История и методология механики

Евгений Алексеевич Зайцев
e_zaitsev@mail.ru

Лекция № 21

РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТАТИКИ

1. Развитие аналитической статики в трудах ученых Парижской Политической школы (Ж. Фурье, П.Лаплас и др.)

2. Дальнейшая разработка принципа виртуальных скоростей в трудах М.В. Остроградского и его школы

Парижская Политехническая школа

После революционного переворота 1789 г. молодая французская республика оказалась в трудном положении: ей приходилось бороться одновременно и с внутренними, и с внешними врагами.

В начале 1794 г. положение стало отчаянным, ощущалась острая нехватка квалифицированных научно- технических кадров.

В марте 1794 г. по инициативе Г. Монжа и Л. Карно Комитетом общественной безопасности была основана Политехническая школа.

Преподавателей для нее отбирали из числа лучших ученых, а студентов набирали по конкурсу (они получали неплохую стипендию).

В первый год было зачислено 400 студентов разного уровня.

После трехмесячного курса обучения их разделили на три группы:

(i) те, кто мог сразу поступить на службу государству,

(ii) те, кому нужен был год обучения, и

(iii) те, кому нужно было два года.

Парижская Политехническая школа

С момента своего основания школа преследовала основную цель: дать студентам прочную научную подготовку, основанную на математике, физике и химии.

Среди выпускников 1794 – 1804 гг. было много выдающихся ученых:

механики и математики Пуассон и Пуансо,

физик Био,

химик Гей-Люссак;

позже Коши и Ампер.

О высоком уровне Политехнической школы свидетельствует то, что Наполеон для своей экспедиции в Египет (1798) пригласил двух ведущих ее преподавателей, Монжа и Бертолле, и также 42 студента.

Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830)

Жан-Батист Жозеф Фурье родился в 1768 г.

В 1795 назначен ассистентом Лагранжа и Монжа. В 1798 Монж пригласил его для участия в египетской кампании Наполеона.

В Египте Фурье был секретарем Египетского института, вел переговоры и занимал дипломатические посты, а также проводил научные исследования.

После возвращения во Францию в 1801 г. Фурье хотел возобновить свою работу в Политехнической школе, но Наполеон заметил его административный талант и назначил префектом департамента Изер (столица Гренобль).

В 1808 г. Наполеон пожаловал ему баронство. В 1817 избран в Академию наук,; в 1822 г. он стал ее бессменным секретарем.

Умер в Париже в 1830 г.

Наиболее известен своими работами по теории теплопроводности.

