# Лекция 20

Чиненова Вера Николаевна

# Разработка принципа виртуальных скоростей

План лекции:

1. Развитие аналитической статики в трактате Л. Карно "Опыт о машинах вообще",  использование заменяющей схемы грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины.
2. Развитие аналитической статики в трактате Лагранжа "Аналитическая механика".

   Дальнейшая разработка принципа виртуальных скоростей.

   Общая формула статики.

Промышленный переворот XVIII — начала XIX в. усилил интерес механиков к проблемам расчета равновесия и движения механизмов и машин, того, что позже стали называть механической системой со связями.

Анализируя доказательство Лагранжа принципа виртуальных скоростей, Кирпичев писал: «Это доказательство интересно как указатель тесной связи нашего начала с машинами и механизмами разного рода. Само начало возможных перемещений выросло на почве изучения машин, и следы этого происхождения видны во многих доказательствах начала».
(*Кирпичев В. Л. Беседы о механике, с. 21.* )

Л. Карно (1753—1823), по-видимому, сделал первую попытку обоснования и аналитической записи принципа виртуальных скоростей.

# Лазар Карно (1753 -1823)

# Лазар Карно (1753 -1823)

- 1783г. - Л.Карно «**Опыт о машинах вообще**»

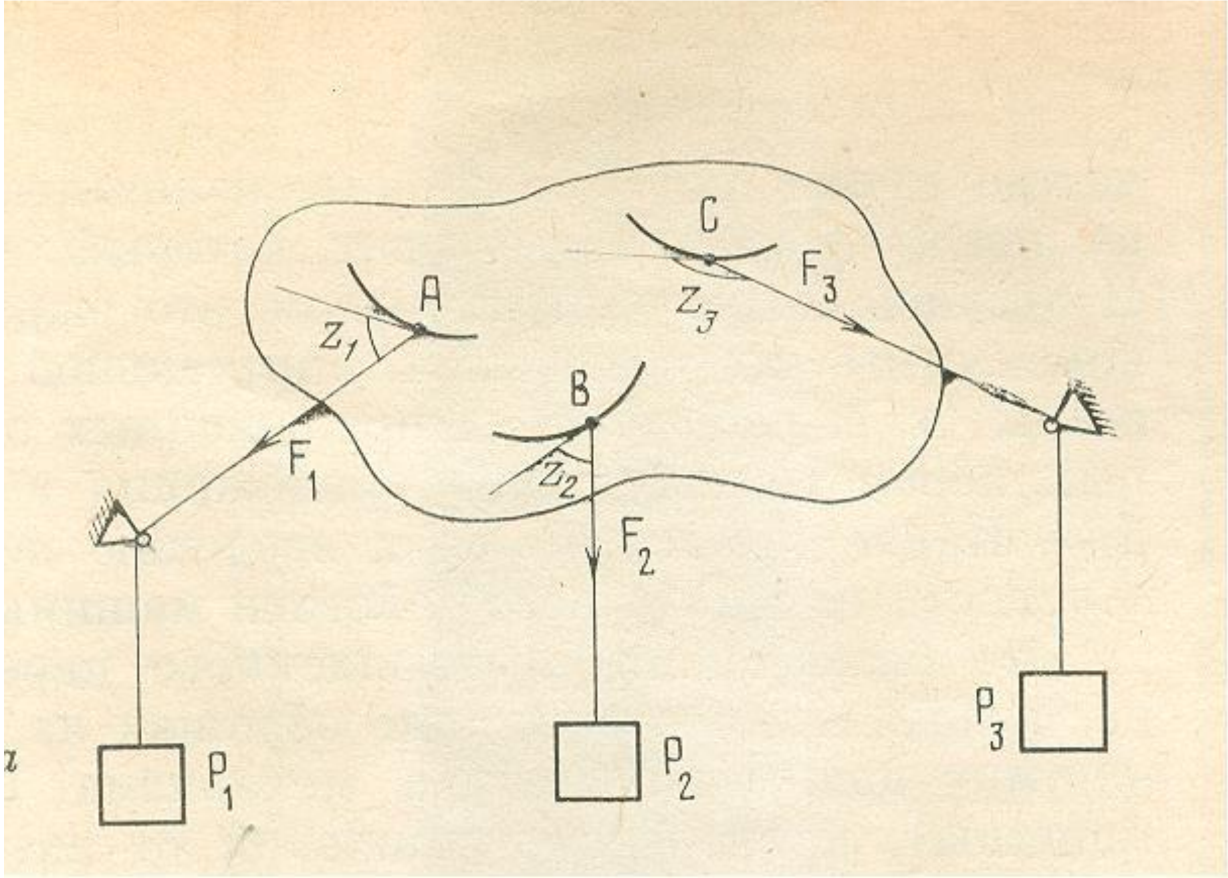
  теория равновесия и движения механической системы, которую Карно называет машиной.
- 1803г. – «Общие принципы равновесия и движения» (3-е издание )
- Вывод **условия равновесия (а затем и условия движения) обобщенной машины или механической системы со связями методом расчета баланса виртуальной мощности.**
- **Карно вводит вместо сил, действующих в машине, заменяющую схему грузов, производящих посредством нитей в точках приложения сил те же действия, что и сами силы.**

