История математики
21 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2025 года

Математика XIX века. Теория функций комплексного переменного. Наследие XVIII в. Интерпретация комплексного числа. Теория О. Коши. Геометрическое направление Б. Римана. Теория аналитических функций К. Вейерштрасса.

ТФКП. Наследие предыдущих веков

1) Р.Бомбелли, 1572 г.
2) Лейбниц, 1702 г.
3) 1712 г. – спор между Лейбницем и Иоганном Бернулли о природе логарифма отрицательного числа

ТФКП. Наследие предыдущих веков

4) 1722 г. – формула Муавра

5) Сочинения Даламбера (1752 г.) и Эйлера (1755 г.) по гидродинамике

1748 г. - «Введение в анализ б.м.» Эйлера

1777 г., Эйлер «О представлении сферической поверхности на плоскости»

1789 г. термин «конформные отображения», Шуберт Ф.И.

Наследие предыдущих веков

Рафаэль **Бомбелли** в своей «Алгебре» (оп.1572 г.), рассматривая уравнение

$x^3 = px + q,$ в случае, когда $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{3}\right)^3$,

аксиоматически **определяет мнимые числа** и формулирует правила работы с ними.

Рафаэль Бомбелли (ок.1526-1573)

L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

«Алгебра» Бомбелли (1572), I том. Построение числовой области

1. Последовательные целые степени рациональных чисел.
2. Иррациональные величины – корни квадратные, кубические, квадро-квадратные,…, их биномы и триномы.
3. Отрицательные числа meno.
4. Мнимые (софистические) числа.

Софистические числа

$\sqrt{-1}$ - piu di meno (плюс из минуса)

$-\sqrt{-1}$ - meno di meno (минус из минуса)

piu di meno via piu di meno fa meno

piu di meno via meno di meno fa piu

meno di meno via piu di meno fa piu

meno di meno via meno di meno fa meno

В 1712 г. между Лейбницем и И.Бернулли возник **спор о природе логарифма отрицательной величины**. Лейбниц считал логарифмы отрицательных чисел мнимыми, а И.Бернулли — действительными. Позже к этому спору подключились Эйлер и Даламбер.

И.Бернулли ошибочно полагал, что доказал равенство $\ln x = \ln(-x)$, и отсюда делал вывод, что логарифм отрицательного числа — действительный.

Лейбниц же раскладывал $\ln(1+x)$ в ряд: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$. При $x = -2$ этот ряд расходится и, значит, логарифм отрицательного числа не является действительным.

Эйлер в 1749 г. доказал многозначность логарифма отрицательного числа.

В 1748 г. Эйлер во «**Введении в анализ бесконечно малых**» ***вводит комплексную переменную в ка-честве наиболее общего понятия переменной величины***. В этой работе Эйлер исследовал трансцендентные (показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические) функции с помощью степенных рядов. И для этого вывел формулы:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

$$\ln z = \lim_{n\to\infty} n\left(z^{1/n}-1\right),$$

$$e^{\pm i\varphi} = cos\varphi \pm isin\varphi.$$

В работах по интегральному исчислению (результаты 1777 г., опубликованы в 1793 и 1797 гг.) Эйлер установил равенство:

$$\int f(z)dz = \int (udx - vdy) + i\int (vdx + udy),$$ где

$$f(z) = u + iv.$$

Пользуясь последним соотношением, Эйлер показал, что действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного удовлетворяют условию Даламбера-Эйлера (Коши-Римана).

Геометрическая интерпретация

- 1) К.Вессель, 1799 (1745-1818, Норв.-Дан.)
- 2) Ж. Арган, 1806 (1768-1822, франц)
- 3) М.Бюэ ,1806 (1748-1826, англ.)
- 4) Гаусс (1831 г.),

Гаусс, Карл Фридрих (1777-1855) Брауншвейг-Геттинген

- 1822 г., «Исследования относительно кривых поверхностей», развитие метода конформных отображений
- 1831-32 гг. «теория биквадратных вычетов», геометр. интерпретация

В 1811 г. (опубликовано в 1880) Гаусс пишет **письмо Бесселю**, в котором содержится:

1) отчетливая интерпретация комплексных чисел;

2) определение интеграла в комплексной плоскости;

3) интегральная теорема (известная теперь как теорема Коши);

4) разложимость аналитической функции в степенной ряд.

