История и методология механики

Лекция № 20

Евгений Алексеевич Зайцев
e_zaitsev@mail.ru

Тема лекции

Развитие динамики материальной точки в трудах Л. Эйлера

Возникновение аналитической механики

Две вехи в истории аналитической механики – формирование двух важнейших общих понятий

1. Понятие возможного перемещения и его использование в статике и динамике (см. лекцию 18).

2. Понятие момента импульса и формулировка закона момента импульса – аналог 2-го закона Ньютона для движения системы точек и твердого тела

Классическая механика Ньютона и аналитическая механика
Постановка проблемы

Распространенная точка зрении

«Принципов Ньютона *достаточно*, чтобы без привлечения какого-нибудь нового принципа рассмотреть каждый практически возможный случай механики, будь то из области статики или динамики.

Если при этом возникают затруднения, то это всегда только затруднения математического (формального), но никогда *не принципиального* характера».

Э. Мах «Механика. Историко-критический очерк ее развития» (1883).

Ряд фактов ставит этот тезис под сомнение…

Классическая механика Ньютона и аналитическая механика
Постановка проблемы

Сам Ньютон скромнее оценивал свои достижения. В предисловии к «Началам», перечислив задачи небесной механики, которые ему удалось решить, он пишет:

«Было бы *желательно* (!) вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел … стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга.

Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и оставались бесплодными.

Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому *более правильному* (!), изложенные здесь основания доставят некоторое освещение».

Второй закон Ньютона и закон момента импульса

По-видимому, Ньютон понимал, что законы механики, которые он сформулировал, недостаточны для решения вопросов, связанных с движением реальных, а не точечных масс.

Об этом свидетельствует отсутствие в его работах типичных для механики твердого тела задач таких, как качание физического маятника или качение колеса.

Вопрос: что препятствовало распространению принципов Ньютона на движение твердых тел?

Рассмотрим два закона механики, относящиеся, соответственно, к поступательному движению точечной массы и вращению тела вокруг оси.

Одна из проблем: Второй закон Ньютона и закон моментов количеств движения

Второй закон Ньютона для точечной массы: ускорение пропорционально величине силы и обратно пропорционально массе тела:

$$a = F / m \qquad (1)$$

Закон моментов количеств движения для вращения:

$$\alpha = M / I \qquad (2)$$

α – угловое ускорение; M – момент силы; I – момент инерции.

В частном случае вращения точечной массы m вокруг оси (2) выводится из (1). Достаточно сделать замену:

$\alpha = a / r$

M = Fr

$I = mr^2$, где r – радиус вращения.

Вывод остается в силе для системы, состоящей из конечной совокупности точечных масс.

Закон Ньютона и закон Эйлера (момента количества движения для твердого тела)

Вопрос:

Верно ли, что в случае твердого (непрерывного) тела соотношение (2) может быть выведено из (1)?

Отрицательный ответ – Клиффорд Трусделл (1919-2000). Статьи :

«A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason»

«Whence the Law of Moment of Momentum?» «Откуда взялся закон момента количества движения?»

в сборнике: Truesdell C., Essays in the History of Mechanics (1968) (Dropbox)

Основной вывод:

Закон Эйлера – самостоятельный закон, не выводимый из закона Ньютона. Трусделл: При решении задачи о движении твердого тела, Эйлер расширил список фундаментальных принципов механики.

Заслуга Эйлера не ограничивается приданием механике Ньютона аналитической формы.

Ответа на вопрос Трусделла с т. зрения механики сплошной среды дан в статье:

«Thence the Moment of Momentum» (2020) Wolfgang H. Müller, Wilhelm Rickert, Elena N. Vilchevskaya (в интернете)

Задача, поставленная Эйлером. Необходимость нового принципа.

Когда Эйлер приступил к исследованию механического движения, кроме законов Ньютона было еще несколько кандидатов на роль всеобщих принципов механики.

Это – закон сохранения кинетической энергии, принцип Торричелли, усеченные варианты закона виртуальных скоростей ….

Проблема состояла в том, что ни один из этих принципов не обладал достаточной степенью общности.

Эйлер отмечал этот факт:

«Эти принципы непригодны для исследования движений тел, которые не являются бесконечно малыми…. Ими можно пользоваться, если сведение тела к точке не ведет к грубым ошибкам: так можно поступать, когда линия действия силы проходит через центр тяжести …. Если же линия силы не проходит через центр тяжести, то мы не можем определить в полной мере результат действия этой силы. Это тем более верно, когда движимое тело несвободно, т.е. связано некоторым препятствием, зависящим от его формы»

«Рассуждение о наилучшей конструкции кабестана» (1745)

Закон сохранения момента количества движения в аналитической механике
Основные вехи. Вопрос об истоках

1717 – первое аналитическое доказательство закона площадей (Яков Германн).