## Лазар Карно (1753 -1823)

- Понятие Карно **«геометрического движения» соответствует абстракции виртуального перемещения точки или бесконечно малого ее перемещения, допустимого связью в данный момент времени.**

# Заменяющая схема грузов Карно

$$SF_i \cdot u_i \cdot \cos z_i = 0$$



## Заменяющая схема грузов Карно

Пусть в некоторой точке *M* приложена сила *F*; в первое мгновение после нарушения равновесия точка *M* имела бы «геометрическое движение» (т. е. перемещение, допустимое связью) со скоростью *u*. Угол между направлением силы *F* и скоростью и обозначен через *z*. Вместо силы в той же точке, по схеме Карно, подводится нерастяжимая невесомая нить по направлению действия силы *F*.

К свободному концу нити, свисающей после огибания идеального направляющего блока (дающего нити нужное направление в точке *M*), подвешен груз *P* такой же величины, как и сила *F*. Так поступает Карно в каждой точке системы. В результате он приходит к системе грузов, связанных посредством частей машины, в точках которой присоединены нити, несущие грузы. Равновесие полученной системы грузов трактуется с помощью принципа Торричелли о наинизшем положении центра тяжести системы.

## Начало возможных перемещений

- Необходимое и достаточное условие равновесия системы состоит в том, что **сумма работ активных приложенных сил для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю.**

## Лазар Карно (1753 -1823)

- Карно придавал большое значение суммарному «**моменту активности**» в теории машин, подчеркивая, что это количество нужно по возможности экономить, чтобы извлечь наибольший полезный эффект при действии машины.

## Лазар Карно (1753 -1823)

- Идея механической машины «вообще» и идеальной машины,  как образца для сравнения с реальной
- Концепция о безударной передаче «живой силы» в машинах при $\Delta v \to 0$
- Положение о потере «живой силы» при трении и ударе.
- Идея о КПД (effet utile)  равном 100% у идеальной машины.

В оригинальных работах Л. Карно явственно сквозит инженерный подход к решению проблем механики, однако терминология Карно и его стремление обойтись без понятия силы делают затрудиительным подробное изложение его рассуждений. Тем не менее многие его идеи и результаты в целом оказали заметное влияние на дальнейшее развитие механики.

## Лазар Карно (1753 -1823)

- 1753 г., 13 мая – Родился в г. Нолэ (Франция) в семье адвоката
- 1771-73 – Мезьерская школа, начал службу в чине
- инженер-поручика в г.Кале
- 1782 – книга «Опыт о машинах вообще»
- 1791 – депутат Национального Собрания
- 1792 – член Конвента
- 1793 – член «Комитета общественного спасения»
- 1794 – избран Президентом Конвента
- 1793-95 – руководил обороной Французской Республики
- от интервенции коалиции европейских монархий.
- Создание 14 армий.
- 1795 – избран в Институт Франции (Академия наук)
- класс физ-мат наук
- 1795-97 – Член Директории