ТФКП в 19 веке

1) О. Коши
2) Б. Риман
3) К.Вейерштрасс

Коши, Огюстен Луи (1789-1857)

- 1825г. – «Мемуар о теории определенных интегралов»
- 1825 г. – «Мемуар об определенных интегралах, взятых между мнимыми пределами»

16 работ по теории вычетов, 1826-1829 гг

Из условия Коши-Римана и условия (также известного еще Эйлеру)

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)dx\,dy$$

Коши получает:

$$\int_{y_0}^{Y} F(x_0+iy)idy \ + \int_{x_0}^{X} F(x+iY)dx =$$

$$= \int_{x_0}^{X} F(x_0+iy_0)dx + \int_{y_o}^{Y} F(X+iy)idy$$

В 1826 г. Коши вводит понятие **вычета** следующим образом:

«Если, после того как найдены значения x, обращающие f(x) в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому через x_1*, бесконечно малое количество ε и далее разложить* $f(x_1+\varepsilon)$ *в ряд по возрастающим степеням того же количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε и один из них будет произведением* $1/_\varepsilon$ *на конечный коэффициент, который мы и назовём* ***вычетом*** *функции* $f(x)$*, относящимся к частному значению* x_1 *переменной x».*

В 1831 г. (опубл. в 1841 во 2-ом томе «Упражнений по анализу») **появляется интегральная формула Коши:**

пусть $f(\zeta)$ аналитична в некоторой замкнутой односвязной области D, тогда справедлива формула:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Здесь интеграл берется по замкнутому контуру γ, целиком лежащем в области D и проходимому в положительном направлении, а z — произвольная точка, лежащая внутри γ.

В 1826 г. в первом томе журнала Крелле появляется работа Абеля «Исследование о ряде $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$, где m и x — любые числа». В этой работе Абель находит сумму вышеуказанного ряда.

В своих работах Абель заложил основы теории алгебраических функций и (одновременно с Якоби) теории эллиптических функций.

В 1843 г. Пьер Альфонс **Лоран (1813-1854)** в работе «Обобще-ние теоремы Коши, относящейся к сходимости разложения функции по воз-растающим степеням неизвестного» ввел понятие сходимости в кольце и сформулировал теорему:

Пусть функция *f(z),* являющаяся однозначной и аналитической в кольце $0 \leq r < |z - z_0| < R$, тогда в этом кольце она представима в виде ряда

$$\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_{0|<\rho}} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$

Бернхард Риман (1826-1866)

В 1851 г. под руководством Гаусса защитил диссертацию «**Основания общей теории функций одной комплексной переменной**». В этой работе впервые появляется **риманова поверхность**.

Риман о своем исследовании по тфкп пишет:

- *«Существовавшие до настоящего времени методы изучения этих функций имели в своей основе определение функции посредством формулы, позволяющей вычислить ее значение для каждого заданного значения аргумента; в нашем исследовании показывается, что в силу свойств, внутренне присущих функции комплексного переменного, в определении такого рода часть данных есть следствие остальных, и устанавливается, каким образом число данных может быть уменьшено и сведено строго к необходимому»*

Риман расширяет понятие области, вводя названные затем его именем поверхности, многократно простирающиеся над всей плоскостью или ее частями. **Многолистные поверхности** позволяют распространить первоначальное определение функции на переменные величины, принимающие определенное значение для каждой точки такой поверхности, непрерывно изменяющееся вместе с изменением положения точки.

•

Бернхард Риман (1826-1866)

$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ (**дзета-функция Римана**)

Широко известна до сих пор не решенная **гипотеза Римана** о нулях дзета-функции, утверждающая, что все нетривиальные нули дзета-функции имеют действительную часть, равную одной второй**.**

Вейерштрасс, Карл (1815-1897)

Вейерштрасс, Карл (1815-1897)

В основе теории К. Вейерштрасса лежит понятие ***степенного ряда***.

Для него определяется круг сходимости и вводится определение **равномерной сходимости**. Далее рассматриваются лишь равномерно сходящиеся ряды.

Теорема: если ряд сходится равномерно в окрестности каждой точки, лежащей внутри или на границе данной области, то он сходится равномерно во всей области.

Вейерштрасс вводит понятия:

- **аналитического продолжения** функции,
- **элемента** функции,
- Полной аналитической функции.

Аппарат отличается единообразием; это — **степенные ряды**, операции с ними, оценки, зачастую весьма тонкие.

Литература:

1) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994. с.336-363
2) Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. Изд-во «Наука», 1981, с.115-256
3) Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.1960, Из-во физматлит. с.392-399
4) Ф.Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М. Наука. 1989.