

История и методология механики  
Евгений Алексеевич Зайцев  
e\_zaitsev@mail.ru

Лекция № 20

Тема лекции

Развитие динамики твердого тела в трудах Л. Эйлера

## Леонард Эйлер (1707-1783)

Родился 15 апреля 1707 г.

Высшее образование получил в Базеле (Швейцария).

Учителя – И.Бернулли и Я.Герман. 1722 – звание бакалавра.

1724 – магистерская диссертация (сравнение натуральной философии Декарта и Ньютона)

1727 – защита диссертации о распространении звука.

1727 – приглашение в Петербург

1733 – 1741 профессор и академик, глава кафедры высшей математики

1741 – переезд в Берлин, директор физ.-мат. класса Академии наук (президент с 1759-66).

1766 – возвращение в Петербург

Умер 18 сентября 1783.



## Механика Эйлера

Первый трактат : «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736).

Основная тема – динамика точки. Лагранж квалифицировал этот трактат как «первое большое произведение», в котором (математический) анализ был применен к науке о движении».

Динамике точки посвящены также 6 первых глав «Теории движения твердых тел» (1765).

### Эйлер о роли математического анализа

Начинает с критики геометрического метода, развитого в XVII в. (Галилей, Гюйгенс, Ньютон), которому противопоставляет аналитические методы Лейбница.

«Однако если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом».

## Механика Эйлера

«Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с „Принципами“ Ньютона и „Форономией“ Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог.

И вот тогда-то, я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса.

Затем таким же образом я исследовал и другие работы, относящиеся к этой науке, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их планомерным и однообразным методом и привел их в удобный порядок.

При этих занятиях я не только встретился с целым рядом вопросов, ранее совершенно незатронутых, которые я удачно разрешил, но я нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, по-видимому, в значительной степени обогатился». (с.32-33)

## Математический анализ в механике Эйлера

Эйлер поставил задачу: создать аналог ньютоновской механики, используя язык исчисления бесконечно малых, созданный оппонентом Ньютона – Лейбницем.

Лейбниц называл созданное им исчисление *cogitatio caeca* – «рассуждение, которое ведется вслепую», имея в виду, что оно базируется на механическом (автоматическом) применении правил оперирования символами.

Этим исчисление бесконечно малых Лейбница отличается от геометрической теории Ньютона, в которой для каждой задачи приходится придумывать отдельное решение (о чем и сетует Эйлер).

При изложении законов механики Эйлер использует введенное им понятие функции. Под функцией Эйлер понимал «аналитическое выражение», состоящее из переменных и констант. Кроме обычных функций Эйлер рассматривал параметрические функции и неявно определенные функции.

Эйлер был убежден, что все аналитические выражения могут быть заданы в виде бесконечных степенных рядов или обобщенных степенных рядов с дробными или отрицательными показателями.

## Механика Эйлер и механика Ньютон (постановка проблемы)

Э. Мах писал: «Принципов Ньютона *достаточно*, чтобы без привлечения какого-нибудь нового принципа рассмотреть каждый практически возможный случай механики, будь то из области статики или динамики. Если при этом возникают затруднения, то это всегда только затруднения математического (формального), но никогда *не принципиального* характера».

Ряд фактов ставит под сомнение точку зрения Маха...

Сам Ньютон скромнее оценивал свои достижения.

В предисловии к «Началам», перечислив задачи небесной механики, которые ему удалось решить, он заметил:

«Было бы *желательно* вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня *предполагать*, что все эти явления обуславливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел ... стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга.

Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и оставались бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому *более правильному*, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение».

## Механика до Эйлера. Разнообразие принципов

Трудность в развитии механики до сер. XVIII в. состояла в том, что механика строилась на основе нескольких различных принципов, конкурировавших между собой:

- законы Ньютона

Помимо них другими кандидатами в «начала механики» были:

- закон сохранения живой силы (Лейбниц и его последователи),
- принцип Торричелли,
- принцип Даламбера,
- закон рычага,
- принцип виртуальных скоростей (в элементарной версии – для простых машин),
- принцип наименьшего действия (Лейбниц, Мопертюи).