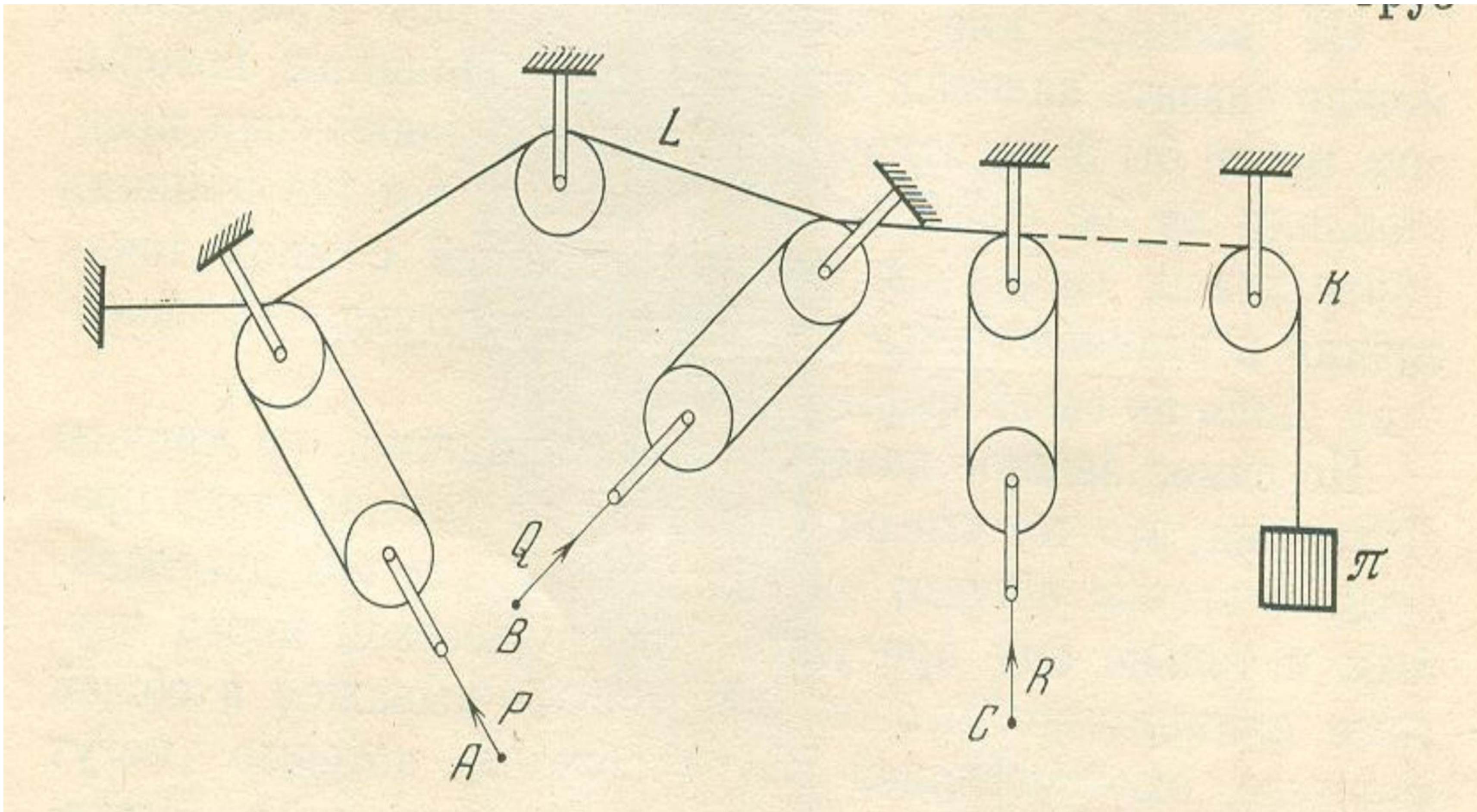
Статика Фурье

Статике посвящена самая первая статья Фурье «Мемуар о статике, содержащий доказательство принципа виртуальных скоростей и теорию момента» (1797).

Опубликована в том же выпуске журнала Политехнической школы, в котором впервые обнародовано обоснование Лагранжем принципа виртуальных скоростей при помощи принципа блоков (полиспастов).

Цель мемуара Фурье состояла в том, чтобы доказать <u>принцип виртуальных скоростей</u> в самом общем виде или, как он писал, «без ссылки на конкретную природу исследуемой системы».

Обоснования принципа возможных скоростей по Лагранжу при помощи принципа блоков. В.Л. Кирпичев «Беседы о механике» (1950), с. 22
Э. Мах, «Механика. Историко-критический очерк развития» (2000), с. 61, рис. 54.



Ж.-Б. Ж. Фурье, «Мемуар о статике, содержащий доказательство принципа виртуальных скоростей и теорию момента» (1797)

- Фурье начинает с Аристотеля, которому приписывает первичные представления о принципе виртуальных скоростей.

- Далее он указывает на то, что точная формулировка теоремы о виртуальных скоростях как критерия равновесия появляется впервые в письме И. Бернулли П. Вариньону (1717).

- Сам Вариньон, согласно Фурье, доказал эту теорему для нескольких частных случаев; полного доказательства он не дал.

- Вариньон в своем доказательстве использовал геометрические методы. В последующем развитие, напротив, пошло в русле применения аналитических методов, т.е. (математического) анализа.

- Значение принципа возможных скоростей для механики общепризнано. Фурье ставит вопрос: нельзя ли его вывести из каких то более общих соображений?

Принцип возможных скоростей.
Введение необходимых понятий.

I

«Если по какой-либо причине тело перемещается в соответствии с определенным законом, то любая величина, изменяющаяся в зависимости от его положения, например, расстояние от одной из точек тела до некоторой точки или фиксированной плоскости, будет функцией времени.

Если откладывать время по оси абсцисс, а указанное расстояние по оси ординат, то получим кривую на плоскости.

Тангенс угла наклона этой прямой … выражает (мгновенную) скорость, с которой данная величина *начинает* увеличиваться, или, если использовать привычную терминологию, – *флюксию* (*fluxion*) этой величины».

Принцип возможных скоростей (продолжение)

«Пусть на тело действует несколько сил. Тогда на линии действия каждой из сил отметим точку, к которой сила стремится приблизить ту точку системы, к которой она (эта сила) приложена.

Произведение этой силы на флюксию расстояния между двумя этими точками будет (называться) *моментом* (moment) силы.

Тело можно перемещать бесконечным числом способов, и каждому из них соответствует некоторая величина момента. …

Сумму всех моментов при некотором перемещении назовем *полным моментом* (*moment total*) или моментом сил для данного перемещения.

Будем отличать перемещения, совместимые с типом и состоянием системы, от перемещений, которые невозможно осуществить, не изменяя условий, наложенных на систему.

Будем считать, что условия, наложенные на систему, записаны … в виде уравнений».

Формулировка принципа виртуальных скоростей

«Принцип виртуальных скоростей состоит в том, что какова бы ни была природа тела, оно находится в равновесии под действием нескольких сил, если полный момент этих сил равен нулю для каждого перемещения, удовлетворяющего уравнениям условий (наложенных на систему)».

