История математики
21 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Математика XIX века. Теория функций комплексного переменного. Наследие XVIII в. Интерпретация комплексного числа. Теория О. Коши. Геометрическое направление Б. Римана. Теория аналитических функций К. Вейерштрасса.

ТФКП. Наследие предыдущих веков

1) Р.Бомбелли, 1572 г.
2) Лейбниц, 1702 г.
3) 1712 г. – спор между Лейбницем и Иоганном Бернулли о природе логарифма отрицательного числа

ТФКП. Наследие предыдущих веков

4) 1722 г. – формула Муавра

5) Сочинения Даламбера (1752 г.) и Эйлера (1755 г.) по гидродинамике

1748 г. - «Введение в анализ б.м.» Эйлера

1777 г., Эйлер «О представлении сферической поверхности на плоскости»

1789 г. термин «конформные отображения», Шуберт Ф.И.

Наследие предыдущих веков

Рафаэль **Бомбелли** в своей «Алгебре» (оп.1572 г.), рассматривая уравнение

$x^3 = px + q$, в случае, когда $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$,

аксиоматически **определяет мнимые числа** и формулирует правила работы с ними.

Рафаэль Бомбелли (ок.1526-1573)

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

«Алгебра» Бомбелли (1572), I том. Построение числовой области

1. Последовательные целые степени рациональных чисел.
2. Иррациональные величины – корни квадратные, кубические, квадро-квадратные,…, их биномы и триномы.
3. Отрицательные числа meno.
4. Мнимые (софистические) числа.

Софистические числа

$\sqrt{-1}$ - piu di meno (плюс из минуса)

$-\sqrt{-1}$ - meno di meno (минус из минуса)

piu di meno via piu di meno fa meno

piu di meno via meno di meno fa piu

meno di meno via piu di meno fa piu

meno di meno via meno di meno fa meno

В 1712 г. между Лейбницем и И.Бернулли возник **спор о природе логарифма отрицательной величины**. Лейбниц считал логарифмы отрицательных чисел мнимыми, а И.Бернулли — действительными. Позже к этому спору подключились Эйлер и Даламбер.

И.Бернулли ошибочно полагал, что доказал равенство $\ln x = \ln(-x)$, и отсюда делал вывод, что логарифм отрицательного числа — действительный.

Лейбниц же раскладывал $\ln(1+x)$ в ряд: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$. При $x = -2$ этот ряд расходится и, значит, логарифм отрицательного числа не является действительным.

Эйлер в 1749 г. доказал многозначность логарифма отрицательного числа.

В 1748 г. Эйлер во «**Введении в анализ бесконечно малых**» ***вводит комплексную переменную в ка-честве наиболее общего понятия переменной величины***. В этой работе Эйлер исследовал трансцендентные (показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические) функции с помощью степенных рядов. И для этого вывел формулы:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

$$\ln z = \lim_{n\to\infty} n(z^{1/n}-1),$$

$$e^{\pm i\varphi} = cos\varphi \pm isin\varphi.$$

Решающий шагом для введения мнимых чисел в математи-ческий анализ стало открытие их полез-ности в решении дифференциальных уравнений математиче-ской физики. Это проявилось в сочинениях Даламбера (1752) и Эйлера (1755) по гидродинамике.

В связи с задачей о построении географических карт Эйлер изучал **задачу конформного отображения поверхностей** в общей постанов-ке и использовал для этой цели комплексные переменные.

Заметим, что термин «конформный» был впервые упо-треблен петербургским академиком **Ф. Шубер-том** в 1789 г.

В работах по интегральному исчислению (результаты 1777 г., опубликованы в 1793 и 1797 гг.) Эйлер установил равенство:

$$\int f(z)dz = \int (udx - vdy) + i\int (vdx + udy),$$ где $$f(z) = u + iv.$$

Пользуясь последним соотношением, Эйлер показал, что действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного удовлетворяют условию Даламбера-Эйлера (Коши-Римана).