## Лазар Карно (1753 -1823)

- 1796 – рождение старшего сына С. Карно –
- будущего основателя термодинамики
- 1797 – «Фрюктидор»: бегство в Швейцарию.
- Исключение из Академии наук.
- 1797-1800 – пребывание в Швейцарии; первая эмиграция
- 1800 – военный министр Консульства.
- Вторичное избрание в АН.
- 1803 – «Основные принципы равновесия и движения»
- 1802-1813 – многочисленные экспектизы по различным
- предложениям, поступающим на отзыв
- в Нац. Институт
- 1810- «Об обороне крепостей»
- 1814 – руководство обороной Антверпена

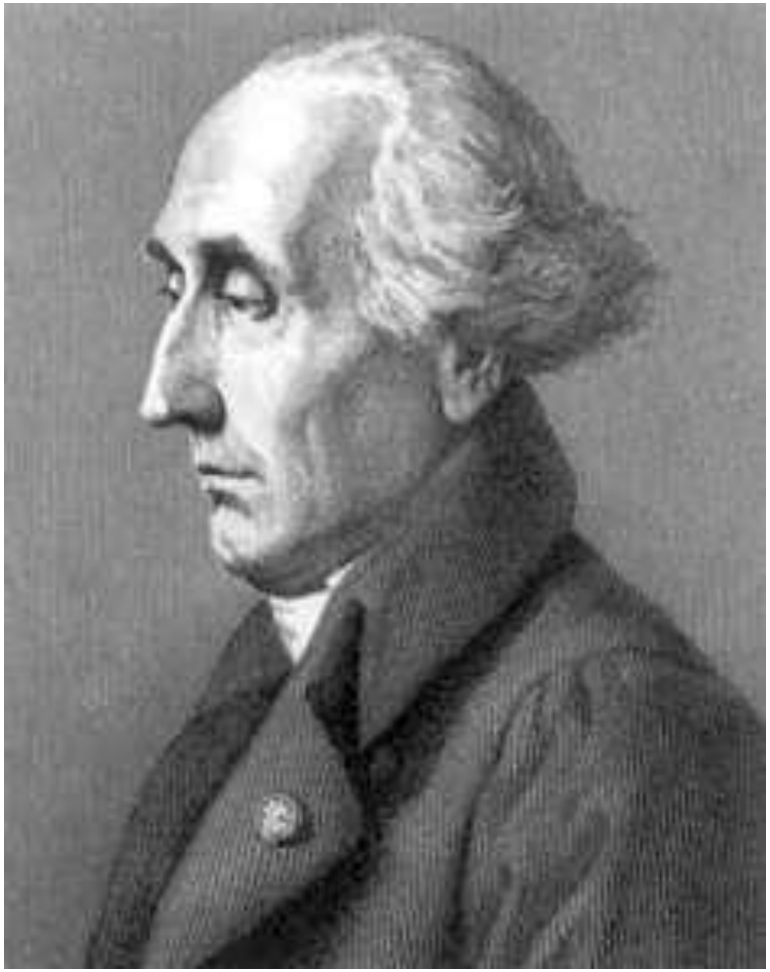
# Л. Карно в битве при Ватиньи

## Лазар Карно (1753 -1823)

- 1815 – министр внутренних дел в правительстве
- Наполеона («100 дней»).
- 1815 – изгнание из Франции после вторичной
- реставрации Бурбонов;
- 2-я эмиграция, вторичное исключение из АН
- 1816 – визит в Варшаву; отъезд в Пруссию
- 1816-23 – жизнь в эмиграции (Магдебург, Пруссия)
- 1823 г., 2 авг. – смерть и похороны в Магдебурге
- 1883 г.- прах перенесен в Пантеон в Париж

