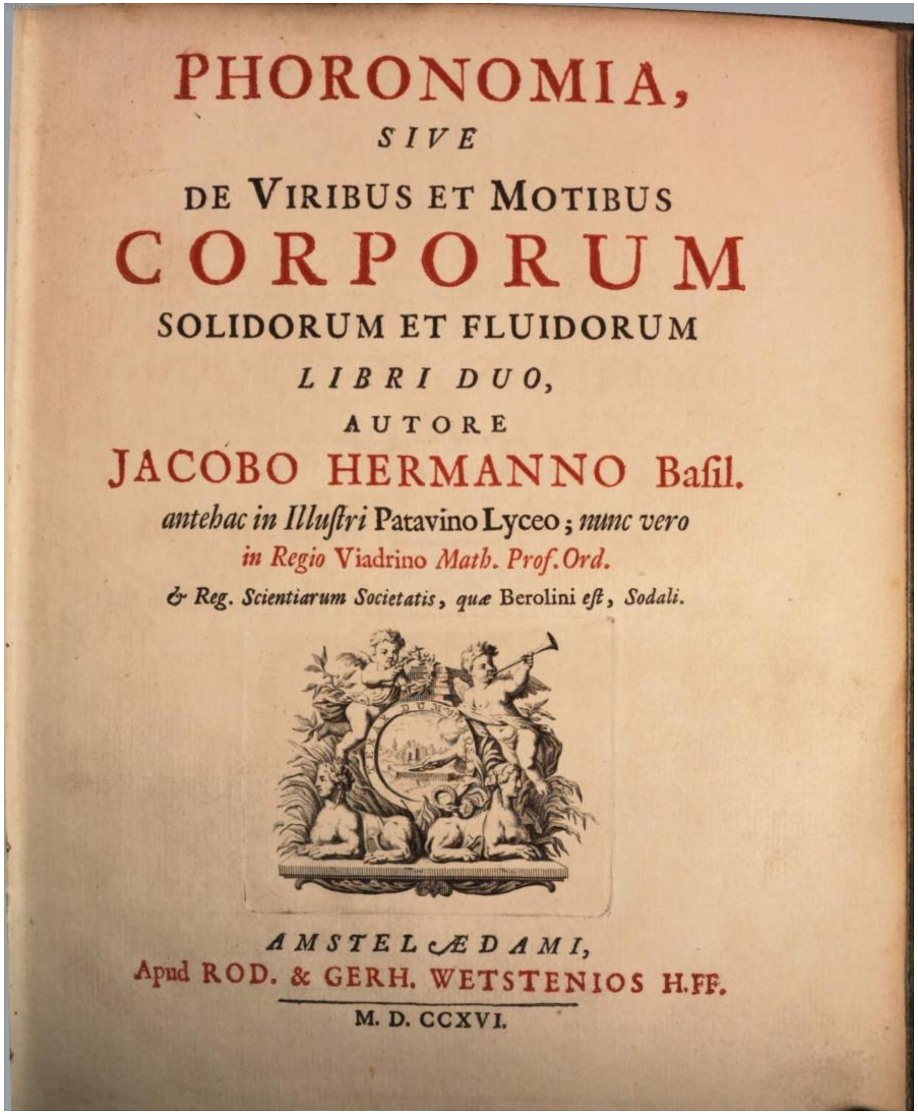
$$A\frac{OM}{\Delta t},\qquad B\frac{GQ}{\Delta t},\qquad R\frac{ST}{\Delta t}.$$

Под действием этих сил рычаг второго рода CR должен сохранить равновесие. Следовательно, сумма моментов сил относительно точки C равняется нулю, или иначе

$$A\cdot OM\cdot AC + B\cdot GQ\cdot BC = R\cdot ST\cdot CR.$$

Это и есть основное уравнение задачи, с помощью которого находится скорость стержня. Например, длина отрезка $RS = RT - ST$ и т. д. определяется из последнего уравнения.

<u>Яков Герман (1678-1733)</u>
«Форономия или о силах и движениях твердых и жидких тел» (1716)



PHORONOMIA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS
CORPORUM
SOLIDORUM ET FLUIDORUM
LIBRI DUO,
AUTORE
JACOBO HERMANNO Basil.
antehac in Illustri Patavino Lyceo; *nunc vero*
in Regio Viadrino *Math. Prof. Ord.*
& Reg. Scientiarum Societatis, quæ Berolini *est, Sodali.*

AMSTELÆDAMI,
Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS H.FF.
M. D. CCXVI.

Основная идея, в основе рассуждений Я. Германа

Я. Германн, как и Я. Бернулли, разлагает силу тяжести каждой материальной точки на две составляющие.