## Ограниченная область применения разных принципов механики

Перечисленные принципы имели общий недостаток. Они не обладали достаточной общностью, но были применимы лишь к определенному виду движений.

Их область применения (включая законы Ньютона) ограничивалась движением т.н. «центроидов» – тел, движение которых можно свести к движению одной «репрезентативной точки».

В небесной динамике предпочтительным центроидом был центр масс. В составном (физическом) маятнике – «центр колебаний». В упругом столкновении – «центр удара», то есть, мгновенный центр нулевой скорости.

Для анализа движения протяженных (т.е. непрерывных) объектов – т.е. твердых тел и жидкостей – ни один из этих принципов не мог дать корректного математического описания движения в условиях, когда на точки тела действуют определенные силы.

## Задача, которую поставил Эйлер

Эйлер понимал этот факт. Он писал:

«Эти принципы непригодны для исследования движений тел, которые не являются бесконечно малыми....

Ими можно пользоваться, если сведение тела к точке не ведет к грубым ошибкам: так можно поступать, когда линия действия силы проходит через центр тяжести ....

Если же линия силы не проходит через центр тяжести, то мы не можем определить в полной мере результат действия этой силы.

Это тем более верно, когда движимое тело несвободно, т.е. связано некоторым препятствием, зависящим от его формы».

«Рассуждение о наилучшей конструкции кабестана» (1745)

## Основные результаты Эйлера в теории движения твердого тела

- Понятие момента импульса (angular momentum) и закон его изменения
- Формула для вращения твердого тела
- Представление о том, что (мгновенное) движение твердого тела складывается из поступательного и вращательного.

# Основные результаты Эйлера в теории движения твердого тела

- **After Newton**
- Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, and Patrick d'Arcy all understood angular momentum in terms of conservation of areal velocity, a result of their analysis of Kepler's second law of planetary motion. It is unlikely that they realized the implications for ordinary rotating matter. [11]
- In 1736 Euler, like Newton, touched on some of the equations of angular momentum in his *Mechanica without further developing them.* [12]
- Bernoulli wrote in a 1744 letter of a "moment of rotational motion", possibly the first conception of angular momentum as we now understand it. [13]
- In 1799, Pierre-Simon Laplace first realized that a fixed plane was associated with rotation—his *invariable plane.*
- Louis Poinsot in 1803 began representing rotations as a line segment perpendicular to the rotation, and elaborated on the "conservation of moments".
- In 1852 Léon Foucault used a gyroscope in an experiment to display the Earth's rotation.
- William J. M. Rankine's 1858 *Manual of Applied Mechanics* defined angular momentum in the modern sense for the first time:

Проблема: Второй закон Ньютона и закон Эйлера вращения твердого тела

Ньютон, вероятно, понимал, что его законы недостаточны для решения вопросов, связанных с движением реальных, а не точечных масс. Об этом свидетельствует отсутствие в его работах задач механики твердого тела.

Вопрос: что препятствует распространению принципов Ньютона на движение твердых тел? Сравним законы, относящиеся к поступательному движению точечной массы и к вращению тела вокруг оси.

Второй закон Ньютона для поступательного движения точечной массы: ускорение тела под действием силы пропорционально величине силы и обратно пропорционально массе тела:

$$a = F/m \quad (1)$$

Закон Эйлера (аналог второго закона Ньютона для вращательного движения):

$$\alpha = M/I \quad (2)$$

$\alpha$  – угловое ускорение;  $M$  – момент силы;  $I$  – момент инерции тела.

Очевидно, что в случае вращения точечной массы  $m$  вокруг оси (2) выводится из (1). Достаточно сделать замену.

$$\alpha = a/r$$

$$M = Fr$$

$$I = mr^2, \text{ где } r \text{ – радиус вращения.}$$

Вывод остается в силе для системы, состоящей из конечной совокупности точечных масс.

