

История и методология механики

Лекция № 19

Чиненова Вера Николаевна

v.chinenova@yandex.ru

1. Развитие аналитической статистики в трудах ученых Парижской Политехнической школы (Ж. Фурье, П.Лаплас и др.)

2. Дальнейшая разработка принципа виртуальных скоростей в трудах М.В. Остроградского и его школы

Парижская Политехническая школа (1794)

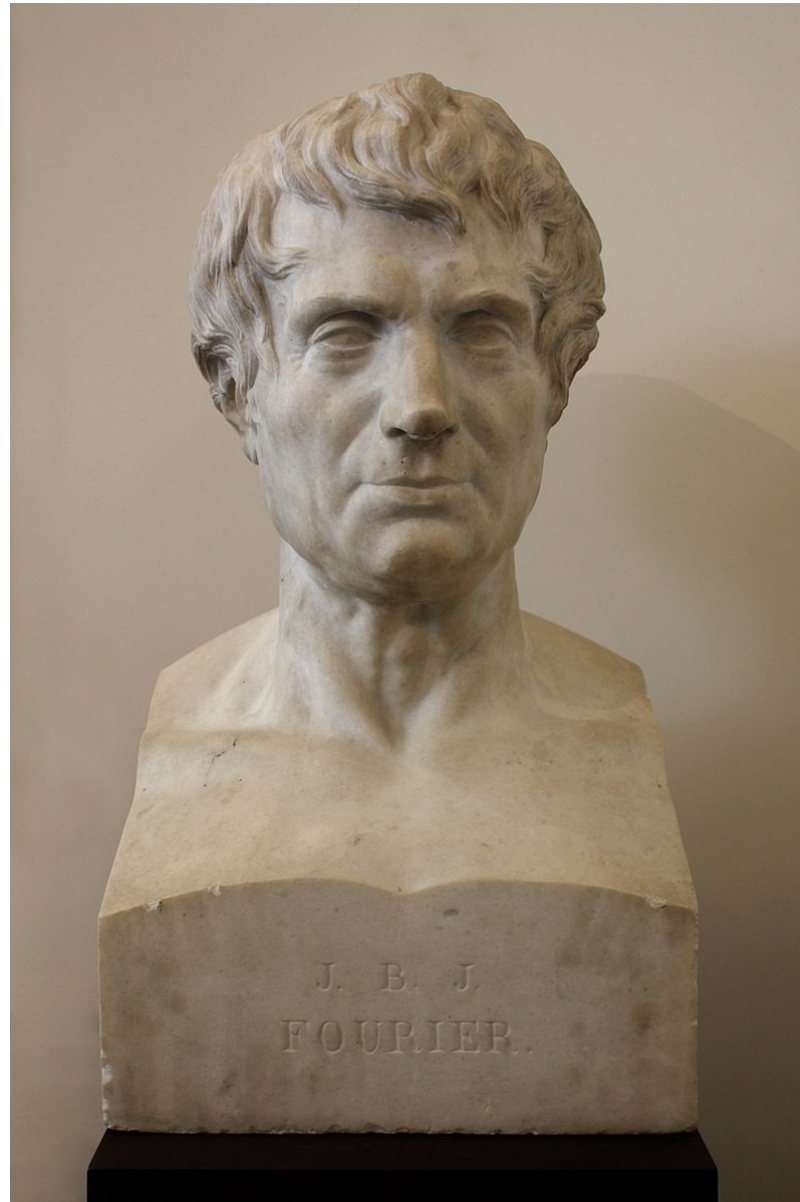
После революционного переворота 1789 г. молодая французская республика оказалась в трудном положении: ей приходилось бороться одновременно и с внутренними, и с внешними врагами.

- В начале 1794 г. положение стало отчаянным, ощущалась острая нехватка квалифицированных научно - технических кадров.
- В марте 1794 г. по инициативе Г. Монжа и Л. Карно Комитетом общественной безопасности была основана Политехническая школа. Преподавателей для нее отбирали из числа лучших ученых, а студентов набирали по конкурсу (они получали неплохую стипендию). В первый год было зачислено 400 студентов разного уровня.
- После трехмесячного курса обучения их разделили на три группы:
 - 1) студенты, которые могли сразу поступить на службу государству,
 - 2) студенты, которым нужен был год обучения, и
 - 3) студенты, которым нужно было два года.