Одна, направленная вдоль отрезка, соединяющего эту точку с точкой подвеса, уравновешивается реакцией связи в точке подвеса; другая, перпендикулярная к указанному отрезку, равна по второму закону Ньютона массе точки, умноженной на ее ускорение, т. е. касательной силе инерции.

Таким образом, к каждой точке маятника приложены следующие силы:

1) составляющая силы веса точки, направленная вдоль радиус-вектора этой точки;

2) реакция оси на эту составляющую, равная ей по величине и направленная вдоль радиус-вектора в противоположную сторону;

3) составляющая силы тяжести точки, перпендикулярная к радиус-вектору;

4) кроме того, со стороны точки на связь действует сила, численно равная массе точки, умноженной на ее ускорение.

Основная идея, в основе рассуждений Я. Германа (продолжение)

Силы 1 и 2 на основании третьего закона Ньютона образуют уравновешенную систему сил.

Силы 3 и 4 приложены к разным телам (к точке и к связи), поэтому говорить об их уравновешивании не имеет смысла.

Но если силу 4 *мысленно* приложить к данной материальной точке, то в этом случае силы 3 и 4 будут взаимно уравновешены.

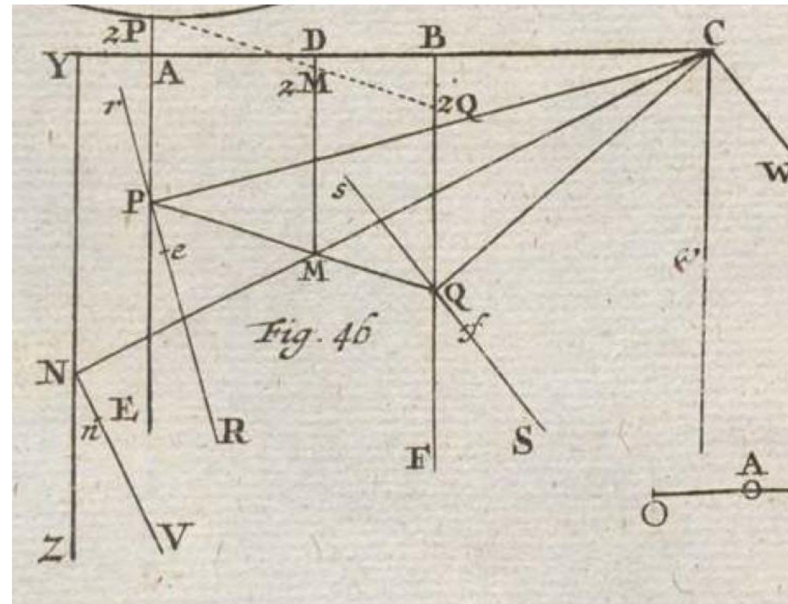
Так как это рассуждение приложимо к каждой точке маятника, то оно справедливо и для маятника в целом.

Поэтому, рассматривая маятник как систему точек, можно сформулировать следующий принцип:

система внешних сил, приложенных к точкам механической системы, реакций связей и мысленно приложенных к точкам системы сил инерции в каждый момент времени образует уравновешенную систему сил.

Составной маятник Германа. «Форономия» (Книга I, Часть 2. Гл. 5, с. 100)

«*Определение*. В составном маятнике CPQ, вращающемся вокруг точки подвеса C, все линии CP, CM, CQ, PQ являются невесомыми; к концам отрезка PQ подвешены грузики P и Q, их общим центром тяжести является точка M. Прямая CM, проведенная через точку подвеса C и центр тяжести грузов M, называется *осью* составного маятника PQC. Если падение оси CM составного маятника из горизонтального положения CA в положение CN занимает такое же время, как падение простого маятника из того же горизонтального положения в CN, то такие маятники назовем синхронными.



«*Викарными* (заменяющими) силами (sollicitationes vicariae) для центральных сил тяготения являются тангенциальные силы, которые нужно подставить мысленно вместо сил тяготения и которые будут им

Предложение 33 (Лемма).

«В составном маятнике викарные силы R, S …, приложенные к частицам P, Q … в направлении PR, QS …, приводят к такому же увеличению скорости частиц, как и центральные силы тяготения E, F …, приложенные к ним в направлении AP, BQ ….

Иными словами, викарные силы ускоряют движение составного маятника точно так же, как и центральные силы».