1740 –е гг. несколькими учеными получено обобщение закона площадей при решении задачи о движении тел на движущихся поверхностях.

1. Иоганн и Даниил Бернулли: движущаяся поверхность – наклонная плоскость

2. Д. Бернулли – задача о движении шарика во вращающейся трубке.

Письма к Эйлеру и трактат «Новая задача механики» (1745). В этой задаче появляется также принцип возможных перемещений.

3. Алекси Клод Клеро

4. Л. Эйлер «О движении тел по подвижным поверхностям» (1746)

5. Патрик Дарси – теоретик и практик-артиллерист, изучал и небесную механику (теорию Луны). Обобщенный закон площадей для движения системы материальных точек вокруг неподвижного центра («Динамическая задача», 1752)

Подробности см. И.Б. Погребысский, «Аналитическая механика, XVII в.» / История механики с древнейших времен … (1971) и «От Лагранжа до Эйнштейна»

Леонард Эйлер (1707-1783

Родился 15 апреля 1707 г.

Высшее образование получил в Базеле (Швейцария).

Учителя – И.Бернулли и Я.Герман

1722 – звание бакалавра

1724 – магистерская диссертация (сравнение натуральной философии Декарта и Ньютона)

1727 – защита диссертации о распространении звука

1727 – приглашение в Петербург

1733 – 1741 профессор и академик, глава кафедры высшей математики

1741 – переезд в Берлин, директор физ.-мат. класса Академии наук (президент с 1759-66)

1766 – возвращение в Петербург

Умер 18 сентября1883

Механика Эйлера

Первый трактат : «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736).

Основная тема – динамика точки. Лагранж квалифицировал этот трактат как «первое большое произведение», в котором (математический) анализ был применен к науке о движении».

Динамике точки посвящены также 6 первых глав «Теории движения твердых тел» (1765).

Эйлер о роли математического анализа

Начинает с критики геометрического метода, развитого в XVII в. (Галилей, Гюйгенс, Ньютон), которому противопоставляет аналитические методы Лейбница.

«Однако если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом».

Механика Эйлера

«Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с „Принципами" Ньютона и „Форономией" Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог.

И вот тогда-то, я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса.

Затем таким же образом я исследовал и другие работы, относящиеся к этой науке, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их планомерным и однообразным методом и привел их в удобный порядок.

При этих занятиях я не только встретился с целым рядом вопросов, ранее совершенно незатронутых, которые я удачно разрешил, но я нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, по-видимому, в значительной степени обогатился». (с.32-33)

Математический анализ в механике Эйлера

Итак, Эйлер поставил задачу создать аналог ньютоновской механики, используя язык исчисления бесконечно малых, созданный оппонентом Ньютона – Лейбницем.

Характерно, что Лейбниц называл созданное им исчисление *cogitatio caeca* – «рассуждение, которое ведется вслепую», имея ввиду, что оно базируется на механическом (автоматическом) применении правил оперирования символами. Этим исчисление бесконечно малых Лейбница отличается от геометрической теории Ньютона, в которой для каждой задачи приходится придумывать отдельное решение (о чем и сетует в предисловии Эйлер).

При изложении законов механики Эйлер использует введенное им понятие функции. Под функцией Эйлер понимал «аналитическое выражение», состоящее из переменных и констант. Кроме обычных функций Эйлер рассматривал параметрические функции и неявно определенные функции. Эйлер был убежден, что все аналитические выражения могут быть заданы в виде бесконечных степенных рядов или обобщенных степенных рядов с дробными или отрицательными показателями.