Геометрическая интерпретация

1) К.Вессель, 1799 (1745-1818, Норв.-Дан.)
2) Ж. Арган, 1806 (1768-1822, франц)
3) М.Бюэ ,1806 (1748-1826, англ.)
4) Гаусс (1831 г.),

Геометрическая интерпретация

Геометрическая интерпретация комплексного числа впервые появляется в работе **Каспара Весселя** (1745-1818) «***Об аналитическом представлении направлений***». В ней Вессель, землемер по специальности, поставил за-дачу отыскать аналитическое выражение длины и направле-ния отрезка на плоскости. Для этого он использовал ком-плексные числа, попутно выяснив их сущность и отношение к действительным числам, для изображения которых достаточно одной прямой. На осях координат он ввел единичные отрезки ±1, $\pm i$.

Числа изображены были векторами из начала координат, над ними определены опе-рации и решен ряд задач, вплоть до аналитического выра-жения вращения.

Однако эта работа была написана на датском языке и долгое время (практически сто лет) оставалась неизвестна.

Геометрическая интерпретация

В 1831 г. выходит работа **Гаусса** «***Теория биквадратный вычетов***», после которой, наконец, представление комплексных чисел в виде точек плоскости получает всеобщую известность и признание.

Гаусс, Карл Фридрих (1777-1855) Брауншвейг-Геттинген

Родился в немецком герцогстве Брауншвейг.

Мартин **Бартельс** (1769-1836) (впоследствии учитель Лобачевского) оценил исключительный талант юного Гаусса и сумел выхлопотать ему стипендию герцога Брауншвейгского.

В 1795 г. Гаусс поступил в Геттингенский университет.

Гаусс, Карл Фридрих (1777-1855)

В 1796 г. Гаусс доказал ***возможность построения с помощью циркуля и линейки правильного семнадцатиугольника*** (об этом мы еще поговорим подробнее на одной из следующих лекций).

В 1799 г. Гаусс защитил диссертацию, в которой доказал ***основную теорему алгебры***: каждое алгебраическое уравнение степени не ниже первой имеет по крайней мере один корень, действитель-ный или мнимый

Гаусс, Карл Фридрих (1777-1855)

В 1798 г. он возвращается в Брауншвейг, где вскоре становится приват-доцентом Брауншвейгского университета.

В 1806 г. умирает покровительствовавший ему герцог, и Гаусс вновь переезжает в Геттинген.

С 1806 г. и до конца жизни Гаусс — профессор Гёттингенского университета и директор Гёттингенской обсерватории.

В 1811 г. (опубликовано в 1880) Гаусс пишет **письмо Бесселю**, в котором содержится:

1) отчетливая интерпретация комплексных чисел;
2) определение интеграла в комплексной плоскости;
3) интегральная теорема (известная теперь как теорема Коши);
4) разложимость аналитической функции в степенной ряд.

ТФКП в 19 веке

1) О. Коши
2) Б. Риман
3) К.Вейерштрасс

Коши, Огюстен Луи (1789-1857)

- 1825г. – «Мемуар о теории определенных интегралов» (написана в 1814 г.)
- 1825 г. – «Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами»

16 работ по теории вычетов, 1826-1829 гг

Из условия Коши-Римана и условия (также известного еще Эйлеру)

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)dx\,dy$$

Коши получает:

$$\int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)idy \;+\int_{x_0}^{X} F(x+iY)dx =$$
$$= \int_{x_0}^{X} F(x_0+iy_0)dx + \int_{y_o}^{Y} F(X+iy)idy$$

А это соотношения является ***интегральной теоремой Коши по прямоугольному контору***. При этом Коши, независимо от Гаусса, указал на необходимость требования, чтобы $f(x,y) \neq \infty$ на сторонах прямоугольника и внутри него.

Переход к анализу случаев, когда $f(z) = \infty$ внутри или на границе прямоугольника, привел Коши к понятию **вычета.**

Название вычет (буквально: остаток) объясняется, по-видимому, тем, что Коши пришел к этому понятию, отыскивая разность между интегралами, взятыми по таким двум путям, имеющим общие начало и конец, между которыми заключаются полюсы функции. В таком виде вычеты можно усмотреть еще в «Мемуаре о теории определенных интегралов» (1814).