Замечание Фурье:

«Иоганн Бернулли вместо флюксий рассматривает «зарождающиеся» приращения. При таком подходе каждая точка системы, двигаясь в течение бесконечно малого интервала времени равномерно и прямолинейно, будет описывать некоторый малый отрезок. Проекция этого отрезка на линию действия силы и есть виртуальная скорость; и если умножить ее (виртуальную скорость) на силу, то получим момент (силы). Такой подход – его следует признать удачным – дает возможность применять обычные методы дифференциального исчисления».

Среди механиков XVIII в. велись бесконечные споры о том, какой способ положить в основу доказательства принципа виртуальных скоростей.

Три доказательства Фурье принципа виртуальных скоростей

В первом и втором доказательстве Фурье исходит из закона равновесия сил, приложенных в одной точке, т.е. опирается на правило параллелограмма сил.

Многие механики XVIII в. считали именно этот закон наиболее фундаментальным и строго доказанным.

Доказательство правила параллелограмма сил во времена Фурье можно было получить разными способами.

Варианты: в духе Ньютоновского подхода через понятие силы, вызывающей ускорение, или в духе аристотелевской динамики через понятие силы, вызывающей скорость (Вариньон).

В последнем случае удавалось избежать использования бесконечно малых величин.

Первые два доказательства принципа возможных скоростей (продолжение)

Зная условия равновесия точки (по правилу параллелограмма), можно перейти к условиям равновесия системы, как совокупности точек. Отделяя точки друг от друга, можно мысленно уничтожить связи, заменив их силами реакции. В этом случае каждую точку можно рассматривать отдельно.

Для равновесия точки необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая всех приложенных к ней сил была равна нулю. Но тогда и работа этой равнодействующей на возможных перемещениях точки будет равна нулю.

Составляем уравнения равновесия для всех точек системы и затем исключаем из них силы связи.

Связи можно подвести под следующие типы:

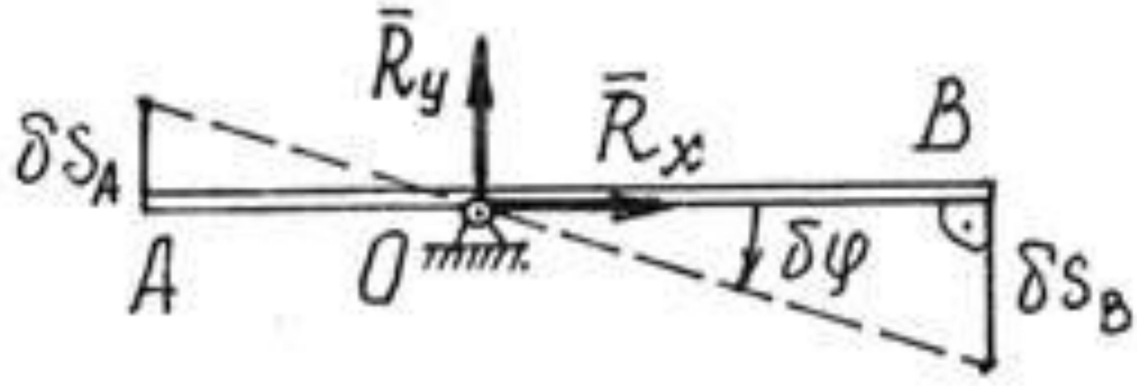
расстояние между двумя точками не изменяется;

точка системы вынуждена при своих перемещениях оставаться на определенной поверхности (на шаре, на плоскости, и т.д.);

два тела, входящие в состав системы, должны соприкасаться между собою.

Для каждого их этих типов Фурье доказывает принцип виртуальных скоростей.

Закон рычага и принцип возможных перемещений. Общие соображения



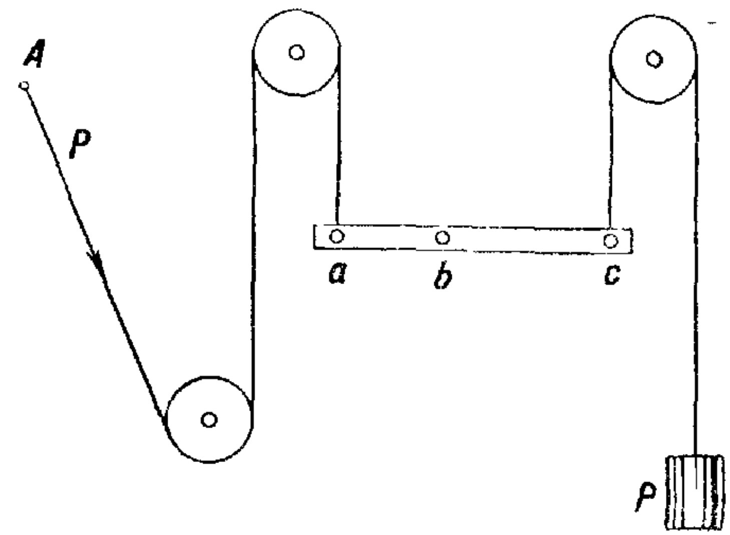
Предваряя третье доказательство Фурье: из закона рычага может быть выведен закон виртуальных перемещений для сил, приложенных к рычагу.