Л. Эйлер

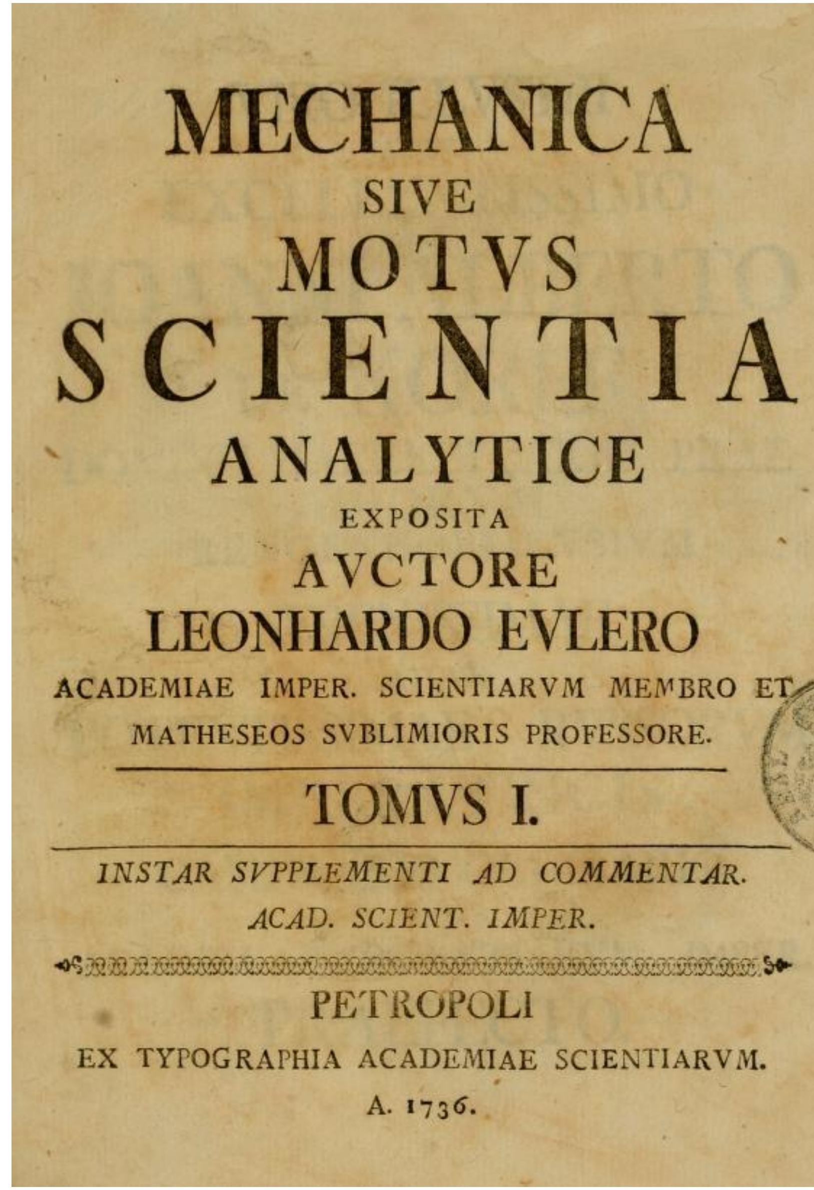
«Механика, или наука о движении, изложенная аналитически». Петербург (1736)

Тема трактата – теория движения материальной точки.

I том – теория движения свободной материальной точки, не стесненной материальными связями или преградами.

II том – теория движения материальной точки, стесненной некоторыми преградами и связями.

Внутри каждого тома однотипное распределение материала по двум частям. В первой части рассматривается движение в отсутствии сил сопротивления среды. Во второй излагается теория движении токи при наличии сил сопротивления.



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

«Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736). План исследования

«Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки.

Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, –

затем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы.

В-третьих, мы будем говорить о телах гибких.

В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие.

В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одно препятствует другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать.

В-шестых, будем рассматривать движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продолжают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т. е. силы» (с.89)

«Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736).

Глава II

«Определение 10.

Сила (potential) есть то усилие (vis), которое переводит тело из состояния покоя в состояние движения или видоизменяет его движение.

Подобного рода усилием, а следовательно, силой является тяжесть; ведь благодаря ей тела по устранению препятствий падают вниз из состояния покоя, и самое движение падения благодаря ей постоянно ускоряется».

Для Эйлера моделью силы является сила тяжесть.

Тяжесть (или вес) может служить мерой других сил. В частности всякая сила может быть уравновешена некоторым весом, например, в пружинном динамометре.

Такой подход к разъяснению понятия силы принят в современных элементарных учебниках физики (например, учебник Г.С. Ландсберга)

«Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736).

Эйлер: Основной принцип механики – закон инерции. Остальные принципы выводятся.

Следствие из определения 10 [закон инерции].

«Всякое тело, предоставленное самому себе, или пребывает в покое или движется равномерно и прямолинейно. Поэтому всякий раз, когда свободное тело, находившееся ранее в покое, начинает двигаться или когда оно продвигается неравномерно или непрямолинейно, причину этого надо приписать какой-нибудь силе: ведь все то, что может вывести тело из его состояния, мы называем силой».