После выхода в свет «Аналитической механики» Лагранжа ряд авторов конца XVIII - начала XIX века посвящают свои исследования вопросу об основных законах статики систем материальных точек со связями, о соотношении между различными вариантами этих законов и в первую очередь о сравнительной значимости закона сложения сил и моментов и закона возможных перемещений.

Мы рассмотрим развитие аналитической статики в трудах ученых Парижской Политехнической школы (Ж. Фурье, П.Лаплас и др.)

Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830)



Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830)

- Жан-Батист Жозеф Фурье родился в 1768 г.
- В 1795 назначен ассистентом Лагранжа и Монжа.
- В 1798 Монж пригласил его для участия в египетской кампании Наполеона. В Египте Фурье был секретарем Египетского института, вел переговоры и занимал дипломатические посты, а также проводил научные исследования.
- После возвращения во Францию в 1801 г. Фурье хотел возобновить свою работу в Политехнической школе, но Наполеон заметил его административный талант и назначил префектом департамента Изер (столица Гренобль).
- В 1808 г. Наполеон пожаловал ему баронство. В 1817 избран в Академию наук; в 1822 г. он стал ее бессменным секретарем.
- Умер в Париже в 1830 г.
- Наиболее известен своими работами по теории теплопроводности.

Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830)

- Статике посвящена самая первая статья Фурье **«Мемуар о статике, содержащий доказательство принципа виртуальных скоростей и теорию момента» (1798).**
- Опубликована в том же выпуске журнала Политехнической школы, в котором впервые обнародовано обоснование Лагранжем принципа виртуальных скоростей при помощи принципа блоков (полиспастов).
- Цель мемуара Фурье состояла в том, чтобы доказать принцип виртуальных скоростей в самом общем виде или, как он писал, «без ссылки на конкретную природу исследуемой системы».

Значение принципа возможных скоростей для механики общепризнано. Фурье ставит вопрос: нельзя ли его вывести из каких то более общих соображений? Он пишет:

«Соглашаясь с тем, что каждая из сил может быть заменена грузом, прикрепленным к тросу, перекинутым через возвращающий шкив, мы получаем, что для каждого перемещения элементов системы, находящейся в равновесии, количество движения поднимающихся грузов равняется количеству движения опускающихся грузов.

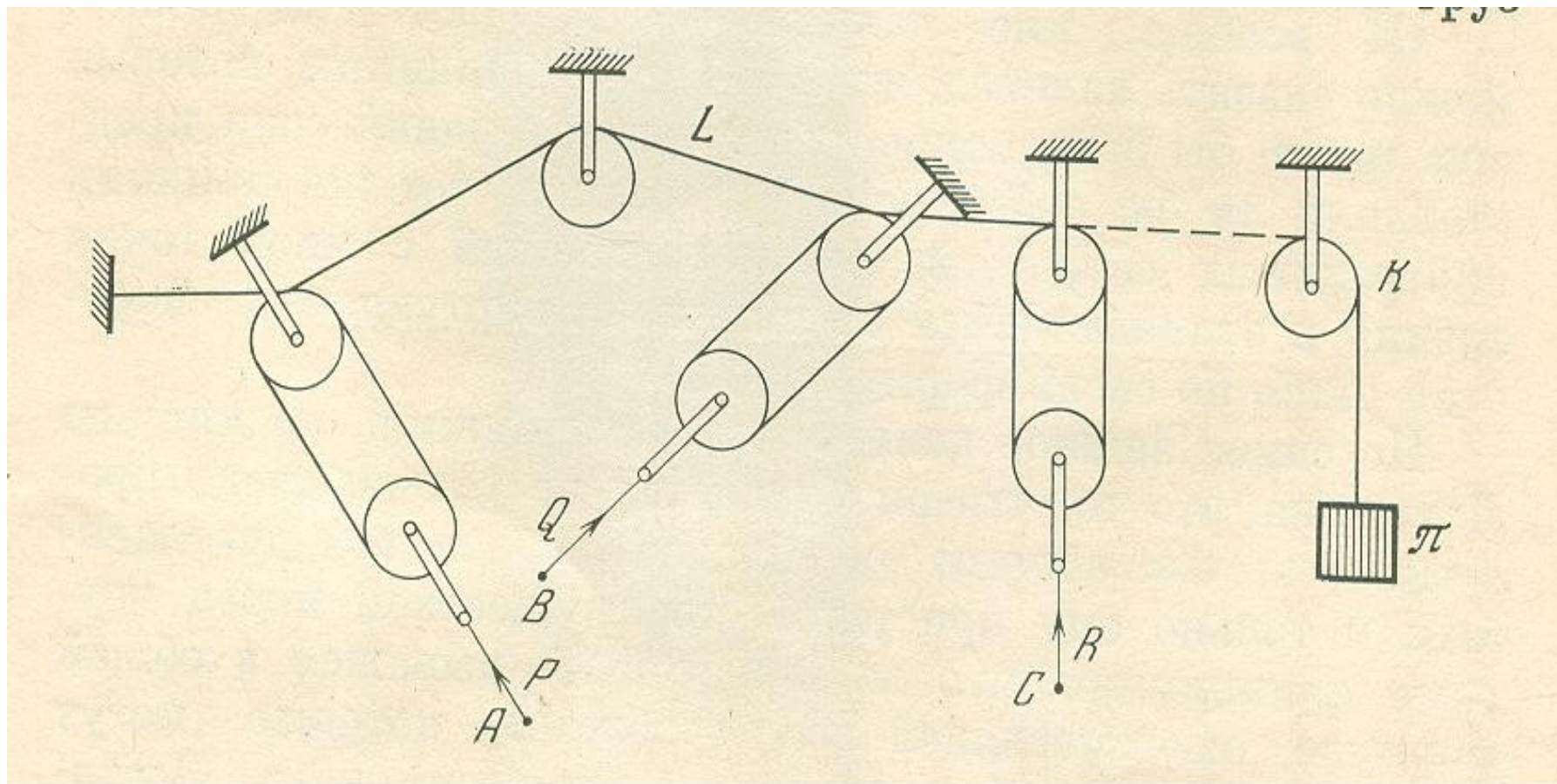
Несмотря на то, что это замечание нельзя рассматривать как (настоящее) доказательство, оно, тем не менее, показывает, каким образом принцип виртуальных скоростей сводится к принципу Декарта или принципу, который применял Торричелли.