# Закон Ньютона и закон Эйлера (момента количества движения для твердого тела)

## Вопрос:

Верно ли, что в случае твердого (непрерывного) тела соотношение (2) может быть выведено из (1)?

Отрицательный ответ – Клиффорд Трусделл (1919-2000). Статьи :

«A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason»

«Whence the Law of Moment of Momentum?» «Откуда взялся закон момента количества движения?»

в сборнике: Truesdell C., Essays in the History of Mechanics (1968) (Dropbox)

## Основной вывод:

Закон Эйлера – самостоятельный закон, не выводимый из закона Ньютона.

Трусделл: При решении задачи о движении твердого тела, Эйлер расширил список фундаментальных принципов механики.

Заслуга Эйлера не ограничивается приданием механике Ньютона аналитической формы.

Ответа на вопрос Трусделла с т. зрения механики сплошной среды дан в статье:

«Thence the Moment of Momentum» (2020) [Wolfgang H. Müller](#), [Wilhelm Rickert](#), [Elena N. Vilchevskaya](#) (в интернете)

## Рождение аналитической механики

Основной вопрос: где родилась аналитическая механика?

На Земле при решении практических задач?

или

На Небе при решении задач астрономии?

Прецессия, нутация, либрация – все эти движения связаны с механикой движения твердого тела (Земли, Луны)

Возможная подсказка И.Б. Погребысского: в XIX веке аналитическая механика начинает спускаться с небес на землю.

Этот вопрос прямо относится к Эйлеру, как одному из родоначальников аналитической механики.

А также к Лагранжу ...

# Хронология идей (работ) Л.Эйлера по теории движения твердого тела. На Земле: «Морская наука» (1741/49)

Трактат ознаменовал поворотный момент в развитии механики.

В нем впервые даны:

- набросок теории движения твердого тела в пространстве
- формулировка закона изменения момента импульса
- формулировка тезиса, что в твердом теле поступательное движение центра масс и вращательное движение вокруг оси, проходящей через этот центр, независимы друг от друга.

Хронология идей (работ) Л.Эйлера по теории движения твердого тела.

Вариант на Земле: «Морская наука» (1741/49)

## Предыстория

К моменту написания трактата Эйлер уже знал, что твердые тела могут одновременно совершать два движения – поступательное движение центра масс и вращение вокруг оси, проходящей через центр масс.

1727 - Эйлер представил работу на конкурс, объявленный Парижской академией, о наилучшем способе размещения мачт на корабле.

Одна из проблем, с которой столкнулся Эйлер, заключалась в определении того, насколько горизонтальная сила ветра заставляет нос корабля опускаться:

«из опыта известно, что когда ветер движет корабль [...], действуют две силы: одна заставляет его двигаться, другая стремится погрузить его нос».

«Из опыта известно»: при подготовке этой работы Эйлер экспериментировал, используя масштабные модели кораблей.

Начало теории движения твердого тела у Эйлера, похоже, земное...

## Хронология идей (работ) Л.Эйлера по теории движения твердого тела. «Морская наука» (1741/49)

Во введении Эйлер пишет, что движение корабля можно представить как сочетание поступательного и вращательного движения. Зная законы движения для описания поступательного (прямолинейного) движения и вращательного движения вокруг данной оси, можно, в принципе, определить всё движение корабля.

Сначала Эйлер решает проблему определения движения системы точечных масс, приходя к выводу, что вся система ведет себя так, как если бы ее масса была сосредоточена в центре масс. Поступательное движение подчиняется второму закону Ньютона (Эйлер основывал на нём свою «Механику» 1736 г.):

$$F = M \frac{dv}{dt} , \tag{1}$$

где  $M$  — полная масса системы точечных масс, а  $F$  и  $v$  — результирующие внешних сил и скорость центра масс вдоль заданного направления.