Два других принципа механики – закон ускоряющих си и закон сложения движений, обусловленных одновременно действующими на точку различными силами – Эйлер формулирует в виде теорем.

Определение 11. *Направление силы есть прямая, по которой она стремится двигать тело.*

Так, направление тяжести есть прямая вертикальная линия, ведь по ней стремятся падать тяжелые тела.

Л. Эйлер. «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736)

Определение 12. Абсолютная сила

Абсолютной силой является сила, которая в равной мере действует как на движущееся, так и на находящееся в покое тело.

Такой абсолютной силой является сила тяжести, которая, — движутся ли тела или пребывают в покое,— в равной мере влечет их книзу.

Следствие. Если, таким образом, мы знаем действие абсолютной силы на тело, находящееся в покое, то мы так же точно знаем ее действие на тело, как угодно движущееся.

Л. Эйлер. «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736)

Определение 13. Относительная сила.

Относительной силой является та, которая иначе действует на тело, находящееся в покое, чем на тело движущееся.

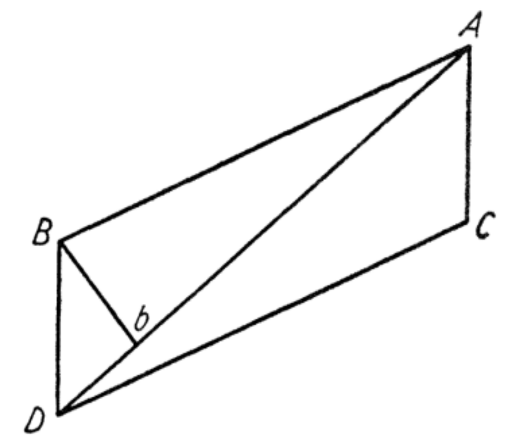
Подобного рода силой является сила течения реки, увлекающего с собою тело. Чем скорее движется тело, тем меньше будет по отношению к нему сила течения, и она вообще исчезнет, если тело достигнет той же самой скорости, которую имеет течение.

Следствие 1. Таким образом, если дана скорость тела вместе с законом относительной силы, то можно будет найти величину силы, которая действует на тело. И ее можно будет рассматривать как силу абсолютную до тех пор, пока тело будет иметь одну и ту же скорость; ее действие в этом случае можно определить, как определяется вообще действие абсолютных сил. Определить величину относительной силы по отношению к телу, движущемуся с данной скоростью, есть не что иное, как указать абсолютную силу, в этом случае ей эквивалентную.

По данному действию абсолютной силы на точку, находящуюся в покое, требуется найти действие той же силы на ту же точку, но движущуюся каким-либо образом.

Решение

Пусть точка, находящаяся в *A*, движется со скоростью *c* по направлению *AB,* а направление действующей на нее силы пусть будет *AC.* Возьмем какой-либо элемент времени *dt,* и пусть за этот промежуточек времени точка *A*, если бы она находилась в состоянии покоя в *A,* продвинулась бы на отрезочек *AC,* который мы назовем *dz,* так что по истечении времени *dt* она уже не будет в *A*, а будет в *C.* Таким образом это движение по *AC* и будет результатом действия силы на точку, находящуюся в покое.



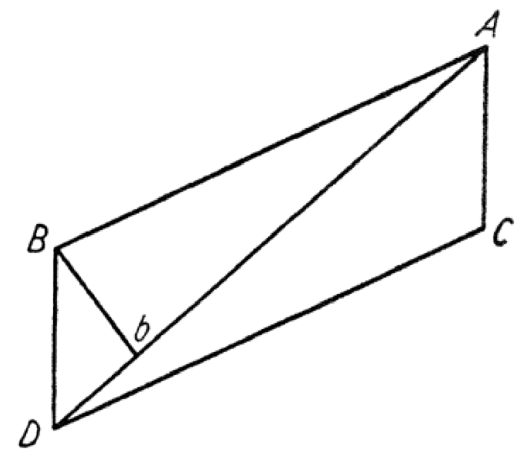
Действие той же силы, которую мы считаем абсолютной, на ту же самую, но движущуюся точку, должно быть равно действию на точку, находящуюся в покое. Отложим в направлении движения точки *A,* которое она имеет по *AB,* отрезок *AB,* который она проходит со своей скоростью *c* за промежуток времени *dt* в том случае, если на нее нет воздействия со стороны какой-либо силы; тогда *AB = cdt*.

