История математики
19 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Развитие понятия функции с древности до начала XX в. Классификация функций по Эйлеру. Спор о колебании струны и развития понятия решения (классического и обобщенного) уравнения с частными производными в XVIII – начале XX вв.

Математика в XVIII в.

В XVIII веке многие математики столкнулись с вопросом, что такое функция и с их классификацией.

Как мы уже говорили на прошлой лекции, Леонард Эйлер в работе «**Введение в анализ бесконечных**» (1748 г) дал определение: «*функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного и чисел или постоянных количеств*». Причем тут Эйлер допускает сразу и действительные, и мнимые значения аргумента.

Эйлер, Леонард (1707, Базель – - 1783, Санкт-Петербург)

1) Новая теория движения Луны. — Л.: Изд. АН СССР, 1934.

2) Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами либо максимума, либо минимума. — М.-Л.: ГТТИ, 1934.

3) Основы динамики точки. — М.-Л.: ОНТИ, 1938.

4) Дифференциальное исчисление.—М.-Л., 1949.

5) Интегральное исчисление. В 3 томах. — М.: Гостехиздат, 1956-58.

6) Избранные картографические статьи. — М.-Л.: Геодезиздат, 1959.

7) Введение в анализ бесконечных. В 2 томах. — М.: Физматгиз, 1961.

8) Исследования по баллистике. — М.: Физматгиз, 1961.

9) Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. — СПб.: Наука, 2002. — 720 с.

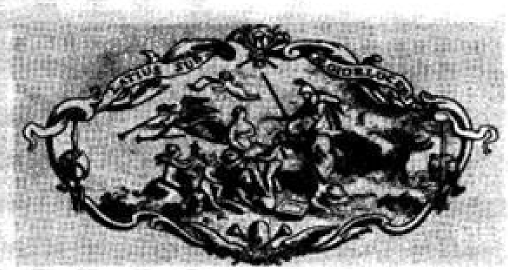
Трилогия Эйлера

- 1) Введение в анализ бесконечных, 2 тома, 1748
- 2) Дифференциальное исчисление, 1 том, 1755
- 3) Интегральное исчисление, 3 тома, 1770

Введение в анализ бесконечных

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ
Socio.

TOMUS SECUNDUS



LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

Понятие функции

По И.Бернулли:

Функция – количество, составленное каким угодно способом из переменной и постоянных.

Уточнение Эйлера:

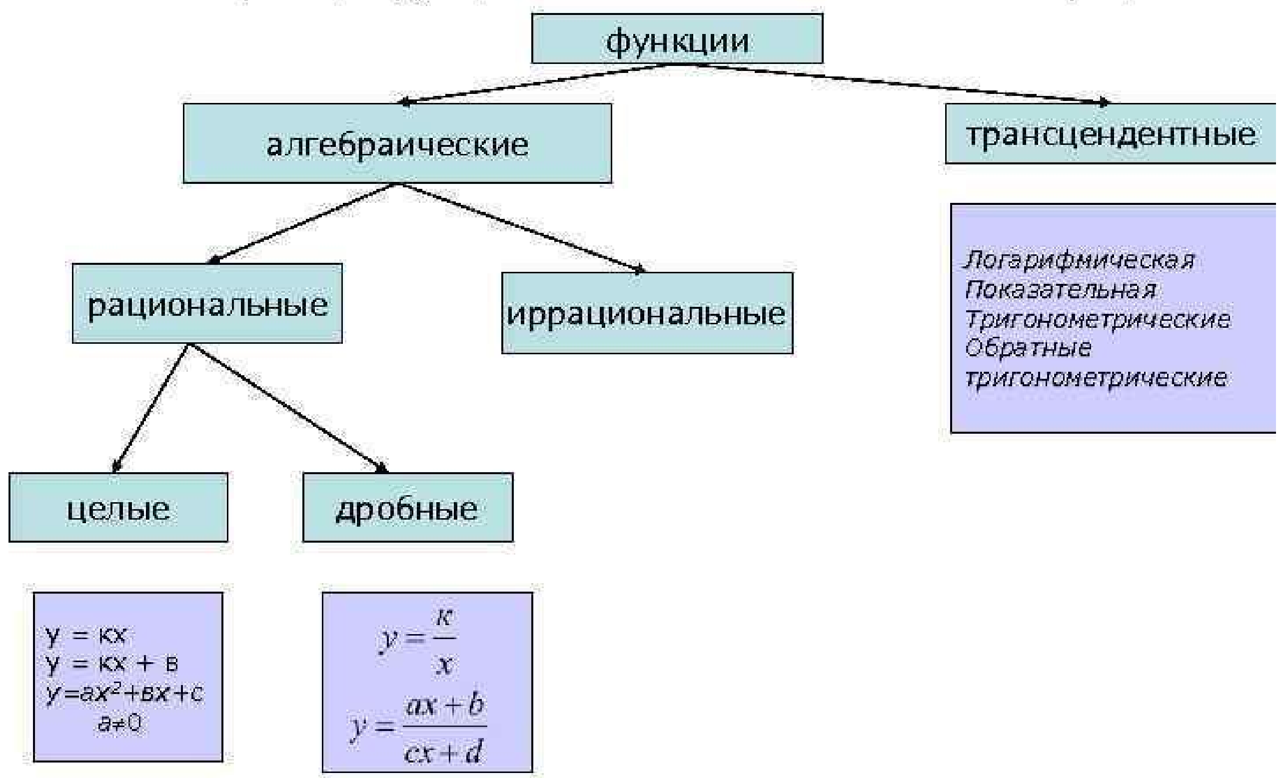
Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного и чисел или постоянных количеств.