# Лазар Карно (1753 -1823)

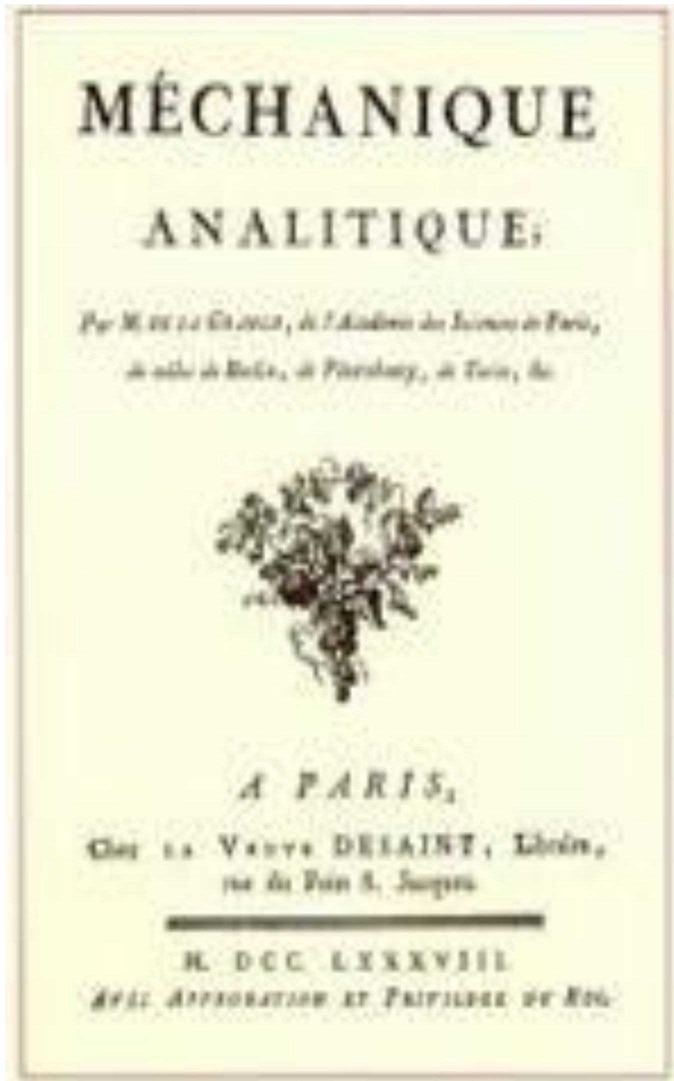
# Ж. Лагранж (L.Lagrange)  (1736-1813)



## Разработка принципа виртуальных скоростей

- Идея вводить **заменяющую схему грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины,** использовалась многими учеными парижской Политехнической школы для обоснования принципа возможных перемещений.

# Ж.Лагранж «Аналитическая механика»


MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire,

M. DCC. LXXXVIII.

**Ж.Лагранж «Аналитическая механика»**

«Существует уже много трактатов о механике, но план настоящего трактата является совершенно новым.

Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи.

- Я делю эту работу на две части: на статику, или теорию равновесия, и на динамику, или теорию движения.
- В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения. (...)»

## **Статика.** Раздел II
## Общая формула статики для равновесия любой системы сил и метод применения этой формулы

«Общий закон равновесия машин заключается в том, что силы относятся друг к другу обратно отношению скоростей точек, к которым они приложены, причем скорости должны измеряться по направлению этих сил.