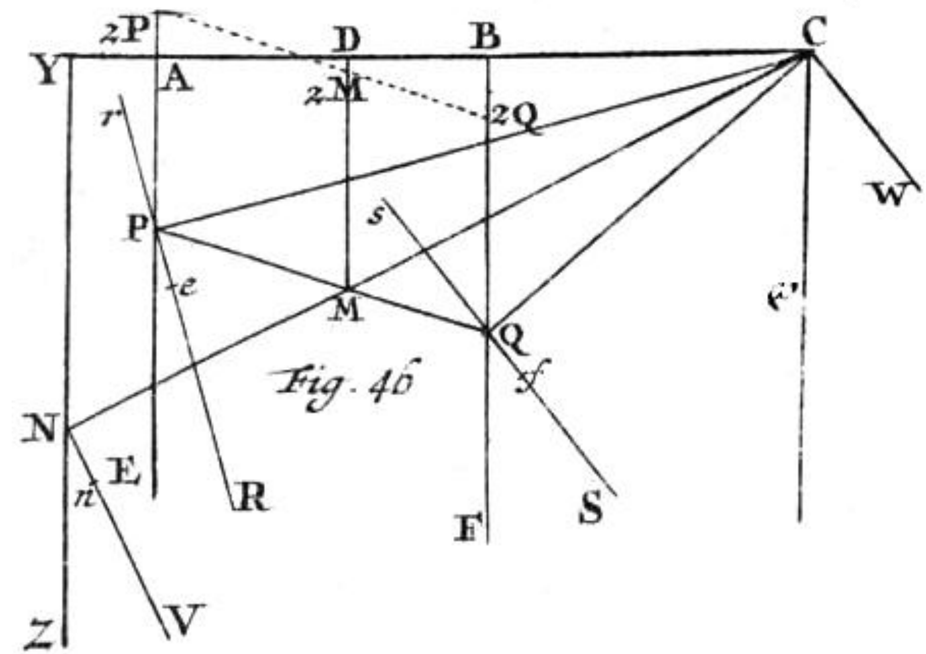


Fig. 46

По сути, речь идет о разложении сил на составляющие так, чтобы одна из компонент уравновешивалась силами реакции связи.

Я. Герман «Форономия» (окончание)

Предложение 35. *Теорема.*

«Если отдельные части какого-нибудь физического маятника, будучи внезапно освобождены от всяких связей, начнут двигаться вверх, каждая со скоростью, которую она получила во время колебания, будучи связана с остальными точками, то общий центр тяжести всех частиц маятника подымется на ту же самую высоту, с которой он спустился при нисхождении всего физического маятника, иными словами, когда все частицы маятника были еще между собой связаны».

Доказав эту теорему, Германн, по сути, доказал «аксиому» Гюйгенса.

Леонард Эйлер. Развитие идеи Я. Германа

Эйлер более ясно выражает связь метода Германа с соотношениями статики:

«И так как эти подставленные силы (произведения масс точек на их тангенциальные ускорения.) должны быть эквивалентны силам, действующим на тело, то из статики ясно, что если вместо них взять силы, равные по величине, но прямо противоположные по направлению, то тело должно быть в равновесии...

Таким образом, все исследование, касающееся колебательных движений тел, приводится к принципам статики».

Л. Эйлер, «О малых колебаниях тел как твердых,
так и гибких. Новый и легкий метод» (1740)
(на эту работу Эйлера ссылается Лагранж).

Метод Эйлера сходен с принципом Даламбера, но не обладает столь высокой степенью общности.

Он относится только к колебательным движениям.

Трактовка Ш. Делоне принципа Даламбера (1856)

В XIX в. в технической механике стало широко использоваться понятие сил инерции. Наличие центробежного эффекта, возникающего в связи с большими скоростями вращающихся деталей машин (токарные, текстильные станки, центробежные регуляторы, турбины и пр.), привело к целесообразности введения понятия центробежной силы инерции, действующей на связи.

Шарль-Эжен Делоне в «Трактате рациональной Механики» (1856) дал такую трактовку принципа Даламбера:

«В каждый момент времени имеет место динамическое равновесие приложенных к материальной точке, принадлежащей данной системе,

активных сил,

сил реакции внешних и внутренних связей и

силы инерции точки. Последняя сила фиктивна и равна произведению массы точки на ее ускорение, взятое с минусом».

Трактовка принципа Даламбера Ш. Делоне

В векторной форме условие равновесия всех перечисленных сил в некоторой точке принимает следующий вид:

$F + R + \Phi = 0$, где

F – главный вектор активных сил,

R – главный вектор реакций связей,

$\Phi = - mw$ – главный вектор сил инерции.

Записанное равенство эквивалентно принципу ускоряющих сил в сочетании с принципом освобождаемости от связей, применимым к рассматриваемой точке:

$mw = F + R.$