Непрерывные функции

Непрерывная функция – заданная во всей области определения одним и тем же аналитическим выражением

Эйлер дает **классификацию функций**:

Классификация функций по основанию выполняемых операций



«Дифференциальное исчисление» (1755)

«Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак, ... все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями…»

В основание дифференциального исчисления Эйлер помещает своё «исчисление нулей».

Прежде всего Эйлер предлагает считать, что **отношение нулей** имеет смысл:

$0 / 0$ может быть любым числом n, так как $n \times 0 = 0$. Дифференциалы dx и dy он рассматривает как нули: $dx = dy = 0$, но их отношение не является уже, вообще говоря, неопределённым.

Например, пусть $y = 5x$. Тогда $dy / dx = d(5x) / dx = 5dx / dx = 5$.

Для разложения в ряд показательных и логарифмических функций Эйлер использовал:

Если $a^x = N$, то $x = \log_a N$ (здесь Эйлер впервые вводит **понятие логарифма**) и

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Или в более ранней записи:

$e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$, где i — бесконечно большое число от infinite.

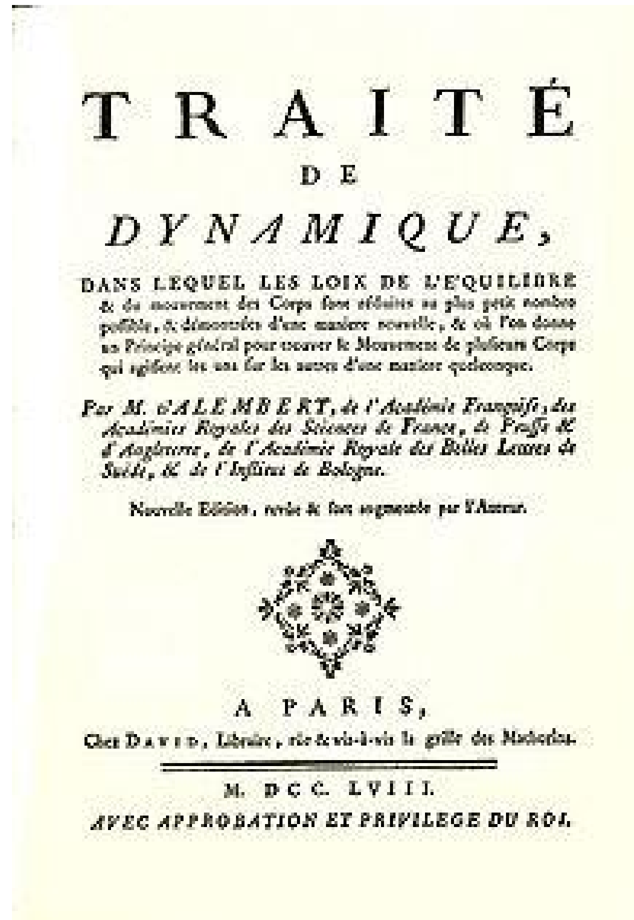
Тригонометрические функции также вводятся аналитически:

$e^{\pm i\varphi} = cos\varphi \pm isin\varphi,$

где *i* – это уже привычная нам мнимая единица. Из этого соотношения и формулы Муавра Эйлер получает выражение для тригонометрических функций:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}.$$

Д’Аламбер, Жан Лерон (1717 - 1783)



TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniere nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque.