Задача Фурье состоит в том, чтобы, опираясь на принцип рычага, вывести принцип виртуальных перемещений для произвольной системы сил.

Третье доказательство Фурье принципа возможных скоростей (по В.Л. Кирпичеву)

В основу доказательства положен закон рычага. Все активные силы *P*, *Q*, *R* … системы заменяются грузами *p*, *q*, *r*, … с помощью механизма, изображенный на рисунке.

(NB. Груз на рисунке *p*, а не *P*!)



Длины плеч рычагов *ab* и *bc* подбираются так, чтобы возможные (!) перемещения всех грузов *p*, *q*, *r*, … были одинаковы по величине. Обозначим ее через *s*. Для каждой пары сила-груз можно фиксировать длину правого плеча *bc* и варьировать (подбирать) величину плеча *ab*. При рычажных преобразованиях силы изменяются обратно пропорционально, а возможные перемещения изменяются прямо пропорционально плечам.

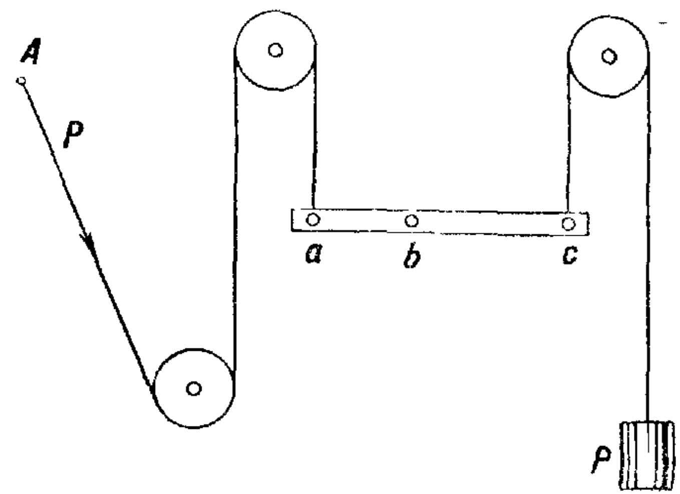
Поэтому при таких преобразованиях работа на возможном перемещении остается без изменения. А так как возможные перемещения для всех весов *p*, *q*, *r*, … одинаковы, то эти веса пропорциональны возможным работам сил.

Третье доказательство принципа возможных скоростей (по В.Л. Кирпичеву)

Активные силы системы делятся на две группы. Одни из них *P*, *Q*, *R* … дают положительную работу; отвечающие им грузы *p*, *q*, *r*, … опускаются при возможных перемещениях. Другие *P'*, *Q'*, *R'* … дают отрицательную работу, а соответствующие им грузы *p'*, *q'*, *r'*, … поднимаются.

Величина опускания грузов первой группы такая же, как величина поднятия грузов второй группы.

Рычаги и отводные блоки можно расположить так, что все опускающиеся грузы *p*, *q*, *r*, … «придутся» в одной точке. Тогда можно заменить совокупность этих грузов одним, равным их сумме; обозначим его через *E*. То же можно сделать и для всех подымающихся грузов, заменив их одним грузом *F*. Расположим грузы *E* и *F* на одном уровне и соединим их с помощью горизонтального рычага, точка опоры которого расположена посредине, так как повышение одного конца равно понижению другого конца.



Третье доказательство принципа возможных скоростей (по В.Л. Кирпичеву)

Теперь равновесие системы сводится к равновесию этого горизонтального рычага. Поскольку рычаг равноплечный, грузы *E* и *F* равны между собой, т.е $E - F = 0$.

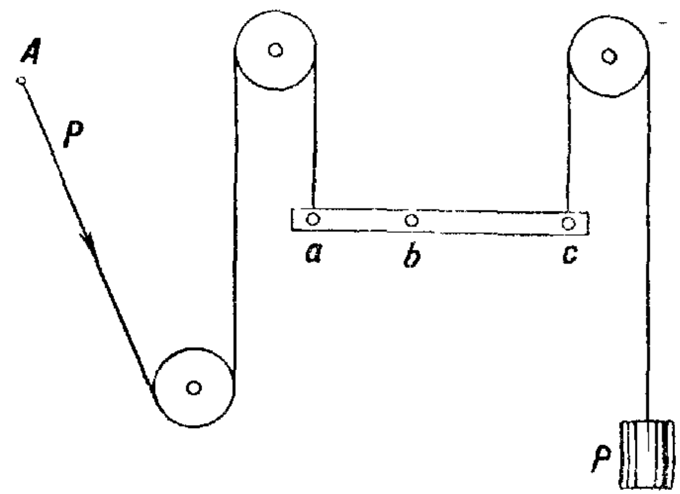
Умножим обе части равенства на величину возможного перемещения *s*, одинакового для всех грузов *p*, *q*, *r*, … и *p'*, *q'*, *r'*, …., и заменим *E* и *F* соответствующими суммами

$E = p + q + r + \ldots$ и $F = p' + q' + r' + \ldots.$

Получим

$(p + q + r + \ldots)s - (p' + q' + r' + \ldots.)s = 0$

Это и есть принцип возможных перемещений.