Предложение 14. Задача

При действии же силы, по истечении элемента времени *dt,* точка не будет находиться в *B*, но где-либо в другом месте, в *D,* причем действие этой силы, которое должно измеряться отрезком *BD,* т. е. отклонением точки *D* от точки B, будет равно действию той же силы на точку, находящуюся в покое, т. е. равно *AC.*

Таким образом, *BD = AC.*

Кроме того, *BD* будет параллельна *AC,* так как *BD* есть действие силы и потому должно идти по ее направлению, которое не меняется, поскольку длительность промежуточка времени *dt* бесконечно мала. Поэтому точка *A*, обладающая скоростью *c* по направлению *AB* и испытывающая воздействие со стороны абсолютной силы, в конце промежуточка времени *dt* будет находиться не в *B*, а в *D*, причем *BD* равна и параллельна *AC.*



Пути, пройденные за бесконечно малый промежуточек времени, могут рассматриваться как маленькие прямые линии; поэтому надо признать, что точка в течение промежуточка времени *dt* прошла путь *AD*. Ч. И Т.Н.

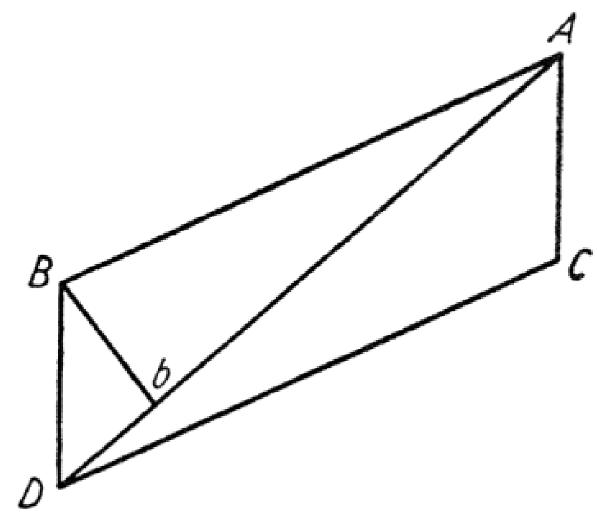
Предложение 14. Задача

<u>Следствие 1</u>. Так как движения на бесконечно малых расстояниях могут считаться равномерными, то скорость, с которой проходится элемент *AD,* будет равна AD/dt.

Следствие 2. Если скорость по *AD* будет равна $c + dc$, тогда как предшествующая ей скорость была равна c, то $c + dc = AD/dt$, раньше же было $AB = cdt$, из чего получается $c = AB/dt$.

Таким образом, мы будем иметь $dc = (AD — AB)/dt$.

Если на *AD* отрезать часть $Ab = AB$, то мы получим $dc = Db/dt$.



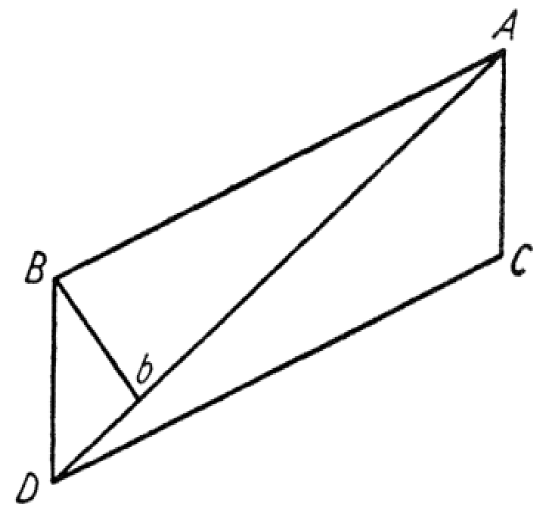
<u>Примечание 1</u>. Надо заметить, что *AC,* или BD, в бесконечное число раз меньше *AB,* так как *AB* есть путь, пройденный с конечной скоростью за отрезок времени *dt,* тогда как *AC* является элементом пути, пройденным с бесконечно малой скоростью за то же время; ведь никакая сила не может в бесконечно малый промежуточек времени придать конечной скорости телу, находящемуся в состоянии покоя.

Предложение 14. Задача

Следствие 3

Поэтому угол *BAD* будет бесконечно малым, и если соединить точки *B* и *b,* то отрезочек *Bb* будет перпендикулярен к *AD.* Пусть синус угла *BAC,*— а он дан,— будет обозначен через *к,* тогда синус угла *BDb* будет также *к,* так как он ему равен. Синус же угла *DBb* будет $\sqrt{1 - \kappa^2}$. Отсюда, так как $BD = AC = dz$, то мы будем иметь

$Db = dz\sqrt{1 - \kappa^2}$, и $Bb = \kappa dz$.



