

**История математики**  
**22 лекция**

*Лекторы – С.С. Демидов*  
*М.А. Подколзина*

*Весенний семестр 2026 года*

*Математика XIX века.*

*Преобразование геометрии.*

*Биография Н.И. Лобачевского.*

*Основные положения геометрии*

*Лобачевского. Первые*

*интерпретации.*

*Замечание: Об одновременных*

*открытиях.*

# Создание первых высших учебных заведений в России

1615 г. – Киевская духовная академия

1687 г. – славянско-греко-латинская академия в Москве. (Магницкий Л. Ф., Ломоносов М.В.)

1701 г. – навигацкая школа в Москве (Математических и навигацких, то есть мореходно-хитростных, наук школа»)

# Создание первых высших учебных заведений в России

1715 г. – на базе навигацкой школы в СПб создана Морская академия

1715 г. – открытие цифирных школ

24 января 1724 г. – указ об организации Академии наук, а при ней – ун-та и гимназии.

# Ученики и последователи Л.Эйлера:

- С.К.Котельников
- С.Я.Румовский (1734-1812)
- М.Е.Головин
- Н.И.Фусс
- А.И.Лексель
- Ф.И.Шуберт

# Первые в России университеты

1755 г. – основан Московский ун-т

При университете в Москве были созданы две гимназии: одна для дворян, другая для разночинцев, чтобы дворянские дети не соприкасались с людьми «подлого звания». Однако, несмотря на наличие двух гимназий, университет постоянно страдал от недостатка слушателей.

1758 г – в Казани создана гимназия при Московском ун-те

# Первые в России университеты:

1755 г. — основан Московский ун-т

1802 г. — открывается университет в Дерпте;

1803 г. — открывается университет в Вильне;

1804 г. — открываются университеты в **Казани** и Харькове;

1819 г. — открывается университет в Санкт-Петербурге.

Кроме того, в 1804 г. был выработан новый устав, согласно которому в университетах появился четвертый, физико-математический, факультет.

# Н.И.Лобачевский

(20.11.1792 – 12.02.1856)



*Н. И. Лобачевский*

Лобачевский родился в Нижнем Новгороде, но уже вскоре его семья переехала в Казань, где в 1802 г. он поступил в гимназию, открытую при Московском университете.

В 1803 г. попечителем казанского учебного округа стал ученик Эйлера — Степан Яковлевич Румовский (1734-1812).

Под его руководством был создан Казанский университет, в который он пригласил отличную профессиу, в частности, уже упомянутого нами в предыдущей лекции **Мартина Бартельса**.

Мартин Бартельс  
(12.08.1769 – 08.12.1836)



# Н.И.Лобачевский

(20.11.1792 – 12.02.1856)

1802 г. – Лобачевский поступает в Казанскую гимназию

1807 г. – переведен студентом в Казанский ун-т

1811 г. – оканчивает Казанский ун-т со званием магистра

1814 г. – становится адъюнктом физ-мат ф-та

1816 – экстраординарный профессор

В 1816 г. Лобачевский становится экстраординарным профессором и в числе прочих начинает читать курс элементарной геометрии.

В 1822 г. он избирается ординарным профессором,

В 1820 г.— деканом физико-математического факультета, а в 1827 г.— ректором университета. Этот пост он занимал до 1845 г.

«Для идей, как и для растений, наступает определенная пора, когда они созревают, и в такое время они одновременно появляются в различных местах подобно тому, как фиалки весной произрастают всюду, где светит солнце» (Янош Больяи/***Иоанн Больэ***)

# Аксиомы Евклида:

- 1) Две величины, порознь равные третьей, равны между собой
- 2) Если к равным прибавить равные, то суммы будут равны
- 3) Если от равных отнять равные, то разности будут равны
- 4) Если величины могут быть совмещены, то они равны
- 5) Целое больше своей части