Вопрос об истоках аналитической механики Лагранжа. Ошибка В.Л. Кирпичева

«Это доказательство (т.е. доказательство принципа возможных скоростей при помощи системы полиспастов – Е.З.) интересно, как указатель тесной связи нашего принципа с машинами и механизмами разного рода. Сам принцип возможных перемещений вырос на почве изучения машин, и следы его происхождения видны во многих доказательствах этого принципа» (В.Л. Кирпичев).

Тезис Кирпичева не находит подтверждения в работах Лагранжа. Последний не занимался задачами практической механики. Он был чистый теоретик.

Идеи созданной Лагранжем аналитической механики формировались в ходе решения им задач теоретической астрономии, в основном, вопроса о либрации Луны.

Тезис К. Трусделла об истоках общих понятий и теорий механики.

В практической механике аналитика Лагранжа стала использоваться лишь спустя почти через столетие после выхода в свет его «Аналитической механики».

«Аналитическая механика спустилась с небес на Землю» (И.Б. Погребысский)

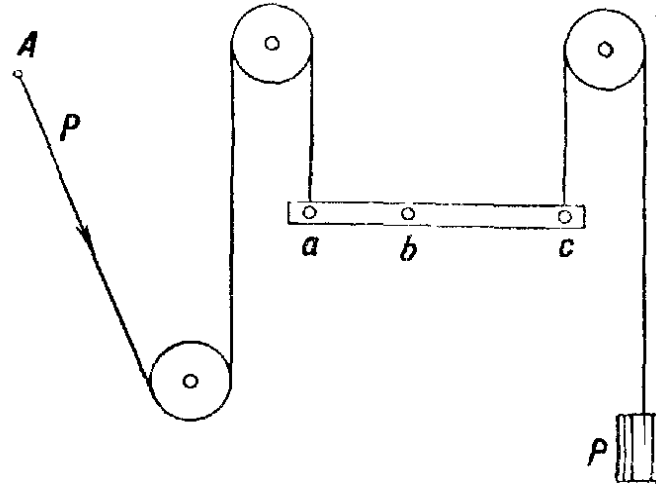
Доказательство Фурье принципа возможных скоростей (по D. Capecchi)

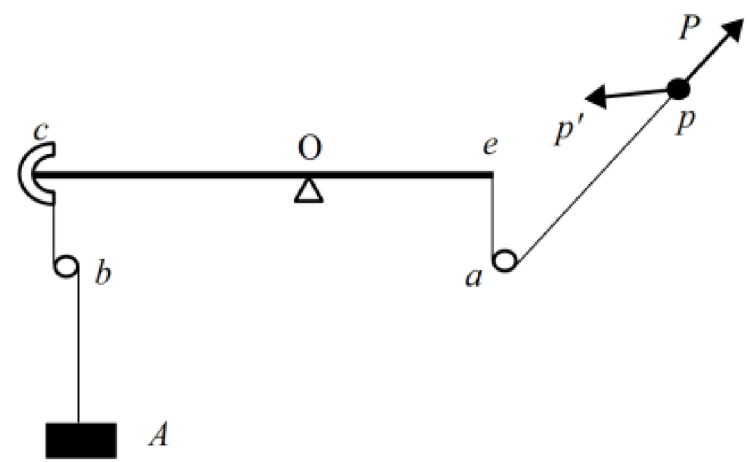
В своей реконструкции В.Л. Кирпичев опустил важную деталь доказательства Фурье.

Фурье писал: «нить, на которой находится груз p, сначала «оборачивает» некоторый *сектор*, который закреплен на конце рычага и перемещается вместе с ним, после чего идет на неподвижный шкив, который меняет ее направление».

Цель, которую преследовал Фурье, фиксируя *сектор* на конце рычага, он объясняет так:

«Чтобы сделать доказательство <u>независимым</u> от понятия *бесконечно малой величины*, будем считать, что элемент в виде сектора на рычаге можно приладить так, что в результате груз (вес) будет двигаться по вертикали *равномерно*. …. И тогда все грузы будут иметь одну и ту же скорость…»





Доказательство Фурье принципа возможных скоростей (по D. Capecchi)

Благодаря использованию сектора, вес в механизме Фурье опускается или поднимается *равномерно* (хотя точка приложения соответствующей силы может перемещаться неравномерно).

Таким образом, движение элементов системы оказывается сведенным к *равномерному* движению грузов.

В силу равномерности при анализе движения отпадает необходимость в рассмотрении инфинитезимальных характеристик – виртуальных скоростей, перемещений или работ. Можно ограничиться изучением обычных скоростей и моментов.

Таким образом, реконструкция В.Л. Кирпичева, вообще говоря, некорректна.

В ней, в противоположность идее Фурье, существенно используется представление об инфинитезимальном перемещении (хотя и только в одном направлении – вертикальном).