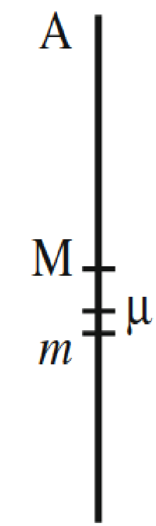
Следствие 4

Итак, приращение скорости *dc,* которое раньше мы нашли равным *Db/dt*, будет равно

$dz(\sqrt{1 - \kappa^2})/\mathrm{d}t$.

Ясно, что *dz* в бесконечно раз меньше, чем *dt,* ведь *dz* бесконечно мало по отношению к *AB,* т. е. по отношению к *cdt,* а следовательно, также и по отношению к *dt,* так как *c* принимается конечной величиной.

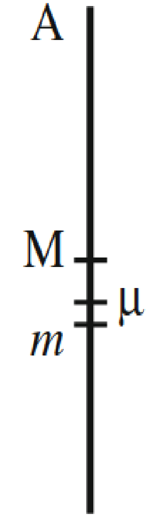
Предложение 19. Теорема



Пусть точка движется по направлению *AM* и пусть на нее действует, пока она движется по отрезочку пути *Mm*, сила *p*, имеющая то же направление. Приращение скорости, которое за это время получит точка, будет пропорционально произведению действующей силы на промежуточек времени, в который точка проходит элемент *Mm* пути.

Доказательство. Возьмем промежуточек времени *dt.* Положим, что если бы на точку не действовала сила, а она продолжала бы двигаться равномерно с той же скоростью, которую она имеет в *M*, то за этот промежуточек времени она прошла бы путь *Mμ.* Действие силы состоит в том, что под ее воздействием точка продвигается дальше на расстояние *μm,* а этот отрезочек равен тому, на который была бы продвинута за тот же промежуточек времени *dt* этой силой та же точка, но находящаяся до того в покое, — сила считается абсолютной. Этому отрезочку пути при данном промежутке времени пропорционально приращение скорости. Но если сила одна и та же, то приращение скорости пропорционально промежуточку времени *dt*. Поэтому, так как отрезочек пути *mμ* или приращение скорости при данном промежуточке времени пропорциональны силе *p,* то приращение скорости при любом промежуточке времени и при любых силах будет пропорционально *pdt,* т. е. силе, умноженной на промежуточек времени. Ч. и Т. Д.

Предложение 19. Теорема.



Следствие 1. Если скорость точки в M равна c и отрезочек пути Mm равен ds, тогда $dt = ds/c$, потому что для определения времени надо принять, что элемент пути Mm пройден движением *равномерным*. Но так как dc пропорционально pdt, то dc будет пропорционально и pds/c, или cdc пропорционально pds.

Таким образом, приращение квадрата скорости будет пропорционально произведению силы на пройденный элемент пути».

Поясним в привычных обозначениях. v – скорость, F – сила. Обозначив через k коэффициент пропорциональности, запишем соотношение, полученное в предложении 19, в виде

$dv = kFdt$.

Поскольку $dt = ds/v$, получаем равенство $vdv = kFds$, которое представляет в элементарной форме теорему кинетической энергии.

Эйлер придавал этому результату большое значение.

Вводя массу m и полагая коэффициент пропорциональности равным 1, получаем

$dv = (F/m)dt$ – дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки (аналитический аналог 2-го закона Ньютона).

Предложение 20. Теорема.

Предложение 20. Теорема

Если направление движения точки совпадает с направлением силы, то приращение скорости будет пропорционально силе, умноженной на промежуточек времени и деленной на материю или на величину точки.

Предложения 16, 17: *Сила инерции каждого тела пропорциональна количеству материи, из которого оно состоит*. Доказательство из статики.

Следствие 1. Пусть A – некоторое тельце (точка), которое движется со скоростью c. На A действует сила p. Тогда

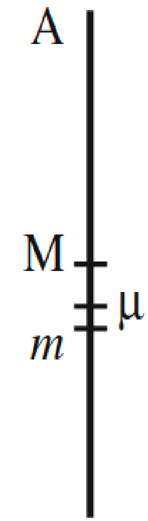
$dc = npdt/A,$

где n во всех случаях обозначает одно и то же число и не зависит ни от силы, ни от промежуточка времени, ни от величины точки.

Это – аналитическое выражение принципа ускоряющих сил (2-ой закон Ньютона)

Предложение 20. Теорема.