# Постулаты Евклида:

- 1) Две точки можно соединить единственной прямой;
- 2) Отрезок прямой можно продолжить по прямой в обе стороны;
- 3) Из любой точки, как центра, можно описать окружность любым радиусом
- 4) Все прямые углы равны

# Пятый постулат Евклида

И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых

## 5 постулат в формулировке Прокла

*Через точку, лежащую вне прямой, в плоскости, определенной этой точкой и этой прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую заданной.*

# Пятый постулат Евклида в формулировке Плейфера (Джон Плейфер, 1749-1819)

Если в данной плоскости находятся прямая и точка, не лежащая на этой прямой, то через данную точку можно провести единственную прямую, не пересекающую данной прямой.

# Попытки строгого обоснования теории параллельных линий встречаются в работах:

Сабита ибн Корры,

Насира ад-Дина ат-Туси,

Джона Валлиса,

Адриена Мари Лежандра,

Рене Декарта

и многих других выдающихся математиков.

11 (23) февраля 1826 г. на заседании физико-математического факультета Лобачевский сделал доклад **«Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных»**, в котором были изложены начала открытой им **«воображаемой геометрии»**, как он называл систему, позднее названную геометрией Лобачевского.

Этот доклад вошел в состав первой публикации Лобачевского по неевклидовой геометрии — статьи **«О началах геометрии»**, напечатанной в журнале Казанского университета **«Казанский вестник»** в 1829—1830 гг.

# Публикации Лобачевского по «Воображаемой» геометрии

- 1) **«Воображаемая геометрия»**, «Ученые записки Казанского университета», 1835 г
- 2) **«Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам»**, «Ученые записки Казанского университета», 1836 г.
- 3) **«Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»**, «Ученые записки Казанского университета», 1835-38 г.
- 4) Переработанный текст **«Воображаемой геометрии»** на французском языке в «J. fur Math.» в Берлине, 1837 г.
- 5) **«Геометрические исследования по теории параллельных линий»**, Берлин, 1840
- 6) **«Пангеометрия»** (т. е. «Всеобщая геометрия»), «Ученые записки Казанского университета», 1855 г.