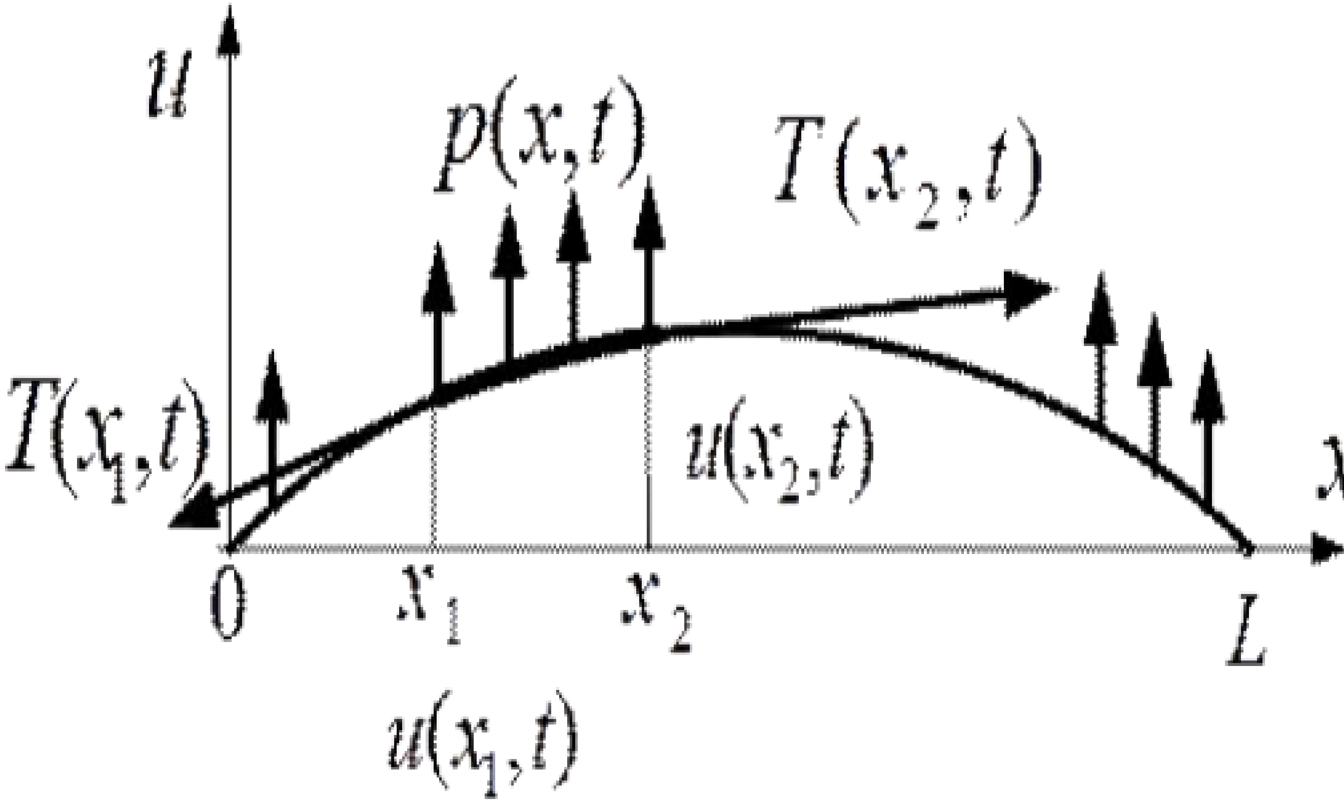
Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles Lettres de Suède, & de l'Institut de Bologne.

Nouvelle Édition, revûe & fort augmentée par l'Auteur.

A PARIS,
Chez DAVID, Libraire, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Уравнение колебания струны



Уравнение колебания струны

В 1715 г. **Брук Тейлор** (1685-1731) вывел **уравнение колебания струны**

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{a}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^2}$$

из условия, что ускорение точки струны, то есть, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, обратно пропорционально радиусу кривизны.

Уравнение колебания струны

Для решения этого уравнения Тейлор наложил еще одно условие:

что все точки колеблющейся струны одновременно возвращаются на ось абсцисс. Далее Тейлор принимает ось абсцисс за начальное положение струны и находит решение в виде:

$y = A\sin bx \cdot \sin abt.$

Уравнение колебания струны

В 1747 г. Даламбер пишет уже упомянутую выше работу, в которой он находит общий интеграл этого уравнения. После замены $at = \tau$ (у Даламбера *a=1*) уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial y}{\partial\tau}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}d\tau + \frac{\partial y}{\partial\tau}dx = du.$$

Уравнение колебания струны

У Даламбера частные производные обозначаются буквами: $\frac{\partial y}{\partial \tau} = p, \frac{\partial y}{\partial x} = q$.

И

$$du = qd\tau + pdx$$

$$dy = pd\tau + qdx.$$

Откуда:

$$d(y + u) = (p + q)d(\tau + x)$$

$$d(y - u) = (p - q)d(\tau - x).$$

Эти равенства показывают, что *p+q* и *p-q* являются произвольными функциями аргументов $\tau + x$ и $\tau - x$ соответственно.