Следствие 2. *Количество материи A* вошло в наше рассуждение потому, что оно противодействует действующей силе, т. е. потому, что оно совпадает с силой инерции. Таким образом, приращение скорости прямо пропорционально действующей силе и промежуточку времени и обратно пропорционально *силе инерции* тела.



Следствие 3. Если путь $Mm = ds$, то $dt = ds/c$. Отсюда получается

$dc = npds/Ac$ или $cdc = npds/A$.

Отсюда приращение квадрата скорости пропорционально произведению силы на пройденный отрезочек пути, деленному на массу или силу инерции тельца. [По сути, это теорема об изменении кинетической энергии].

Примечание. Это предложение охватывает все установленные до сих пор принципы, определяющие природу и все законы движения, — если только направление силы совпадает с направлением движения. Поэтому, если это предложение соединить с предложением 14, которым определяется действие сил, действующих наклонно, то мы будем иметь все принципы, по которым можно найти движение точек под действием произвольных сил.

Предложение 21. Теорема.

Определить действие какой-либо силы, действующей на движущуюся точку наклонно.

Эйлер получает систему двух дифференциальных уравнений, определяющих криволинейное движение материальной точки в плоскости при любом взаимном расположении направлений скорости и силы.

Действующая сила раскладывается на две составляющие: T – по направлению касательной и N – по направлению нормали. Если ρ – радиус кривизны траектории, то дифференциальные уравнения движения точки принимают вид

$$dv = (T/m)dt, \qquad \rho = mv^2/N$$

Это – т. наз. естественные дифференциальные уравнения движения

Далее Эйлер рассматривает примеры применения этой формулы. Во втором томе этот аппарат применяется для движения точки по заданной кривой или поверхности.

Важные результаты Эйлера по механике, полученные до 1765 года

- 1746 г. – исследуя движение материальной точки по подвижной поверхности (движение шарика во вращающейся трубке), Эйлер вывел из дифференциальных уравнений движения точки закон площадей.

- Эйлер и Д. Бернулли исследовали задачу о движении нескольких шариков во вращающейся трубке и установили закономерность: при движении нескольких тел вокруг неподвижного центра сумма произведений массы каждого тела на его скорость вращения вокруг центра и на расстояние от того же центра всегда остается неизменной, если не имеется какого-либо внешнего действия.

- Эйлер ввел в механику единообразный математический аппарат решения задач динамики: запись дифференциальных уравнений движения материального объекта с последующим их интегрированием при известных начальных условиях.

- Эйлер получил теорему об изменения кинетической энергии точки и кинетическом моменте системы.

Идея разложения движений и сил по трем взаимно-перпендикулярным неподвижным направлениям в пространстве

Впервые появляется в работе К. Маклорена «Трактат о флюксиях» (1742).

Колин Маклорен (1698-1746) – один из непосредственных последователей Ньютона, профессор Эдинбургского университета. Цель трактат – переложение основного материала «Начал» Ньютона в более доходчивой форме, для чего вводится алгебраическая символика исчисления бесконечно малых и методы аналитической геометрии. Однако сам Маклорен не проводит последовательно этого приема в механике, в частности, не составляет дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на неподвижные оси.

Это остается заслугой Леонарда Эйлера.

1765 г. – фундаментальный труд Эйлера по аналитической динамике «Теория движения твердых или жестких тел, установленная на основных принципах нашего познания и приспособленная ко всяким движениям, которые могут иметь названные тела».

Кроме динамики твердого тела, составляющей основное содержание трактат, в нем изложена новая теория движения точки, в которой последовательно используется метод разложения движений и сил по трем координатным осям.

Дифференциальные уравнения движения точки. Эйлер (1765)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}$$

Формализмы Эйлера и Ньютона. Постановка проблемы

Э. Мах писал: «Принципов Ньютона *достаточно*, чтобы без привлечения какого-нибудь нового принципа рассмотреть каждый практически возможный случай механики, будь то из области статики или динамики. Если при этом возникают затруднения, то это всегда только затруднения математического (формального), но никогда *не принципиального* характера».

Ряд фактов ставит под сомнение точку зрения Маха.

Во-первых, сам Ньютон скромнее оценивал свои достижения. В предисловии к «Началам», перечислив задачи небесной механики, которые ему удалось решить, он заметил :

«Было бы *желательно* (!) вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел … стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и оставались бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому *более правильному* (!), изложенные здесь основания доставят некоторое освещение».

Суть вопроса: Второй закон Ньютона и закон вращения твердого тела Эйлера

По-видимому, Ньютон понимал, что законы механики, которые он сформулировал, недостаточны для решения вопросов, связанных с движением реальных, а не точечных масс. Об этом свидетельствует отсутствие в его работах типичных для механики твердого тела задач таких, как качание физического маятника или качение колеса.