Доказательство Фурье принципа возможных скоростей

В заключении Фурье пишет:

«Соглашаясь с тем, что каждая из сил может быть заменена грузом, прикрепленным к тросу, перекинутым через возвращающий шкив, мы получаем, что для каждого перемещения элементов системы, находящейся в равновесии, количество движения поднимающихся грузов равняется количеству движения опускающихся грузов.

Несмотря на то, что это замечание нельзя рассматривать как (настоящее) доказательство, оно, тем не менее, показывает, каким образом принцип виртуальных скоростей сводится к принципу Декарта или принципу, который применял Торричелли.

Естественно предположить, что и Иоганн Бернулли был знаком с аналогичной конструкцией.

Те же идеи мы находим в работе Карно, напечатанной в 1783 г. под названием “Опыт о машинах вообще”».

Фурье о равновесии систем с односторонними связями

«Для равновесия тела нет необходимости, чтобы момент был нулем; достаточно, чтобы момент не был отрицательным ни для какого возможного перемещения … .

Таковы настоящие основы статики.

Общая теория моментов в том виде, в каком мы ее представили, включает всю науку о равновесии и имеет то преимущество, что позволяет применять дифференциальное исчисление (см. *Аналитическую механику*)».

Фурье о положении устойчивого равновесия

«Положение равновесия - это не только то положение, которое тело сохранит, если его в это положение поместить.

Скорее, это такое положение, из которого тело невозможно вывести без разрушения части сил, которые действуют на него.

Это то положение, которое тело стремится занять, находясь в любом смежном положении; в этом случае момент, который рождается, всегда положителен.

Отсюда вытекает критерий, позволяющий отличить истинное равновесие от ложного равновесия.

Если в положении равновесия момент не равен нулю, но положителен, то условие устойчивости всегда выполняется…».

В качестве иллюстрации устойчивого равновесия Фурье приводит маятник в нижней точке.

Пьер Симон Лаплас (1749-1827)

Пьер Симон, маркиз де Лаплас родился в 1749 г.

Лаплас – один из выдающихся педагогов Парижской Политехнической школы. Научную карьеру начал в Военной школе, где занимал должность профессора (по рекомендации Даламбера).

В 1773 г. Лаплас стал членом Парижской академии наук, затем членом Сената. После падения Наполеона назначен пэром Франции и возведен в сан маркиза. Умер в Париже в 1827 г.

Наряду с Эйлером и Лагранжем является основоположником классической небесной механики. Главный труд Лапласа – трактат «Небесная механика» в 5 тт..

В первых двух томах (вышли в 1798-99 гг.) изложены основные законы и математический аппарат классической аналитической механики.

Статика Лапласа

Статика излагается Лапласом в первом томе «Небесной механики» (глава 3). Имея ввиду главным образом задачи небесной механики, Лаплас считал основной моделью статики систему свободных точек, взаимодействующих на расстоянии. Условие равновесия для такой системы заключается в равенстве нулю результирующей всех сил, действующих на каждую точку в отдельности.

Механические системы со связями (которые для небесной механики никакого значения не имели, но рассматривались лишь для общности) Лаплас стремится трактовать так же, как системы свободных взаимодействующих точек.

Он замечает, что в условиях движения и равновесия ничего не изменится, если мы устраним из связанной системы имеющиеся в ней связи, добавивши взамен этого к силам, действующим на точки, силы реакции связей.

В полученной таким образом системе свободных точек условия равновесия будут выражаться условиями равенства нулю равнодействующей всех сил, приложенных к каждой точке системы, включая силы реакции связей.

Лаплас. Доказательство принципа возможных скоростей из правила параллелограмма сложения сил

Рассмотрим свободную материальную точку М, на которую действуют силы *S*. Для каждой из этих сил зафиксируем на линии ее действия произвольную точку С. Обозначим через *s* расстояние от М до С:

$$s = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

где *x*, *y*, *z* - координаты *M*, *a*, *b*, c - координаты С. Пусть *V* – равнодействующая сил *S*, приложенных к *M*, а *u* – расстояние от М до произвольной точки D на линии действия *V*. Компоненты сил *V* и *S* по оси *x* выражаются в виде:

$$V\frac{\delta u}{\delta x}, \quad S\frac{\delta s}{\delta x},$$

Например, для компоненты *S* по оси x это верно, поскольку

$$\frac{\delta s}{\delta x} = \frac{x-a}{s}$$ – направляющий косинус силы *S*.

Умножив силу *S* на него, получим компоненту *S* вдоль оси *x*.

Аналогично выражаются компоненты сил *V* и *S* по осям *y* и *z*.

Доказательство принципа возможных скоростей

Точно так же выражаются компоненты этих сил по осям *y* и *z*. Используя правило сложения сил, получаем:

$$V\frac{\delta u}{\delta x}=\sum S\frac{\delta s}{\delta x};\quad V\frac{\delta u}{\delta y}=\sum S\frac{\delta s}{\delta y};\quad V\frac{\delta u}{\delta z}=\sum S\frac{\delta s}{\delta z}$$

Умножаем эти уравнения на $\delta x, \delta y, \delta z$ соответственно, а затем складываем.