Уравнение колебания струны

В итоге через интегрирование Даламбер получил решение:

$$y = \varphi(\tau + x) + \varphi(\tau - x),$$

где функция ф определяется начальными условиями $y|_{x=0} = y|_{l=0} = 0$ (*l* – длина струны).

Полученное выражение Даламбер назвал **общим решением уравне-ния колебании струны**

В1748 г (опубликована в 1750) выходит работа Эйлера «**О колебании струны**»

$$y = \varphi(at + x) + \varphi(at - x)$$

Эйлер говорит, что при $t = 0$ функцию $\varphi(x)$ можно выразить следующим образом:

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = f(x)$$

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{a}\int g(x)dx.$$

То есть,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{1}{a}\int g(x)dx\right).$$

В 1753 г., **Д. Бернулли** предложил общее решение в форме:

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{l} + \beta\, sin\frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots$$

В 1807 г. **Шарль Фурье** (1772-1837) доказал, что связные линии, заданные на конечных участках различными уравнениями, представимы на любом таком участке тригонометрическим рядом:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + \ b_n \sin nx)$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

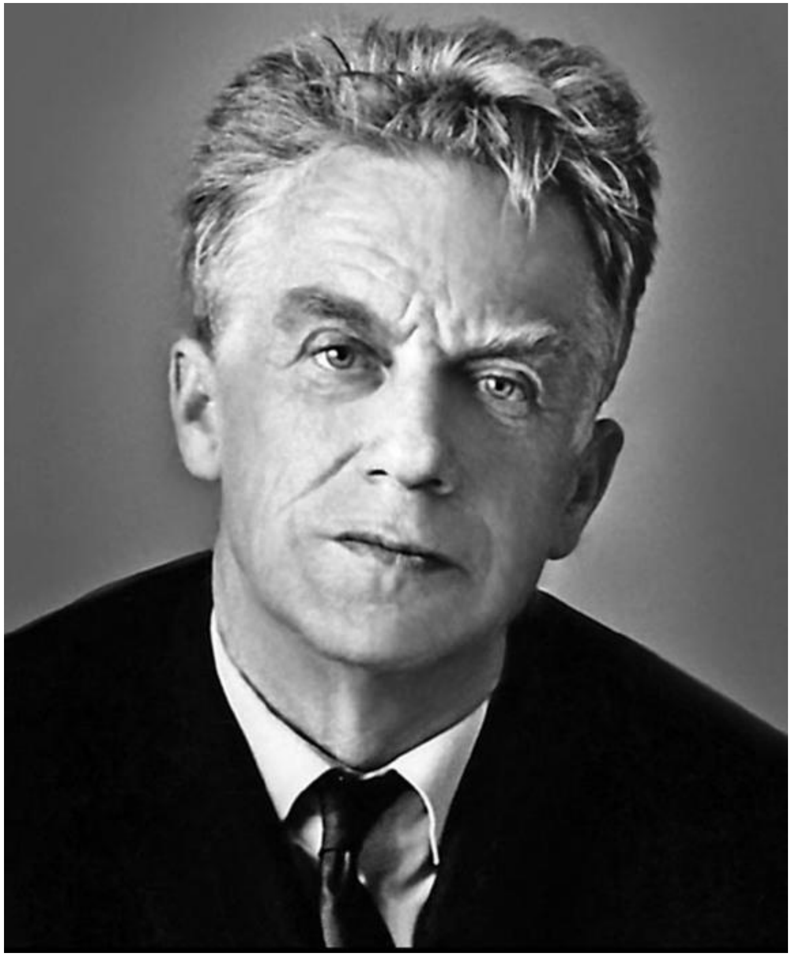
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Со временем этот спор превратился в ***спор о природе функций***, ***входящих в состав интегралов уравнений с частными производными***, а затем — вообще о соотношении между внутренними свойствами функций и характером выражающего их аналитического аппарата.

Среди множества возникших в связи с этим проблем оставалась долгое время нерешенной старая проблема: являются ли связные линии, вычерченные свободным движением руки, непрерывными, точнее, аналитически выразимыми.

Однако, несмотря на старания целого ряда авторов, работавших в этом направлении, вопрос о возможности применения негладких функций (с разрывными производными) в теории волнового уравнения прояснился лишь в работах **С.Л.Соболева** (1908-1989), который ввел обобщенные решения краевых задач для уравнений в частных производных.

Соболев Сергей Львович
(1908-1989)



Литература:

1) История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Под редакцией А.П. Юшкевича. Т. 3. М., Наука. 1970–1972.

2) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994. С. 238-261

3) Хрестоматия по истории математики. Под редакцией А.П.Юшкевича. М. Просвещение. 1977г. с. 74-85

4) А.П.Юшкевич. К истории спора о колеблющейся струне (Даламбер о применении «разрывных» функций). М., «Наука», Историко-математические исследования, Выпуск XX. 1975г. с.221-232