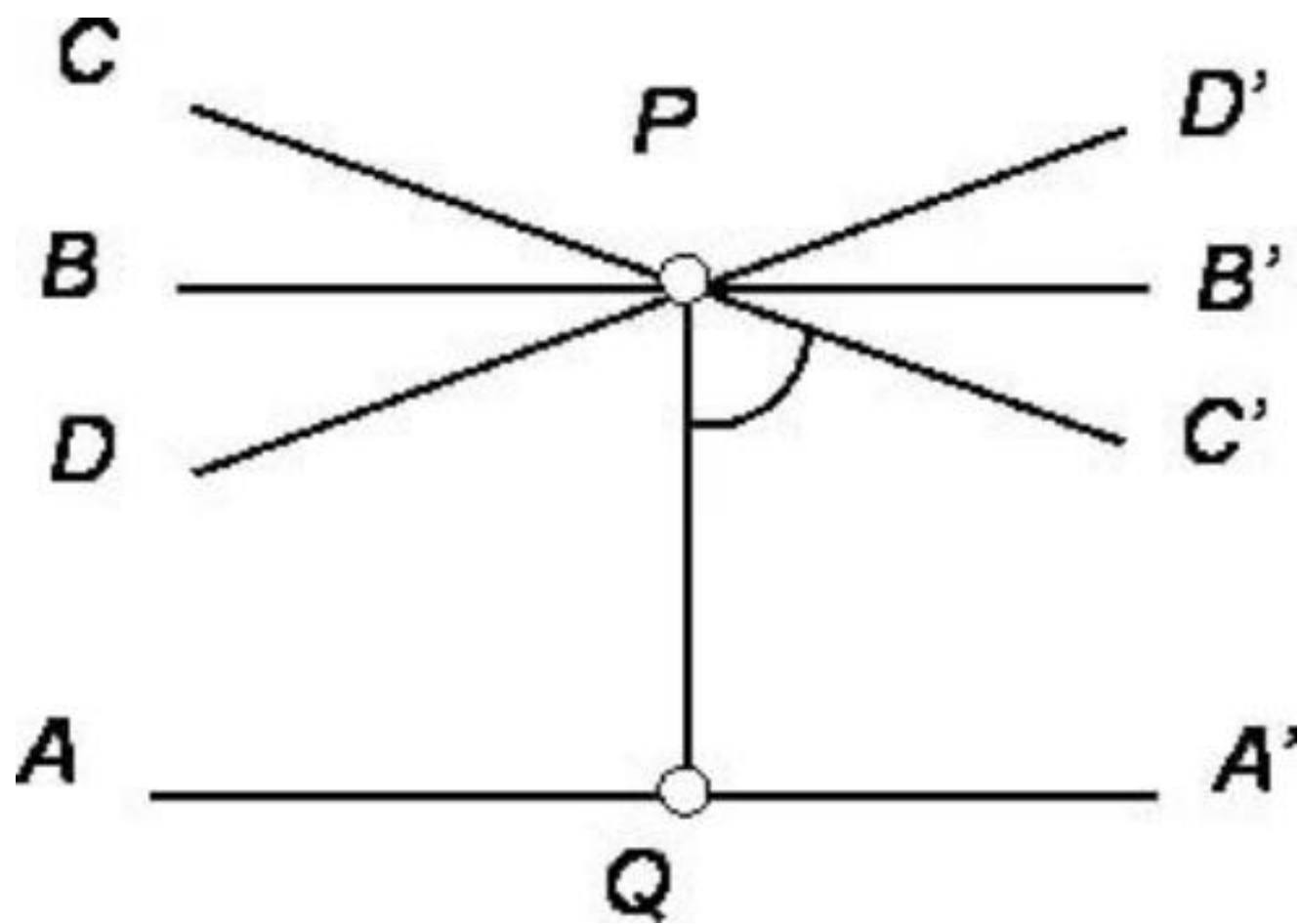
- 1829г. «О началах геометрии»,  
Н.И.Лобачевский
- 1832г. – «приложение» с работой Я.Больяи  
на тему неевклидовой геометрии
- 1868г. – «Опыты интерпретации  
неевклидовой геометрии» Э.Бельтрами
- 1882г. – «Лекции о новой геометрии», М.  
Паш

В 1855 г. Гаусс умер. В конце пятидесятых годов начали издавать его переписку.

В одном из писем, датированном 1840 г., Гаусс даёт восторженный отзыв о работе Лобачевского **«Геометрические исследования по теории параллельных»**. К каждому слову Гаусса в математическом мире прислушивались с огромным вниманием. Работы Лобачевского стали изучать; теперь его идеи были усвоены и вызвали живой интерес. Появились переводы его сочинений на западноевропейские языки, о нём заговорили на родине. Но сам Лобачевский так и не увидел своего триумфа: за несколько лет до этого он умер.

Пятый постулат у Лобачевского:

Если в данной плоскости находится прямая и не лежащая на ней точка, то через эту точку можно провести по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую.



Сочинение «**Геометрические исследования по теории параллельных линий**» начинается с 15 положений абсолютной геометрии.

Затем Лобачевский делает предположение, что в той же плоскости через точку  $P$ , не лежащую на прямой  $AA'$  кроме прямой  $CC'$  проходит по крайней мере еще одна прямая  $DD'$ , также не пересекающая прямую  $AA'$ . Это допущение приводит к тому, что **через точку  $P$  в той же плоскости проходит бесконечное множество прямых, не пересекающих  $AA'$**  (это все прямые, проходящие через  $P$  между прямыми  $CC'$  и  $DD'$ ).