Вопрос: что препятствовало распространению принципов Ньютона на движение твердых тел? Сравним два закона механики, относящиеся к поступательному движению точечной массы и к вращению тела вокруг оси.

Второй закон Ньютона для поступательного движения точечной массы: ускорение под действием силы пропорционально величине силы и обратно пропорционально массе:

$$a = F/m \qquad (1)$$

Закон Эйлера для вращательного движения:

$$\alpha = M/I \qquad (2)$$

α – угловое ускорение; M – момент силы; I – момент инерции.

Уравнение (2) легко вывести из (1) в случае вращения вокруг оси точечной массы m. Достаточно сделать замену.

$\alpha = a/r$

$M = Fr$

$I = mr^2$, где r – радиус вращения.

Этот вывод остается в силе для системы, состоящей из конечной совокупности точечных масс.

Закон Ньютона для точечной массы и закон Эйлера для твердого тела

Вопрос: верно ли, что в случае твердого (непрерывного) тела соотношение (2) может быть выведено из (1)?

Исследователи по-разному отвечают на него. Отрицательный ответ дает, например, историк механики К. Трусделл.

Truesdell C., Essays in the History of Mechanics (1968). Статьи:

II. A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason (pp. 85-137)

и особенно:

V. Whence the Law of Moment of Momentum? (pp. 239-271)

Книга Трусделла находится в Dropbox.

С точки зрения Трусделла (и ряда других историков механики), соотношение (2) – самостоятельный закон, не выводимый из второго закона Ньютона.

Если это так, то заслуга Эйлера, впервые сформулировавшего этот закон, не ограничивается приданием механике Ньютона аналитической формы.

Заслуга Эйлера состоит в том, что для решения задачи о движении твердого тела он ввел принципиально новый закон, расширив тем самым список фундаментальных принципов механики.

Задача, которую поставил Эйлер

Когда Эйлер приступил к исследованию механического движения, кроме законов Ньютона было еще несколько кандидатов на роль всеобщих принципов механики. Это – закон сохранения кинетической энергии, принцип Торричелли, закон виртуальных скоростей ….

Проблема состояла в том, что ни один из этих принципов не обладал достаточной степенью общности.

Эйлер отмечал этот факт:

«Эти принципы непригодны для исследования движений тел, которые не являются бесконечно малыми…. Ими можно пользоваться, если сведение тела к точке не ведет к грубым ошибкам: так можно поступать, когда линия действия силы проходит через центр тяжести …. Если же линия силы не проходит через центр тяжести, то мы не можем определить в полной мере результат действия этой силы. Это тем более верно, когда движимое тело несвободно, т.е. связано некоторым препятствием, зависящим от его формы»

«Рассуждение о наилучшей конструкции кабестана» (1745)

Механика до Эйлера.
Обилие различных начал (принципов обоснования) науки о движении

Первая трудность в развитии механики состояла в том, что вплоть до сер. XVII в. механика строилась на основе несколько различных принципов, конкурировавших между собой.

Законы Ньютона были лишь одним из множества вариантов ее обоснования.

До Эйлера другими кандидатами в «начала механики» были:

- закон сохранения кинетической энергии (живой силы) (Лейбниц и его последователи),
- принцип Торричелли,
- принцип Даламбера,
- закон рычага,
- принцип виртуальных скоростей Лагранжа,
- принцип наименьшего действия.

Ограниченная область применения законов механики, установленных в XVII в. (Гюйгенс и Ньютон)

Все перечисленные принципы имели один общий недостаток. Чтобы быть принципами они должны были носить всеобщий характер, т.е. быть применимы к движению любых тел, начиная от планет и кончая микроскопическими частицами.

Однако, на деле, применение этих принципов (в первую очередь, законов Ньютона) сталкивалось с проблемой при рассмотрении движения протяженных (т.е. непрерывных) объектов, как твердых тел, так и жидкостей. В частности, ни один из подходов, предложенных в XVII в., не мог дать корректного количественного описания того, как произвольная точка протяженного тела движется в ответ на силы, действующие на это тело. Их применение ограничивалось движением т.н. «центроидов» - тел, движение которых можно было свести к движению единственной «репрезентативной точки» протяженного тела.

В небесной динамике предпочтительным центроидом был центр масс. В составном (физическом) маятнике это был «центр колебаний». Для упругого столкновения это был «центр удара», то есть мгновенный центр нулевой скорости.