

Лекция 21

Вера Николаевна Чиненова

**Развитие исследования локально-вариационных законов
отбора истинных состояний равновесия системы
материальных точек**

**Принцип наименьшего действия
по Мопертюи, по Эйлеру и по Лагранжу**

В ранних периодах развития механики основным локально-вариационным законом отбора истинных состояний равновесия системы связанных тяжелых тел явился **принцип Торричелли**, имевший своей основной формой принцип **минимальности высоты центра тяжести рассматриваемой системы тел** в положении истинного равновесия по сравнению со всеми возможными смежными положениями системы.

Предыстория вариационных принципов механики и оптико-механической аналогии

Вариационный принцип для физической проблемы впервые был отчетливо сформулирован в геометрической оптике в XVII в. и применен к решению задач отражения и преломления света. Это был **принцип кратчайшего времени или принцип Ферма**. По мнению Ферма, «природа действует наиболее легкими доступными путями, а отнюдь не более краткими». Он является наиболее общей математической формой выражения законов геометрической оптики.

Немедленно и закономерно возникла проблема отыскания аналогичных задач с минимальным значением времени в механике. Рассмотрение одной из них связана с проблемой определения кривой при условии, что некоторая величина, связанная с ее формой, имеет максимум или минимум, т. е. отысканием кривой, обладающей некоторым свойством максимума или минимума.

В 1696 г. И. Бернулли опубликовал заметку «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики». Это была знаменитая **задача о брахистохроне** или кривой наискорейшего ската: даны две точки в вертикальной плоскости, найти вид кривой линии, спускаясь по которой тяжелое тело прошло бы путь между этими точками **в наименьшее время**.

Её решение было дано И. Бернулли, Лейбницем, Ньютоном, Я. Бернулли и Лопиталем.

Галилей, который впервые поставил этот вопрос, ошибочно считал, что брахистохроной является дуга круга.

Прежде всего И. Бернулли указывает на замечательный результат, что брахистохроной, так же как и таутохроной Гюйгенса, является циклоида.

Тут же И. Бернулли дает, по существу, первую формулировку **оптико-механической аналогии**, хотя, еще в очень частной форме. Он пишет: «Я укажу, что мною открыто удивительное совпадение **между кривизной луча света в непрерывно изменяющейся среде и нашей брахистохронной кривой**».

Впервые понятие «**действие**» (actio formalis) сформулировано Лейбницем.

Измеряется эта величина **произведением массы, скорости и длины пути**, а так как длина пути может быть представлена в виде **произведения скорости на время**, то **величина действия определяется произведением живой силы на время.**

Но в работе Лейбница о динамике и в его переписке с Бернулли по этому вопросу, где он защищает свое определение величины действия, не содержится никаких определенных указаний на **принцип наименьшего действия!**

Кстати, Мопертюи не знал этих соображений Лейбница.

В переходном периоде развития механики (период формирования основных понятий и основных законов механики) этот принцип у некоторых авторов принимает вид формулировок принципа не минимальности, но **стационарности высоты центра тяжести системы**, принимаемых в смысле равенства нулю дифференциального изменения высоты центра тяжести системы при всевозможных смещениях из рассматриваемого истинного положения равновесия. Например, в одной из статей 1695г. Иоганна Бернулли говорится, что за исходный принцип он принимает следующую аксиому статики: во всяком уравновешенном движении тяжелых тел общий центр тяжести не поднимается и не опускается, но вечно остается на одной и той же высоте над горизонтом.

При переходе в аналитический период развития механики (промышленная революция XVIII в. и развитие крупной машинной промышленности XIX в.) исследование распространяется на случай сил более общего вида, чем просто сила тяжести. В рассмотрение вводятся **силы притяжения, зависящие от расстояния от притягивающего центра, аналогичные силы отталкивания, а также силы притяжения или отталкивания, обусловленные одновременным действием нескольких различных центров.**

В качестве источника подобного рода концепций должна быть в первую очередь указана система механического естествознания Ньютона, а также влияние на механику со стороны усложняющейся техники эпохи промышленной революции.

Первым существенным вкладом в развитие того направления механики, в котором в основу полагался **локально-вариационный принцип отбора истинных состояний равновесия** (а также и истинных состояний движения), явились в XVIII в. результаты **Мопертюи и Эйлера.**

Принцип наименьшего действия у Мопертюи

Пьер Луи Моро де Мопертюи (1698-1759) принадлежал к числу выдающихся естествоиспытателей XVIII в.