Естественно предположить, что и Иоганн Бернулли был знаком с аналогичной конструкцией.

Те же идеи мы находим в работе Карно, напечатанной в 1783 г. под названием “Опыт о машинах вообще”».

По-Лагранжу: Сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots = 0$$



Понятие «**момента силы**» Фурье употребляет в смысле Карно и Лагранжа.

Оригинальным и чрезвычайно ценным было введение Фурье условия равновесия некоторых систем с **неудерживающими связями**.

Пристальное внимание всех, кто занимался исследованием развития учения о связях, вызывал пункт шестой мемуара Фурье. Здесь в очень краткой форме, без обоснования, но вполне отчетливо утверждается, что **условием равновесия гибкой нерастяжимой нити под действием сил, приложенных к ее концам, является неположительность суммы элементарных работ всех сил на возможных перемещениях точек их приложения**.

(М. В. Остроградский позже указывал на первую запись такого условия для систем с неудерживающими связями у Фурье).

Из других примеров подобного рода в том же мемуаре упоминается случай равновесия **двух жестких поверхностей, прижимаемых друг к другу равными и противоположными силами**, приложенными в точке соприкосновения поверхностей перпендикулярно к обеим поверхностям.

- Далее Фурье повторяет, что для систем с освобождающими «условиями» (т. е. связями) **полный момент сил будет неотрицательным** для всех перемещений с освобождением («полный момент сил», по терминологии того времени, означал суммарную работу активных сил, взятую со знаком минус).

(Пункт 11-й Первого раздела)

Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830)

- В рассматриваемом мемуаре Фурье дал правильный анализ **устойчивости** положения равновесия: критерий устойчивости найден им в виде требования **положительности квадратичной части приращения «полного момента сил» на виртуальном перемещении точек приложения сил при равенстве нулю линейной части этого приращения.**
- В современной терминологии такое условие дает минимум потенциальной энергии системы активных сил.

Пьер Симон Лаплас (1749-1827)



Пьер Симон Лаплас (1749-1827)

Пьер Симон, маркиз де Лаплас родился в 1749 г.

Лаплас – один из выдающихся педагогов Парижской Политехнической школы. Научную карьеру начал в Военной школе, где занимал должность профессора (по рекомендации Даламбера).