# Прямые, не пересекающие данную, Лобачевский делит на:

- 1) Собственно, параллельные (или асимптотически параллельные) — это прямые, которые могут быть получены предельным переходом от непересекающихся с  $AA'$  прямых к пересекающимся.
- 2) Расходящиеся прямые — те, которые не пересекаются с  $AA'$ , но не могут быть получены предельным переходом из пересекающихся.

Таким образом, через точку  $P$ , не лежащую на прямой  $AA'$  в той же плоскости можно провести **две параллельные ей прямые**. Они образуют две пары вертикальных углов; прямые, проходящие внутри вертикальных углов  $CPD$  и  $C'PD'$  **расходятся с  $AA'$** , а те, которые лежат внутри углов  $CPD'$  и  $DPC'$  **сходятся с  $AA'$** .

Заметим, что евклидова параллель  $BB'$  относится к числу расходящихся с  $AA'$ .

Угол параллельности в точке Р относительно прямой АА' *зависит от расстояния* точки Р от АА' и представляет собой функцию этого расстояния. Если обозначить это расстояние через  $x$ , то угол параллельности в точке Р — функция от  $x$ , которую Лобачевский обозначает  $\pi(x)$ , причем

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

где  $k$  — константа, зависящая от выбора единицы длины.

Если  $x \rightarrow 0$ , то  $\pi(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . И наоборот: если  $x \rightarrow \infty$ , то  $\pi(x) \rightarrow 0$ .

Далее Лобачевский вводит **направление параллельности**. В направлении параллельности прямые сближаются, в противоположном — удаляются.

Каждый из равных острых углов  $DPQ$  и  $QPC'$ , которые параллели образуют с двух сторон с перпендикуляром  $PQ$ , Лобачевский называет **углом параллельности** в точке  $P$  относительно прямой  $AA'$ . Угол параллельности всегда острый, причем является величиной переменной.

# Лобачевский доказывает теоремы:

- 1) О расположении параллельных прямых;
- 2) О сумме углов треугольников (она меньше  $180^\circ$ ) и многоугольников;
- 3) О площадях;
- 4) О вписанных и описанных вокруг окружности многоугольниках;
- 5) О подобии и конгруэнтности (тут нужно заметить, что подобных треугольников в геометрии Лобачевского не существует);
- 6) Тригонометрические. Выводит аналоги теорем синусов и косинусов;
- 7) Об измерении круга и его частей и т.д.

# Некоторые формулы:

Длина окружности у Лобачевского растёт быстрее её радиуса:

$$l = \frac{\pi}{k} (e^{kr} - e^{-kr})$$

Теорема синусов у него имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha}{sh ka} = \frac{\sin \beta}{sh kb} = \frac{\sin \gamma}{sh kc}$$

Задача, которую не смог решить Лобачевский, — это задача обоснования новой геометрии. Путь Лобачевского в решении проблемы обоснования — поиск объектов, на которых его геометрии могла бы быть реализована. Но, к сожалению, сам Лобачевский так и не нашел моделей для интерпретации своей геометрии.

В начале XIX в. дифференциальная геометрия получила новую область распространения в теории поверхностей. В 1828 г. выходит работа Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях», в которой он выводит квадратичную форму поверхности:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