Он явился инициатором **градусного измерения Земли** предпринятого Парижской Академии Наук с целью разрешения спора между **ньютонианцам**, утверждавшими что *Земля имеет форму сплюснутого вдоль Полярной оси эллипсоида вращения*, и **картезианцами**, считавшими что *Земля представляет собой вытянутые вдоль Полярной оси эллипсоид вращения*.

Возглавляемые Мопертюи измерения дуги меридиана в Лапландии **подтвердили теорию Ньютона**, хотя в области собственной механики Мопертюи не проявил приверженности к системе ньютонианской механики.

Мопертюи был членом Парижской Академии Наук и затем - **президентом Берлинской Академии Наук**. Кроме того, он числился почётным членом Петербургской Академии Наук с 1738 г.

Пьер Луи де Мопертюи (1698-1759)



В работе Мопертюи "**Закон покоя**", которая была доложена Парижской Академии Наук в **1740 г.**, он формулирует найденные им априорном путём общей "**закон покоя**" который сводится к следующему утверждению.

Для того чтобы наблюдалось **равновесие системы нескольких тел, притягивающихся к некоторым центрам силами, пропорциональными n -й степени расстояния соответствующего тела до центра,** необходимо, чтобы "**сумма сил покоя**" была бы **максимальной или минимальной .**

Под "**суммой сил покоя**" автор понимает *сумму произведений каждой массы на интенсивность силы и на $(n + 1)$ -ю степень расстояния каждой точки до соответствующего центра сил.*

Схема, которую имеет здесь в виду автор, носит характер смешанный из астрономических и технических элементов. Именно из ньютоновской гравитационной астрономии здесь взята *идея центров, притягивающих с силой, пропорциональной некоторым степеням расстояния*, тогда как идея о том, что *каждая точка притягивается лишь к соответствующему ей центру и что этот центр не действует на прочие точки системы, явно взята из техники.*

Таким образом, математическая запись "закона покоя" Мопертюи представляет собой **равенство нулю полного дифференциала от "суммы покоя"** (это условие Мопертюи считает условием **максимума или минимума**).

В "добавлении" к статье он пытается обобщить свой "закон покоя" на случай сил являющихся некоторыми функциями расстояний центра до притягиваемой точки. "Сумма сил покоя" в этом случае несколько видоизменяется.

В 1744г. П. Мопертюи, человек, вставший в конце концов на позиции ортодоксальной религиозности, сформулировал принцип наименьшего действия. Он возвел его в ранг наиболее **общих законов природы**, управляющих физическими явлениями и **находящих свое основание в бесконечной мудрости «творца» и целесообразности устройства вселенной.**

В 1746 г. Мопертюи объявил об **универсальном законе движения и равновесия — принципе наименьшего количества действия.** Термин «количество действия» понимается им в смысле «деятельности» и измеряется произведением mvs , где m — масса, v — скорость, s — путь, пробегаемый телом. Для движения $mvs = minimum$, а в случае равновесия положение тела таково, что когда ему сообщено малое движение, то произведенное этим количество действия оказывается **минимальным.** Универсальный характер принципа доказывается Мопертюи с помощью аргументов теологического характера. Для обоснования универсального характера своего принципа Мопертюи **аргументирует также мудростью творца и целесообразностью природы**, так ярко, по его мнению, проявляющейся в строении растений и животных, в движении небесных тел.

Принцип наименьшего действия Мопертюи

- Вариационный принцип наименьшего действия был введен в 1744 г. в работах астронома и механика **П. Мопертюи**. Он считал, что **количество действия в механических, оптических и некоторых других явлениях природы расходуеться минимально**.
 - Мерой действия, по Мопертюи, была **сумма произведений количеств движения частиц на элементы пройденных расстояний**.
 - **Действие**, по Мопертюи, должно быть **минимальным в истинных движениях по сравнению с кинематически возможными**;
- (Мопертюи не смог придать более общую форму своему вариационному принципу)

Мопертюи затрагивает **вопрос о локально-вариационном принципе отбора истинных состояний равновесия** в другой статье, которая была доложена Берлинской Академии Наук **1746** г. под названием "Законы движения и покоя выведенные из метафизического принципа".

Тесное отношение к этим работам Мопертюи имеют две статьи **маркиза де Куртиврона**: "Исследования в статике и в динамике, где даётся новый общий принцип для рассмотрения тел, подверженных действию сил, изменяющихся по произвольному закону" (1748-1749 гг.)