- В 1773 г. Лаплас стал членом Парижской академии наук, затем членом Сената. После падения Наполеона назначен пэром Франции и возведен в сан маркиза. Умер в Париже в 1827 г.
- Наряду с Эйлером и Лагранжем является основоположником классической небесной механики. Главный труд Лапласа – трактат **«Небесная механика» в 5 томах.**
- В первых двух томах (вышли в 1798-99 гг.) изложены основные законы и математический аппарат классической аналитической механики.

Пьер Симон Лаплас (1749-1827)

Общая формула статики (**принцип виртуальных скоростей**) трактуется Лапласом как следствие уравнений равновесия материальной системы, известных в геометрической статике.

Рассуждение на эту тему содержится в первой книге «**Небесной механики**» Лапласа, называющейся «Об общих законах равновесия и движения».

- Материальную точку механической системы, остающуюся на некоторой поверхности или линии, можно рассматривать как свободную, добавив к действующим на нее силам еще силы реакции поверхности (линии).
- Условие равновесия всех сил в данной точке, мысленно изолированной от других точек системы, записывается в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на данную координатную ось (на основе **принципа сложения и разложения сил геометрической статики**).
- Так получены три уравнения равновесия сходящихся в каждой точке системы сил.

Лаплас утверждает **равенство нулю суммы произведений сил реакций на возможные перемещения точек**.

Объясняет это равенство Лаплас ортогональностью сил реакций поверхности (или двух поверхностей в случае линии их пересечения) к возможным перемещениям точек по своим поверхностям. Таким образом, здесь, видимо, впервые, используется абстракция **«идеальных связей»**.

- Отбрасыванием суммы элементарных работ сил реакций связей на возможных перемещениях точек их приложения Лаплас **получал общую формулу статики Лагранжа**, или аналитическую запись принципа виртуальных скоростей, подчеркивая, что эта формула является простым следствием принципов геометрической статики.

(используем современную терминологию)

Андре Мари Ампер (1775-1836)

- Дж. Максвелл называл Ампера «Ньютоном электричества».
- А.-М. Ампер родился в 1775 г.
- С 1897 – профессор математики в Политехнической школе.
- Член Лондонского королевского общества, Парижской и Петербургской академий наук.
- Статике Ампер посвятил статью **«Общее доказательство принципа возможных скоростей, свободное от рассмотрения бесконечно малых» (1806).**



- Ампер: «Принцип виртуальных скоростей, лежащий в основе этой замечательной работы (“Аналитическая механика” Лагранжа), рассматривался ее автором лишь как отправная точка для вывода следствий. С тех пор стали искать общее доказательство этого принципа. Сам г-н Лагранж свел его к равновесию системы полиспастов, а г-н Карно – к закону равновесия рычага. Г-н Лаплас дал доказательство этого принципа, опирающееся на общие соображения, которые, однако, слишком абстрактны, чтобы быть доступными для начинающих. Я поставил целью дать столь же общее доказательство (как и Лаплас), которое опиралась бы только на теорию составления и разложения сил, приложенных в одной точке, – теорию, которая была бы *свободна от использования бесконечно малых величин*».
- Изложение самого Ампера не отличается, однако, простотой ...
- В статье Ампера мы в очередной раз встречаемся с попыткой – традиционной для механики того времени – максимально упростить вывод принципа возможных перемещений, исключив из него ссылку на инфинитезимальные методы с опорой только на правило составления и разложения сил, которое Ампер считал «наиболее строгим».

Андре Мари Ампер (1775-1836)