В результате получаем: $V\delta u=\sum S\delta s,$

Лаплас. Доказательство принципа возможных скоростей (продолжение)

Для равновесия результирующая сила *V* должна быть равна нулю, поэтому равновесие наступит тогда и только тогда, когда:

$$0 = \sum S\delta s, \qquad (1)$$

что представляет собой уравнение моментов.

В случае материальной точки, удерживаемой на поверхности, Лаплас обозначает через *R* реактивные силы, а через δr бесконечно малое перемещение точек их приложения. Из (1) он получает:

$$0 = \sum S\delta s + R\delta r \qquad (2)$$

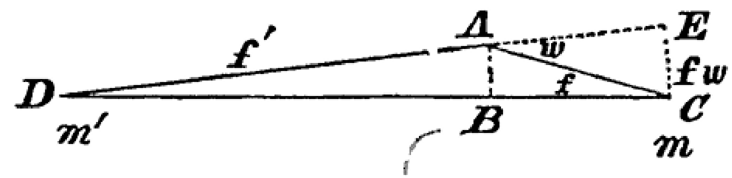
Поскольку точка *M* остается на поверхности, а $\delta r = 0$, (2) сводится к (1).

Случай системы из нескольких связанных частиц Лаплас исследует аналогично, записывая соотношение (2) для каждой точки, но с учетом взаимодействия между точками.

А.-М. Ампер о доказательстве Лапласа принципа виртуальных скоростей

«Г-н Лаплас дал доказательство этого принципа, опирающееся на общие соображения, которые, однако, слишком абстрактны, чтобы быть доступными для начинающих».

Лаплас. Оригинальное доказательство принципа рычага: $mf = m'f'$
Разъяснение (из англ. перевода «Небесной механики», 1829)



* (50) To illustrate this, let DAC be the bent lever, A its point of suspension, C, D the extremities, to which m, m' are attached; the line CD being horizontal. Draw the vertical lines AB, CE, meeting DC, and DA (continued), in B and E. Then $AC = f$, $AD = f'$, $CAE = \omega$. Supposing the angle ω to be infinitely small, and neglecting its second and higher powers, we shall have $CB = f$, $DB = f'$, $DC = f + f'$, $CE = f\omega$; this last line being nearly equal to the arch of a circle, described about A as a centre, with the radius AC. The similar triangles DCE, DBA give $DC : DB :: CE : AB$; hence in symbols, $AB = \frac{ff'\omega}{f+f'}$. Now the weight m acts at C, in the direction EC, parallel to AB, with the force of its gravity mg, which may be represented by AB. This may be resolved into two forces AC, CB; of which the first is destroyed by the reaction of the point of support A; the other, in the direction CB, is equal to $mg \cdot \frac{CB}{AB}$; and, by substituting the above values of AB, CB it becomes, $\frac{mg\cdot(f+f')}{\omega f'}$. In a similar way, by changing f into f', m into m', and the contrary, we obtain the force of the weight m', acting at D, resolved in the direction DB, $\frac{m'g\cdot(f+f')}{\omega f}$, which agrees with the above. Putting these two expressions equal to each other and dividing by $\frac{g\cdot(f+f')}{\omega f' f}$ we get [106vi].

Андре Мари Ампер (1775-1836)

Дж. Максвелл называл Ампера «Ньютоном электричества».

С 1897 – профессор математики в Политехнической школе.

Член Лондонского королевского общества, Парижской и Петербургской академий наук.

Статике Ампер посвятил статью «Общее доказательство принципа возможных скоростей, свободное от рассмотрения бесконечно малых» (1806).

Ампер, «Общее доказательство принципа возможных скоростей, свободное от рассмотрения бесконечно малых» (1806).

Ампер о поставленной цели:

«Принцип виртуальных скоростей, лежащий в основе этой замечательной работы (имеется в виду “Аналитическая механика” Лагранжа), рассматривался ее автором лишь как отправная точка для вывода следствий. С тех пор стали искать общее доказательство этого принципа. Сам г-н Лагранж свел его к равновесию системы полиспастов, а г-н Карно – к закону равновесия рычага. Г-н Лаплас дал доказательство этого принципа, опирающееся на общие соображения, которые, однако, слишком абстрактны, чтобы быть доступными для начинающих. Я поставил целью дать столь же общее доказательство (как и Лаплас), которое опиралась бы только на теорию составления и разложения сил, приложенных в одной точке, – теорию, которая была бы *свободна от использования бесконечно малых величин*».

Изложение самого Ампера не отличается, однако, простотой …

В статье Ампера мы в очередной раз встречаемся с попыткой – традиционной для механики того времени – максимально упростить вывод принципа возможных перемещений, исключив из него ссылку на инфинитезимальные методы с опорой только на <u>правило составления</u> и разложения <u>сил</u>, которое Ампер считал «наиболее строгим».