Обратимся к некоторым работам **Леонарда Эйлера**, в которых впервые было дано **аналитическое выражение локально-вариационного принципа отбора состояний равновесия системы материальных точек**, охватившее в единый вполне отчетливой концепции кустарные и недостаточно отчётливые попытки Мопертюи и Куртиврона.

Исходя из этих довольно специальных применений принципа, Мопертюи придавал универсальное значение этому закону, более того, он извлекал отсюда новое доказательство существования бога.

Природа, рассуждал Мопертюи, при совершении своих действий избирает всегда наиболее простые пути, что наилучшим образом подтверждает существование бога, который мудро управляет Вселенной и совершающимися в ней изменениями.

Как правильно отмечает Даламбер, там, где речь идет просто об изменении скорости тел при ударе, Мопертюи говорит не иначе как «об изменении в природе»; там, где речь идет об экстремальности некоторой количественной характеристики при ударе тел, Мопертюи говорит о том, что природа действует всегда по самому простому пути.

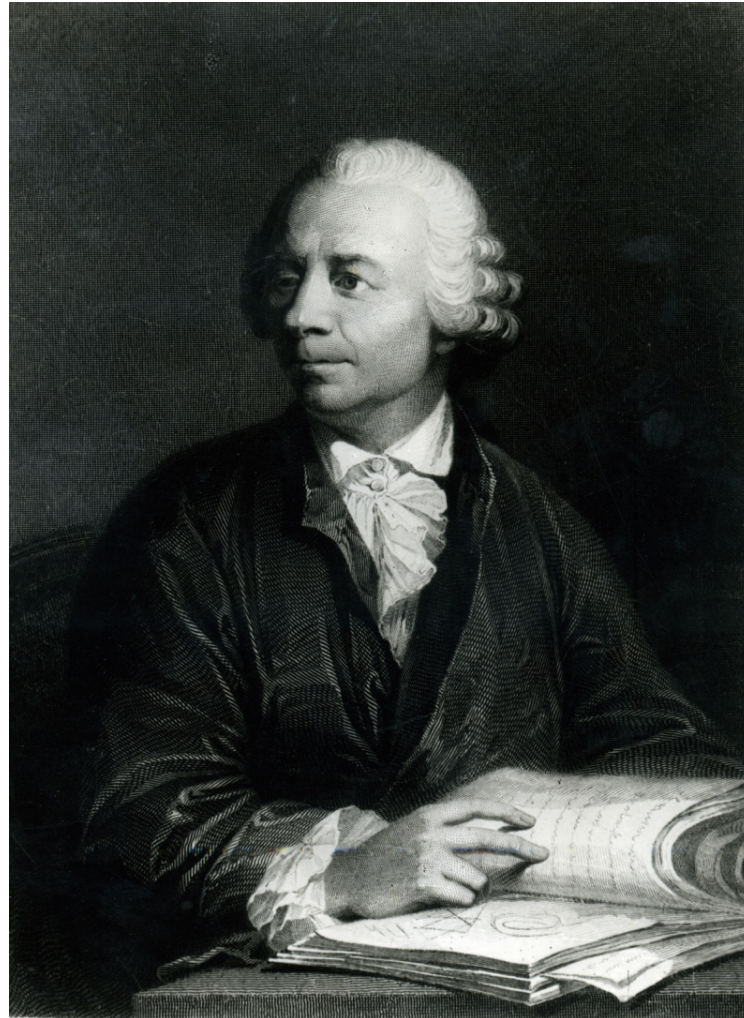
Против теологического толкования механических законов и результатов Мопертюи выступило много ученых: механиков, математиков, философов и публицистов.

В дискуссии приняли участие **Дарси, Кёниг, Куртиврон, Эйлер, Даламбер.**

Вольтер зло высмеивал президента академии наук — Мопертюи, критикуя его принцип и особенно «доказательство» существования Бога на основе законов механики.

Заслуга аналитического оформления принципа наименьшего действия, новой записи выражения действия, правильного понимания принципа и его новых приложений принадлежала **Л. Эйлеру**, благодаря которому этот закон механики получил признание.

Леонард Эйлер (1707-1783)

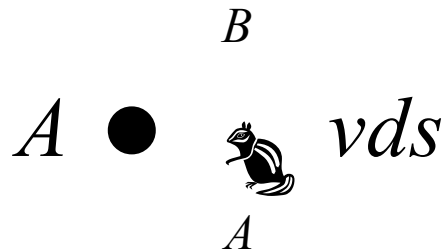


В одном из писем 1741 г. Д.Бернулли спрашивал Эйлера, может ли он решить проблему *центральных сил методом изопериметров*. Эйлер нашел решение этой задачи и в **1744 г.** оно было опубликовано им в *Приложении «Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов»* к знаменитой книге **«Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле»**.