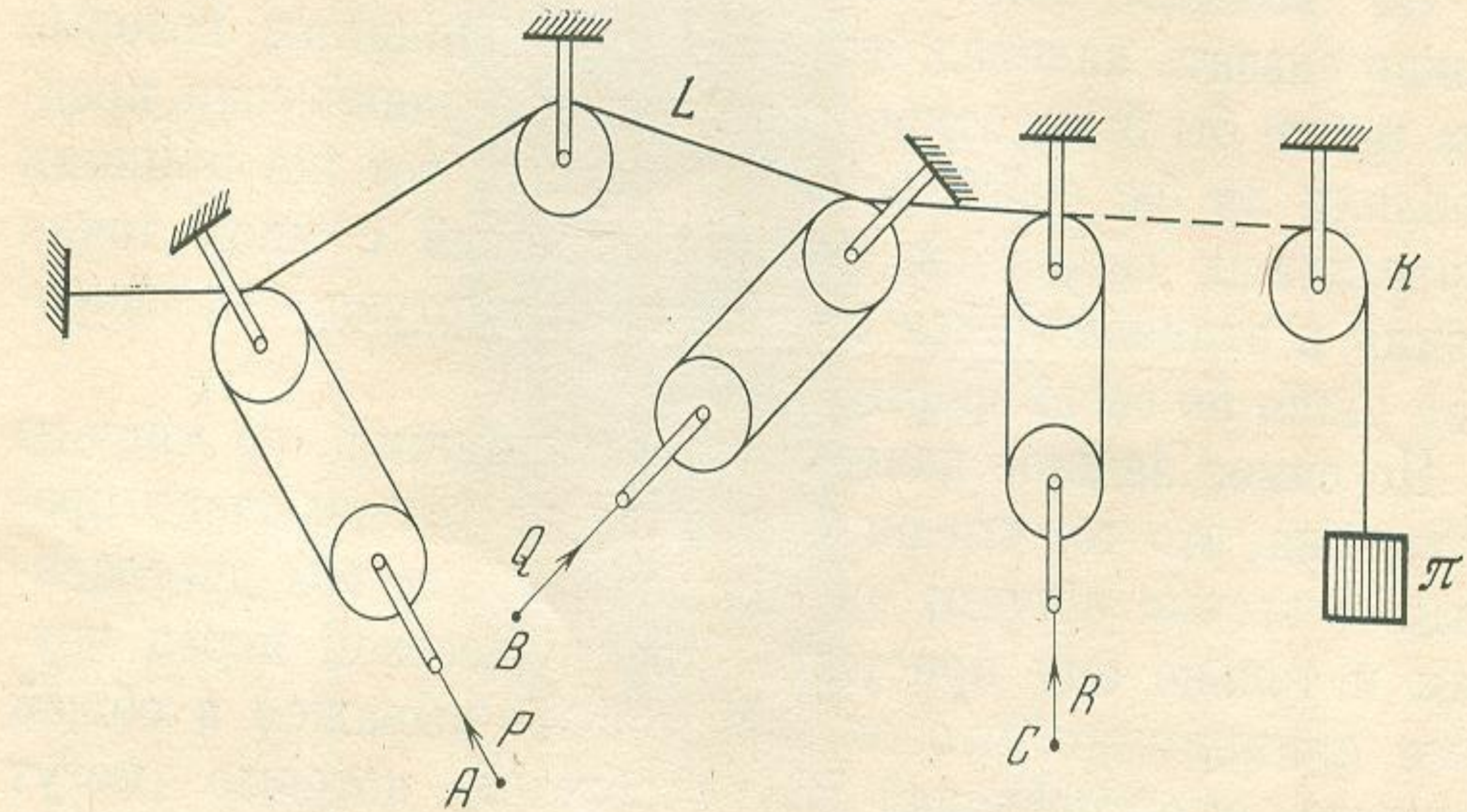
В этом законе заключается положение, которое обычно называют ***принципом виртуальных скоростей.***

*Как мы показали в предыдущем* разделе, этот принцип уже давно известен в качестве основного принципа равновесия, в силу чего его можно рассматривать как своего рода аксиому механики.

«Допустим, что силы P, Q, R, действующие по определенным направлениям, взаимно уравновешивают друг друга. Представим себе, что из точек, к которым приложены силы, отложены отрезки, равные *p, q, r, ... и расположенные по направлению этих сил.*

Обозначим через *dp, dq, dr, ... вариации, или дифференциалы,* этих отрезков, поскольку они могут получиться в результате какого-либо бесконечно малого изменения положения различных тел или точек системы.

Ясно, что эти дифференциалы выразят пути, которые будут пройдены в одно и то же мгновение силами *P, Q, R , ... по своим* собственным направлениям, если допустить, что эти силы стремятся удлинить соответственно отрезки *p, q, r, ... . Таким образом,* дифференциалы *dp, dq, dr, ... будут пропорциональны виртуальным* скоростям сил *P, Q, R , ... и, следовательно, могут быть* для простоты подставлены вместо этих скоростей».


L
K
π
Q
B
P
A
R
C

Итак, для равновесия любого числа сил ***P*****,** ***Q*** **,** ***R****,* направленных по линиям ***p, q*****,** ***r*** ... и приложенных любым образом, мы имеем уравнение вида

$$\boldsymbol{Pdp + Qdq + Rdr \ldots = 0.}$$

Это общая формула статики для равновесия любой системы сил.