## Хронология идей (работ) Л.Эйлера по теории движения твердого тела. «Морская наука» (1741/49)

Далее Эйлер приступает к описанию вращательного движения. Он утверждает, что если твердое тело, на которое действуют произвольные силы, движется по прямой линии и одновременно вращается, то поступательное движение, каким бы оно ни было, не влияет на вращательное движение.

Для исследования вращательного движения можно предположить, что центр тяжести тела находится в состоянии покоя.

Эйлер: Если закон, управляющий прямолинейным движением, задается уравнением (1), то вращательное движение «будет **определяться точно так же**, как и движение тела, на которое действует сила вдоль прямой линии», согласно следующему закону:

$$Fr = I \frac{d\omega}{dt} \tag{2}$$

где  $I$  — момент инерции тела относительно оси вращения,  $\omega$  — угловая скорость,  $M = Fr$  — момент всех сил, производящих вращение.

Роль аналогий в развитии науки вообще и механики, в частности...

## Хронология идей (работ) Л.Эйлера по теории движения твердого тела. Вариант на Небе. «Открытие нового принципа механик» (1750/52)

Проблеме движения корабля Эйлер посвятил много времени и сил.

Однако, в то время существовала и другая, фундаментальная астрономическая проблема: прецессия равноденствий.

Параллельно с Эйлером к ней подошёл Даламбер в трактате «Исследованиях прецессии равноденствий» (1750). С работой Даламбера Эйлер был хорошо знаком.

В 1750 году Эйлер представил в Берлинской академии рукопись под названием «Открытие нового принципа механики», в которой он сформулировал первую версию уравнений, носящих его имя, — «уравнений Эйлера» (опубликовано в 1752).

Он начинает с «определения движения в целом, на которое способно твердое тело, пока его центр тяжести остается в покое». Далее Эйлер вводит идею мгновенной оси вращения.

Фактически, эта идея уже была использована Даламбером для движения Земли, но именно Эйлер в общем виде доказывает ее существование.

Хронология идей (работ) Л.Эйлера по теории движения твердого тела.  
«Открытие нового принципа механик» (1750/52)

Эйлер:

«Предположим, что центр тяжести любого твердого тела находится в состоянии покоя...

Далее я покажу, что независимо от движения такого тела не только центр тяжести останется в покое, но и будет существовать бесконечное множество точек, расположенных вдоль прямой линии, проходящей через центр тяжести, которые также окажутся неподвижными.

То есть, независимо от движения тела, в каждый момент времени будет происходить вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести».

Эйлер, 1752 (с. 188).

## «Новый метод определения движений твердых тел» (1776)

Окончательная формулировка законов движения твердого тела:

$$\text{I. } \int dM \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) = iP$$

$$\text{IV. } \int zdM \left( \frac{ddy}{dt^2} \right) - \int ydM \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) = iS$$

$$\text{II. } \int dM \left( \frac{ddy}{dt^2} \right) = iQ$$

$$\text{V. } \int xdM \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) - \int zdM \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) = iT$$

$$\text{III. } \int dM \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) = iR$$

$$\text{VI. } \int ydM \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) - \int zdM \left( \frac{ddy}{dt^2} \right) = iU$$

где  $dM$  — бесконечно малый элемент массы тела;  $x, y, z$  — положение тела в декартовых координатах;  $P, Q, R$  — результирующая внешних сил в каждом из направлений осей;  $i$  — константа, выбираемая в зависимости от используемых единиц измерения; и  $S, T, U$  — моменты сил относительно  $x, y, z$ . В этих уравнениях Эйлер не придает векторного характера  $S, T, U$ .

Главный вклад Эйлера в его «Новом методе» заключается в том, что он сформулировал эти уравнения как общие законы, независимо от конкретной задачи, т. е. что они справедливы для всех тел и видов движения.

Не удовлетворенный чистой аналитикой, Эйлер сделал попытку геометрической интерпретации своих уравнений. Она оказалась неудачной (Эйлер к этому моменту практически ослеп). Задача была решена Л. Пуансо в «Новой теории вращения тел» (1834, 1851). Здесь Пуансо дал векторное определение момента импульса.