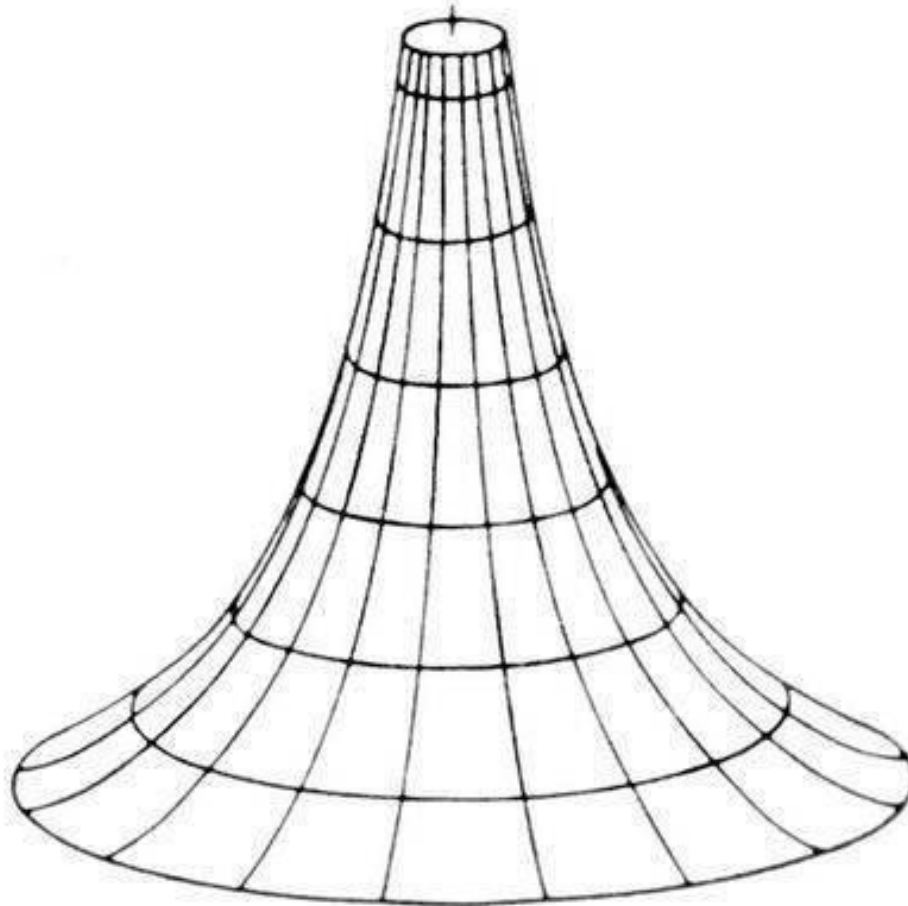
и вводит понятие гауссовой кривизны.