Эйлеру принадлежит исторически *первая отчетливая идея математического содержания*, которое вкладывается наукой в принцип наименьшего действия. Именно Эйлер показал, что для траекторий, описываемых под действием центральных сил, интеграл $\int v ds$, где v — скорость, всегда равен минимуму или максимуму. Эйлер не дал этому выражению какого-либо специального наименования.

Принцип наименьшего действия у Эйлера

- По-Эйлеру это был принцип отбора истинной траектории материальной точки из совокупности сравнимых возможных траекторий. Критерием истинной траектории по сравнению с допустимыми было минимальное значение действия:



где v - скорость движения точки по дуге AB , s - перемещение точки по дуге.

Математическое выражение, называемое принципом наименьшего действия, у Эйлера вытекало из его работ по отысканию кривых, обладающих экстремальными свойствами.

Однако, если геометрическая задача блестяще решалась «методом изопериметров», то в случае механического движения приходилось ограничиваться решением уже решенных задач, так как указать из общих соображений, какая именно величина в том или ином случае будет иметь максимум и минимум, не удавалось. Это ограничивало сферу применения принципа наименьшего действия у Эйлера.

Еще одно ограничение универсальности его характера явствовало из того, что у Эйлера он органически связан с **законом живых сил** и имеет место только там, где применим последний.

Из выражения $\int v ds = \int v^2 dt$ видно, как заключает Эйлер, откликаясь на споры о мере движения, что «. . . ни те, кто полагает, что силы следует оценивать по самим скоростям, ни те, кто — по квадратам скоростей, не найдут здесь ничего неприемлемого».

Этим замечанием Эйлера в неявном виде формулируется ограничение области применения принципа наименьшего действия кругом проблем, в которых силы имеют потенциал.

Работа Эйлера делает совершенно незначительной роль Мопертюи, которому, по существу говоря, принадлежит только название принципа, да и то не слишком удачное.

Мопертюи сам пишет : *«Этот великий геометр (Л. Эйлер) не только обосновал принцип более основательно, чем это сделал я, но его взор, более объемлющий и более проникновенный, чем мой, привел его к открытию следствий, которых я не извлек».*

Возможно также, что неоднократное подчеркивание Эйлером приоритета Мопертюи обусловлено в какой-то мере и его дружескими чувствами к президенту Берлинской Академии.

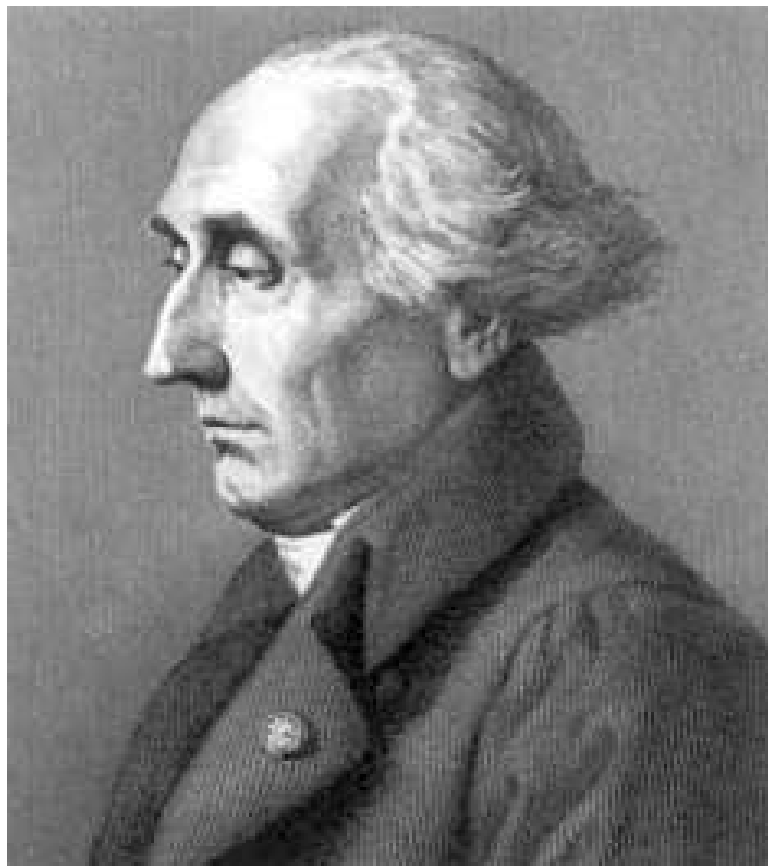
Принцип наименьшего действия у Лагранжа

Лагранж занимает в истории механики чрезвычайно важное место.