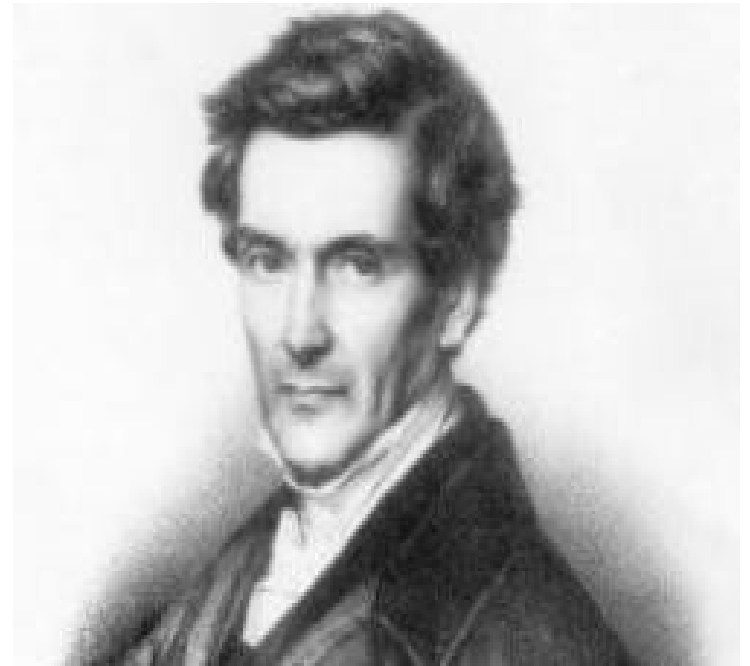
- Вводя последовательность вспомогательных жестких стержней с шарнирами, Ампер добивается того, что вспомогательная система сводится к паре точек, соединенных жестким стержнем, при силах, приложенных вдоль стержня к его концам и равных по величине.

Т.о., доказательство Ампера является лишь вариантом сведения принципа возможных перемещений к принципу сложения и разложения сил.

(Находим это док-во в курсах Н.Д. Брашмана и Н.Е. Жуковского).

Такая же трактовка принципа виртуальных скоростей встречается в сочинениях **Пуассона**. Ученые Парижской Политехнической школы, разрабатывавшие индустриальную или техническую механику, придали энергетическую форму и трактовку величине, называемой ранее *полным моментом сил*. **Г. Кориолис** в «Трактате о механике твердых тел и о расчете действия машин» (1844) называет сумму произведений действующих сил на возможные перемещения точек их приложения по линии действия сил «*работой движения*». Автор указывает, что термин «работа» для той же суммы используется Навье, Прони и другими (например, Понселе, если говорить об ученых первой половины XIX в.).

**С.Д.Пуассон (1781-1840), Ж.В.Понселе (1788-1867),
Г. Кориолис (1792-1843)**

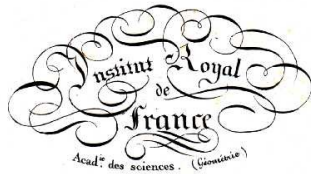


С.Д.Пуассон (1781-1840)



- С.Д.Пуассон - видный деятель Парижской политехнической школы, член Парижской АН, почетный иностранный член Петербургской АН (1826)
- «Трактат механики» (1811)

Луи Пуансо (1777-1859)



POINROT,
(Louis)

Membre de la Légion d'honneur.

Né à Paris, le 3 Janvier 1777, déc. en 1859.

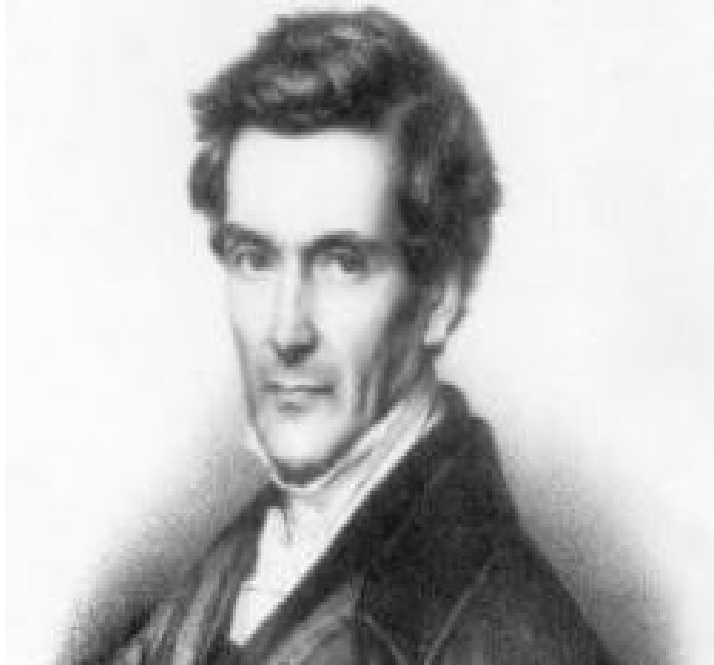
- «Начала статики» (1803)
- «Общая теория равновесия и движения систем»- Журнал политехнической школы (1806)
- Трактовал принцип возможных перемещений как следствие из принципа сложения и разложения сил, выводя его из условий равновесия системы, превращенной в свободную введением сил реакции связей.