# Миндинг, Фердинанд Готлибович (1806-1885)

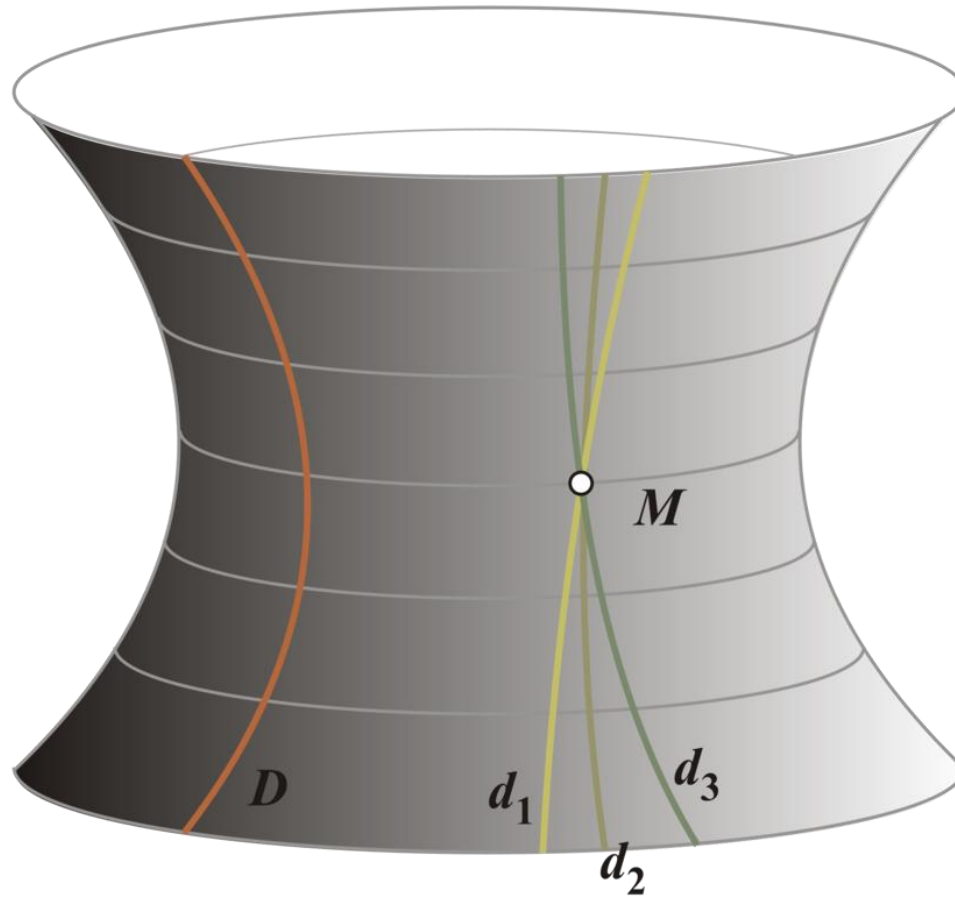


В 1840 г. **Ф. Миндинг** изучал поверхности постоянной гауссовой кривизны. Среди поверхностей постоянной отрицательной кривизны он особо выделил поверхность, которую в дальнейшем называли **псевдосферой** (или поверхностью Бельтрами).

# Параллельные прямые на псевдосфере



# Интерпретации



# Эудженио Бельтрами (1835-1900)



В 1868 г. выходит статья Бельтрами «Опыт истолкования неевклидовой геометрии», в которой он обнаруживает, что внутренняя геометрия псевдосферы изоморфна внутренней геометрии гиперболической плоско-сти Лобачевского. Образом прямых Лобачевского явились геодезические на поверхности, а движения интерпретировались изгибаниями поверхности на себя. Это была **первая интерпретация геометрии Лобачевского.**

В 1871 г. Ф. Клейн в работе «**О так называемой неевклидовой геометрии**», основываясь на введенном А.Кэли понятии проективной метрики на плоскости доказал, что проективная метрика Кэли, определяемая действительной кривой второго порядка, совпадает с метрикой пространства постоянной отрицательной кривизны. Далее Клейн отобразил плоскость Лобачевского на внутренность абсолюта, например, внутрь круга. Точки плоскости отображаются во внутренние точки абсолюта, прямые переходят в хорды без конечных точек, параллельные прямые — в хорды с общим концом. Движение— проективное преобразование, переводящее круг сам в себя и хорды — в хорды.

Тем самым непротиворечивость геометрии Лобачевского была полностью доказана.

# Янош Бояи (Больяи) (1802-1860)



Работа «Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида» (На протяжении веков V постулат иногда называли XI аксиомой Евклида), кратко же его часто называют «Аппендикс».

# Янош Бояи (Больяи) (1802-1860)

Его отцом был выпускник Геттингенского университета, математик Фаркаш Бояи.

Янош Бояи также начал с попыток доказать V постулат, но в дальнейшем пришел к тем же идеям, что и Лобачевский. Отец не понял его идей, однако предложил напечатать краткое изложение его открытия в виде приложения к своему руководству по математике, вышедшему в 1832 г. Полное название труда Я. Бояи — **«Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида»** (На протяжении веков V иногда называли XI аксиомой Евклида), кратко же его часто называют «Аппендикс».

Как и в случае Лобачевского, открытие Я. Бояи не было признано при его жизни; Гаусс, которому Ф. Бояи послал «Аппендикс», понял его, но никак не способствовал признанию открытия Я. Бояи.

# Литература:

- 1) Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России, издание 2-е. — М.: КомКнига, 2005.
- 2) В.Ф.Каган, Лобачевский, Изд-во Академии наук СССР, издание 2-е, 1948 г.
- 3) Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. Изд-во «Наука», 1981
- 4) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994