Принцип виртуальных скоростей в трудах М.В. Остроградского и его школы.

Михаил Васильевич Остроградский (1801 —1861) вырос в семье мелкопоместного дворянина Миргородского уезда Полтавской губернии, в детские годы получил домашнее образование.

В 1820 г. окончил Харьковский университет, но диплома не получил.

Совершенствовать свои знания поехал в Париж, где его учителями были Лаплас, Коши, Пуассон.

Эти ученые были высокого мнения о работах Остроградского.

Первой его работой, опубликованной в Париже, был «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне» (1826).

Принцип виртуальных скоростей в трудах М.В. Остроградского и его школы.

В 1828 г. Остроградский возвращается в Россию. Преподает в должности профессора математику и механику в Корпусе инженеров путей сообщения, в Педагогическом институте, в Главном инженерном училище, в Главном артиллерийском училище.

В 1832 г. становится академиком

Большая часть научных трудов М. В. Остроградского относится к аналитической и прикладной механике (теория притяжения, гидромеханика, проблемы колебания упругого тела, теория удара, обобщение принципа виртуальных скоростей, дифференциальные уравнения механики, внешняя баллистика и др.).

Для деятельности М. В. Остроградского характерно сочетание строгой теории с конкретной практической направленностью ее приложений.

Работы Остроградского по аналитической статике

Для развития аналитической статики большое значение имела разработка Остроградским принципа виртуальных перемещений в случае систем с неудерживающими (односторонними) связями.

Первое исследование на эту тему вышло в 1838 г. под названием «Общие соображения относительно моментов сил».

Остроградский расширил применение принципа виртуальных скоростей, дав новую более общую формулировку:

«Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы дифференциал $Pdp + Qdq + Rdr + \ldots$ не был положительным ни при каком возможном перемещении».

(*моменты* у Остроградского и Лагранжа отличаются знаком).

Работы Остроградского по аналитической статике

В 1838 г. Остроградский публикует «Мемуар о мгновенных перемещениях систем, подчиненных переменным условиям». В нем он, в частности, рассматривает связи, зависящие от времени.

В 1854 г. выходит «Мемуар о общей теории соударения», в котором дано суммарное изложение общей теории принципа возможных перемещений и аналитической теории равновесия механических систем со связями общего вида.

Остроградский разработал алгоритм использования неопределенных множителей Лагранжа в общем случае равновесия системы материальных точек, подверженной ограничению со стороны неудерживающих связей.

Приведем пример, как этот алгоритм работает

(из книги: И.А. Тюлина, «История и методология механики», 1979, с. 142).

Остроградский рассматривает[1] в качестве первого примера случай материальной точки на гладкой освобождающей поверхности, например на поверхности гладкой сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{1}$$

Мы несколько видоизменим форму записи соотношений Остроградского, не нарушая смысла его рассуждений. Уравнение, которому удовлетворяют координаты материальной точки, запишем в виде: $x^2+y^2+z^2-R^2=C$, где $C=0$, если точка находится на сфере, $C>0$, если точка вне сферы.

Проварьируем вслед за Остроградским уравнение связи:

$$2x\,\delta x + 2y\,\delta y + 2z\,\delta z = \delta C, \tag{2}$$

δC равно нулю, когда точка на сфере, больше нуля, когда она вне сферы. Условие равновесия точки под действием силы с проекциями X, Y, Z гласит:

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta\pi,$$

где $\delta\pi=0$ для неосвобождающей связи, $\delta\pi<0$ для случая освобождения точки от связи. Пусть на точку действует только ее вес. Тогда последнее условие примет вид:

$$-mg\,\delta z = \delta\pi. \tag{3}$$

Умножим вариацию связи (2) на неопределенный множитель Лагранжа λ и сложим с условием равновесия (3):

$$2\lambda x\,\delta x + 2\lambda y\,\delta y + (-mg + 2\lambda z)\,\delta z = \delta\pi + \lambda\delta C.$$

Так как виртуальные перемещения точки, не покидающей сферу, входят в число виртуальных перемещений, правая часть равенства равна нулю; из независимости вариаций координат δx, δy, δz следует $x=0$, $y=0$, $2\lambda z=mg$. Этот же случай позволяет получить из уравнения связи $z=\pm R$.

Рассмотрим теперь равенство $\delta\pi+\lambda\delta C=0$. Так как $\delta\pi\leqslant 0$, то $\lambda\delta C\geqslant 0$. Если связь освобождает, то $\delta C>0$ и $\lambda>0$. Следовательно, точка на внешней поверхности гладкой сферы под действием веса может находиться в равновесии только при $\lambda=mg/2R$, т. е. в верхнем положении. Изменение знака λ при обращении этой величины в нуль означало бы, что точка покидает связь (реакция, проходя через значение нуль, должна изменить знак; давление поверхности должно быть заменено натяжением нити). В случае удерживающей связи вопрос о знаке множителя λ не играет роли.