В 1826 г. Коши вводит понятие **вычета** следующим образом:

«Если, после того как найдены значения x, обращающие f(x) в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1*, бесконечно малое количество ε и далее разложить* $f(x_1 + \varepsilon)$ *в ряд по возрастающим степеням того же количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением* $1/_\varepsilon$ *на конечный коэффициент, который мы и назовём* ***вычетом*** *функции* $f(x)$*, относящимся к частному значению* x_1 *переменной x».*

Сумма таких вычетов называлась у Коши **интегральным вычетом**.

В 1831 г. (опубл. в 1841 во 2-ом томе «Упражнений по анализу») **появляется интегральная формула Коши:**

пусть $f(\zeta)$ аналитична в некоторой замкнутой односвязной области D, тогда справедлива формула:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Здесь интеграл берется по замкнутому контуру γ, целиком лежащем в области D и проходимому в положительном направлении, а z — произвольная точка, лежащая внутри γ.

В «*Алгебраическом анализе*» (1821)

Содержится исследование степенных рядов $a_0 + a_z z + a_2 z^2 + \cdots$ **,** в которых z принимает не только действительные, но и мнимые значения. Коши устанавливает, что такой ряд будет сходиться или расходиться в зависимости от того, будет ли модуль z меньше или больше единицы:

$$\rho = \frac{1}{\overline{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lambda}$$

Если λ=0, то ряд сходится на всей плоскости, если λ=∞, то область сходимости ряда — единственная точка. Условие 0< λ<∞ значит, что ряд сходится внутри круга радиусом $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ и расходится вне него.

Эта теорема теперь известна под названием теоремы **Коши-Адамара**.

Жак Адамар (1865-1963)

этот же признак получил и доказал в докторской диссертации 1892 г., в которой он пишет о функциях, задаваемых разложением в ряд Тейлора.

В 1826 г. в первом томе журнала Крелле появляется работа Абеля «Исследование о ряде $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ \cdots$, где m и x — любые числа». В этой работе Абель находит сумму вышеуказанного ряда.

В своих работах Абель заложил основы теории алгебраических функций и (одновременно с Якоби) теории эллиптических функций.

В 1843 г. Пьер Альфонс **Лоран (1813-1854)** в работе «Обобще-ние теоремы Коши, относящейся к сходимости разложения функции по воз-растающим степеням неизвестного» ввел понятие сходимости в кольце и сформулировал теорему:

Пусть функция *f(z)*, являющаяся однозначной и аналитической в кольце $0 \leq r < |z - z_0| < R$, тогда в этом кольце она представима в виде ряда

$$\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| < \rho} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$.

В начале 40-х годов были выполнены первые работы **Карла Вейерштрасса** (1815-1897) по теории функций. Он их не опубликовал своевременно, и они увидели свет впервые лишь в 1894 г. (впрочем, он включал свои результаты в лекции по теории аналитических функций, читавшиеся в Берлинском университете, начиная с конца 50-х годов). К1841 г. относится его обобщение теоремы Коши о разложениях функции в степенной ряд на случай функции комплексного переменного, непрерывной и дифференцируемой в круговом кольце.

В 1842 г. в работе, также не опубликованной в свое время, «***Опреде-ление аналитической функции одного переменного посредством диффе-ренциального уравнения***» Вейерштрасс излагает идею **аналитического продолжения** степенных рядов, впоследствии игравшую существенную роль в его построении теории аналити-ческих функций.

В 30-ые и 40-ые гг XIX в.

теорию эллиптических функций развивают:

Карл Густав **Якоби(1804-1851)**

Жозеф **Лиувилль** (1809-1882).

Бернхард Риман (1826-1866)

Риман родился в Ганновере в семье пастора.

Он очень поздно начал учиться: в школу пошел лишь в 14 лет, в 20 лет поступил в Геттингенский университет на факультет философии и богословия.