Он сам в предисловии к своей **«Аналитической механике»** говорит :
«.. .план этого сочинения совершенно новый. Я имел в виду свести всю теорию механики и методы решения связанных с ней задач к общим формулам, простое развитие которых дает все необходимые для решения каждой задачи уравнения».

В **1760—1761** гг. в «Miscellanea Taurinensia», т. 2, Лагранж опубликовал статью под названием **«Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных выражений»** (Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies).

Ж.Л.Лагранж (1736-1813)



Принцип наименьшего действия у Лагранжа

Лагранж ссылается на результаты Эйлера, который показал, что для случая движения в поле центральной силы траектория, по которой движется точка, удовлетворяет требованию

$$\int v ds = \textit{minimum}.$$

Лагранж обобщает этот принцип и придает ему вид

$$\sum m_i \int v_i ds_i = \textit{minimum}.$$

Это определение и выражает тот шаг вперед, который совершил Лагранж в развитии принципа наименьшего действия. Он **распространил принцип, сформулированный у Эйлера для материальной точки, на случай произвольной системы точек, связанных между собой и действующих друг на друга совершенно произвольным образом.**

Таким образом, оказывается возможным применить принцип наименьшего действия к **динамике системы**.

Действительно, пользуясь принципом наименьшего действия, Лагранж в своем мемуаре аналитически решает ряд проблем динамики.

Таким образом, уже в самом начале исследования вводится как **необходимое условие принцип живых сил**.

Этим предрешается и круг задач, рассматриваемых Лагранжем в его сочинении.

Само заглавие этой работы подчеркивает сугубо математический характер этого сочинения Лагранжа.

Действительно, в нем не затрагивается ни одна из проблем, связанных с обоснованием механики. В этой работе проблемы механики представляют собой лишь определенный класс задач вариационного исчисления.

В своей «Аналитической механике» Лагранж говорит, что он называет этот принцип «принципом наименьшего действия, по аналогии с принципом, который Мопертюи дал под этим названием».

Однако, основываясь на том, что

$$\int dt \sum mv^2 = \sum m \int v ds,$$

Лагранж в «Аналитической механике» ставит вопрос о **физическом смысле принципа наименьшего действия**.

Он отнюдь не так безразличен к физической стороне механических проблем; область применения принципа заключается в конкретизации закона живых сил.

Лагранж увязывает это толкование с установленным им ранее фактом из статики, что в случае равновесия живая сила всегда максимальна или минимальна.

По существу он рассматривает системы, для которых действителен закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(x, y, z) = H,$$

это утверждение выражает тот факт, что в случае равновесия потенциальная энергия имеет всегда соответственно минимум или максимум.

(Но минимум в случае положения равновесия и в случае движения имеет место в совершенно различном смысле).

Принцип наименьшего действия

- Лагранж ввел величину действия для материальной системы, суммируя (интегрируя) величину действия, введенную Эйлером, для всех точек (частиц) системы:

The diagram illustrates the principle of least action. It shows a particle moving from point A to point B. The action is defined as the integral of the Lagrangian $L = T - V$ over the path. The diagram includes symbols for mass m , velocity v , displacement ds , and time intervals t_A and t_B .

$$A \bullet \quad B \quad t_B \quad t_B$$
$$v ds \quad m_i v_i^2 dt \quad \bullet \quad 2T dt$$
$$i \quad A \quad i \quad t_A \quad t_A$$
$$\text{Martini glass} \quad m \quad \bullet$$

где T - кинетическая энергия системы.

Принцип наименьшего действия

- Лагранж, утверждает, что истинное движение системы отличается от ее возможных движений, тем, что вариация действия для истинного движения равна нулю.

Принцип наименьшего действия

- Лагранж сумел вывести этот принцип из общей формулы динамики.
- **Класс сравнимых движений при варьировании переменных характеризуется изоэнергетичностью: не только для каждого «окольного пути» выполняется интеграл энергии, но постоянная полной энергии h сохраняет свою арифметическую величину для всех сравнимых движений.**

Выдающийся инженер, механик, математик и историк механики А.Н. Крылов, считал:

- ...Лагранж был прав, что не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волне, и к расчету гребного вала на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электрона в атоме.