Мы назовем каждый член этой формулы, например ***Pdp****, моментом силы* ***P*** и примем слово «момент» в том смысле, какой ему придал Галилей, т. е. как произведение силы на ее виртуальную скорость. Тогда приведенная выше общая формула статики гласит:

***Сумма моментов всех сил равна нулю.***

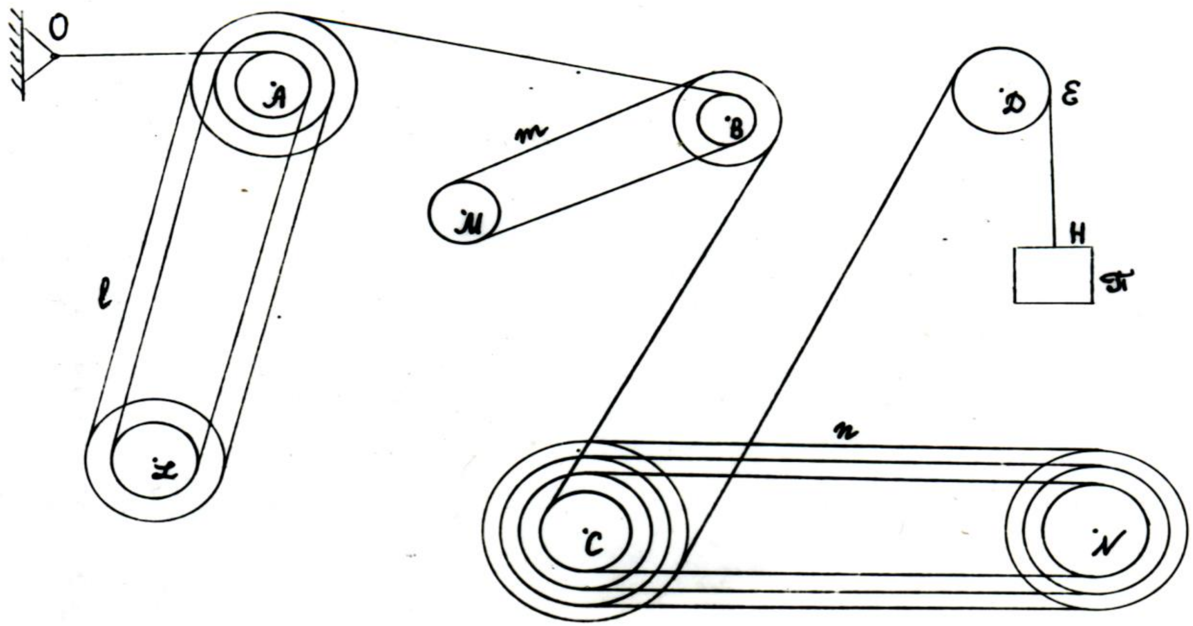
Основное свойство равновесия, заключающееся в том, что любая система сил, находящихся в равновесии, продолжает оставаться в этом состоянии, когда каждая из этих сил изменяет направление своего действия на противоположное, если только структура этой системы не претерпевает какого-либо изменения вследствие изменения направления всех сил.

- «Каковы бы ни были силы, действующие на заданную систему тел или точек, всегда можно считать, что они как бы стремятся к некоторым точкам, расположенным на линиях, по которым они направлены.
- Назовем эти точки *центрами сил* можно принять за отрезки *p, q, r,* ... соответствующие расстояния от этих центров до тех точек системы, в которых приложены силы *P, Q, R*, ... .»

# *Необходимое условие равновесия сил, приложенных к механической системе*

**«Если какая-либо система любого числа тел, или точек, на каждую из которых действуют любые силы, находится в равновесии и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными»**

# Ж.Лагранж «Аналитическая механика»



## Сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = 0$$

**Ж.Лагранж «Аналитическая механика»**

- *Достаточность* этого условия Лагранж доказывает только для *двусторонних связей*.
- Если допустить, что это равенство имеет место, то оно должно удовлетворяться

как положительными перемещениями, так и отрицательными, и, таким образом, не существует никаких оснований для того, чтобы равновесие было нарушено в ту или другую сторону.