Однако, послушав лекции Гаусса, Риман сделал свой выбор в пользу математики, и в 1847 г. перевелся в Берлинский университет. Там он слушал лекции Дирихле, Якоби и Штейнера.

Бернхард Риман (1826-1866)

В 1849 г. Риман вернулся в Геттинген, и в 1851 г. под руководством Гаусса защитил диссертацию «**Основания общей теории функций одной комплексной переменной**». В этой работе впервые появляется **риманова поверхность**.

Бернхард Риман (1826-1866)

В те годы в университетах существовала традиция: претенденты на должность экстраординарного профессора должны были выступить с публичной лекцией, в которой изложить собственные результаты.

В 1854 г. Риман прочитал такой доклад «**О гипотезах, лежащих в основании геометрии**». С этой работы ведет свое начало риманова геометрия, и в следующих лекциях мы обязательно остановимся на ней подробнее. Впрочем, Римана тогда в должности не утвердили.

После смерти Дирихле в 1859 г. Риман стал сразу ординарным профессором Геттингенского университета.

В 1866 году Риман умер в Италии от туберкулёза.

Бернхард Риман (1826-1866)

В 1855-1856 гг. Риман в должности приват-доцента Геттингенского университета читает курс теории абелевых функций, а через год направляет в печать большой, ставший классическим мемуар «**Теория абелевых функций**».

Риман о своем исследовании по тфкп пишет:

«Существовавшие до настоящего времени методы изучения этих функций имели в своей основе определение функции посредством формулы, позволяющей вычислить ее значение для каждого заданного значения аргумента; в нашем исследовании показывается, что в силу свойств, внутренне присущих функции комплексного переменного, в определении такого рода часть данных есть следствие остальных, и устанавливается, каким образом число данных может быть уменьшено и сведено строго к необходимому»

Бернхард Риман (1826-1866)

Представляя комплексные переменные z и w точками плоскостей A и B соответственно, он указывает, что зависимость w от z можно представлять как отображение плоскости A на плоскость B, при котором точка переходит в точку, линия в линию и область в область. Если же w есть функция z в определенном выше смысле, то это отображение преобразует малейшие части плоскости A в подобные им части плоскости B.

Риман расширяет понятие области, вводя названные затем его именем поверхности, многократно простирающиеся над всей плоскостью или ее частями. **Многолистные поверхности** позволяют распространить первоначальное определение функции на переменные величины, принимающие определенное значение для каждой точки такой поверхности, непрерывно изменяющееся вместе с изменением положения точки.

Тем самым Риман вводит в математику новый вид поверхностей, составленных из плоскостей и их частей, простертых одна над другой и особым образом скрепленных между собой. Факты теории функций комплексного переменного, будучи распространены на римановы поверхности, приобретают большую общность.

Бернхард Риман (1826-1866)

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$ (**дзета-функция Римана**)

Широко известна до сих пор не решенная **гипотеза Римана** о нулях дзета-функции, утверждающая, что все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную одной второй.

Вейерштрасс, Карл (1815-1897)

Еще одно направление развития теории функций комплексного переменного в XIX в., за которым закрепилось в истории название «аналитическое», сформировалось в работах **Карла Вейерштрасса**

Вейерштрасс, Карл (1815-1897)

В основе теории К. Вейерштрасса лежит понятие ***степенного ряда***.

Для него определяется круг сходимости и вводится определение **равномерной сходимости**. Далее рассматриваются лишь равномерно сходящиеся ряды.

Теорема: если ряд сходится равномерно в окрестности каждой точки, лежащей внутри или на границе данной области, то он сходится равномерно во всей области.

Вейерштрасс вводит понятия:

- **аналитического продолжения** функции,
- **элемента** функции,
- Полной аналитической функции.

Аппарат отличается единообразием; это — **степенные ряды**, операции с ними, оценки, зачастую весьма тонкие.

Литература:

1) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994. с.336-363
2) Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. Изд-во «Наука», 1981, с.115-256
3) Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.1960, Из-во физматлит. с.392-399
4) Ф.Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М. Наука. 1989.