Следовательно, должно иметь место равновесие.

**Ж.Лагранж «Аналитическая механика»**

- Лагранж разработал четкий алгоритм для исследования равновесия точки на некоторой поверхности (в общем случае для равновесия системы точек, стесненной некоторыми связями), вводя принцип освобождаемости от связей посредством использования неопределенных множителей $\lambda$, $\mu$, $\nu$.

**Ж.Лагранж «Аналитическая механика»**

- Для случая равновесия точки под действием результирующей силы ***P(x,y,z)*** на гладкой поверхности, уравнение которой задано ***L(x,y,z)=0***, Лагранж умножает вариацию

$$\delta L = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

на неопределенный множитель $\lambda$ и прибавляет результат к сумме $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$

# Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i + \lambda \delta L = 0.$$

Группируя скобки перед каждой вариацией координат, и приравнивая каждую скобку (с использованием неопределенности множителя $\lambda$ и независимости двух координат), Лагранж получает три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{3n} \left( X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0,$$

***L(x,y,z)=0***

## Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- В наше время уравнения с неопределенными множителями $\lambda$, $\mu$, $\nu$ называют «уравнениями Лагранжа первого рода»

## Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Суммарный элементарный момент сил выражается полным дифференциалом некоторой функции координат ***П***
  (позже ее стали называть потенциальной энергией. в современной терминологии - элементарная работа всех сил на возможном перемещении системы, взятая со знаком минус).
- Необходимое и достаточное условие равновесия механической системы, по Лагранжу, сводится к утверждению о существовании экстремума функции ***П*** в некотором положении системы, что выражается **равенством нулю дифференциала этой функции**.

## Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- «Когда эта функция является минимумом, то в этом случае имеет место устойчивое равновесие в том смысле, что если сначала система находилась в состоянии равновесия, а затем была немного из него выведена, то она сама собою стремится вернуться к этому состоянию, совершая около него бесконечно малые колебания»

## Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Отметим, что здесь же дан эскиз определения **статической устойчивости** как стремления системы, получившей малые возмущения координат или начальных скоростей в состоянии равновесия, возвратиться в дальнейшем к невозмущенному состоянию.

**Ж.Лагранж «Аналитическая механика»**

Разложив функцию ***П***, явно не зависящую от времени, в ряд по степеням отклонения координат от начального их значения в положении равновесия системы, Лагранж отбрасывает слагаемые всех степеней переменных, начиная с третьей и выше, считая переменные весьма малыми.

Линейная часть разложения равна нулю, так как это является необходимым условием экстремума функции ***П***.

Квадратичная часть разложения может быть, по мнению Лагранжа, преобразована к сумме квадратов новых переменных (линейно выражающихся через прежние) с постоянными коэффициентами.

Из свойств интеграла энергии сумма кинетической и потенциальной энергии в начальный момент равна такой же сумме в любой другой момент времени.

## Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

Отсюда, потенциальная энергия в возмущенном движении не превосходит некоторой положительной величины, которую, задаваясь определенными начальными условиями, можно сделать как угодно малой.

Отсюда вытекает ограниченность каждой из новых координат («нормальных») определенными границами.

## Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- В приведенном рассуждении Лагранж использовал необоснованные положения, которые могут не иметь места в общем случае: разложимость функции ***П*** в степенной ряд по возмущениям начальных координат и законность отбрасывания всех слагаемых этого разложения, где степени переменных выше второй.
- Лагранж не проанализировал случаи условного экстремума функции, например, минимакса.

# Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Вторая часть теоремы, утверждающая, что максимум функции ***П*** в положении равновесия является достаточным условием неустойчивого равновесия, здесь (в статике) также не обоснована, читатель отсылается к теории малых колебаний (отдел шестой первого тома)
- Учение о равновесии механической системы, включая гидростатику идеальной (несжимаемой и сжимаемой жидкости), изложено Лагранжем единообразным методом, с большим числом разработанных им приложений.
- Этот новый системный метод получил после Лагранжа широкое распространение и именуется аналитической статикой.