Ж.В.Понселе (1788-1867)



- «Курс механики, приложенной к машинам» (1826)
- «Курс индустриальной механики» (1829)
- Вместо лагранжева термина «момент силы» вводит термин «**работа силы**»

Г. Кориолис (1792-1843)



- «Трактат механики твердых тел и вычисления эффекта машин» (1829).
- В этом трактате вводится наименование **суммы произведений возможных перемещений на проекции сил на эти перемещения термином «**работа сил**»** с ее собственным знаком (а не обратным, как у Лагранжа)

**Равновесие системы со связями
в трудах
М.В.Остроградского
(1801-1861)**

М.В.Остроградский (1801-1861)



М.В.Остроградский (1801-1861)

- В 1820 г. М В. Остроградский окончил Харьковский университет, но диплома не получил
- 1822-Париж - его учителями были П.Лаплас, О.Коши, С.Пуассон, Ж.Фурье
«Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне» (1826).

- Родился 12 (24) сентября 1801 года в деревне Пашенная Кобелякского уезда Полтавской губернии, в семье помещика из дворянского рода Остроградских.
- В детстве был чрезвычайно любознателен к естественно-научным явлениям, хотя не проявлял тяги к учёбе.
- С 1816 года был вольнослушателем (с 1817 — студентом) физико-математического факультета Харьковского университета, где учился у Т. Ф. Осиповского.

В 1820 году Остроградский с отличием сдал кандидатские экзамены. Однако реакционная часть харьковской профессуры добилась лишения юноши аттестата кандидата наук и диплома об окончании университета. Мотивировалось это непосещением лекций по богословию. Он так и не получил учёную степень.

В 1822 году Михаил Васильевич, желая продолжить занятия математикой, был вынужден уехать в Париж, где в Сорбоне и Коллеж де Франс продолжал изучать математику, посещал лекции знаменитых французских учёных — [Лапласа](#), [Фурье](#), [Ампера](#), [Пуассона](#) и [Коши](#).

В 1823: приглашён в качестве профессора в коллеж Генриха IV.

1826: первые научные успехи. Остроградский представил Парижской Академии наук мемуар «**О распространении волн в цилиндрическом бассейне**».

Знаменитый французский математик Коши писал об Остроградском: «Этот русский молодой человек одарён большой проницательностью и весьма сведущий».



- В **1828 г.** Остроградский возвращается в Россию и преподает в должности профессора математику и механику в **Корпусе инженеров путей сообщения, в Педагогическом институте, в Главном инженерном училище, в Главном артиллерийском училище, в Морском кадетском корпусе.**
- Научные труды М.В. Остроградского относятся к аналитической и прикладной механике (теория притяжения, гидромеханика, проблемы колебания упругого тела, теория удара обобщение принципа виртуальных скоростей, дифференциальные уравнения механики, внешняя баллистика и др.).
- Он закончил исследование принципа виртуальных перемещений на случай систем с неударживающими связями в 1834г., которое вышло в 1838г. под названием **«Общие соображения относительно моментов сил»**

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Член Петербургской АН (1830; адъюнкт с 1828)
 - Член-корреспондент Парижской АН (1856)
 - Член Национальной академии деи Линчеи в Риме (1853)
- и ряда др. зарубежных академий

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Он закончил исследование принципа виртуальных перемещений на случай систем с неударживающими связями в **1834 г.**, которое вышло в **1838 г.** под названием **«Общие соображения относительно моментов сил»**

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Под термином «**момент сил**» в отличие от Лагранжа и его школы М.В.Остроградский понимал произведение силы на виртуальное перемещение и на косинус угла между ними (в более поздней терминологии это означало **работу сил** на виртуальном перемещении точки ее приложения). Различие с тем, что понимал Лагранж под термином «момент силы» было **в знаке**.

М.В.Остроградский (1801-1861)

Остроградский *расширил* применение принципа виртуальных скоростей, дав новую более общую формулировку принципа:

«Для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы дифференциал $Pdp+Qdq+Rdr+\dots$ не был положительным ни при каком возможном перемещении»

М.В.Остроградский (1801-1861)

- **«Ясно, что для сохранения равновесия этой системы, подверженной действию различных сил, необходимо, чтобы при любом бесконечно малом перемещении системы груз не опускался» (Лагранж)**
- **Однако Лагранж записал только строгое равенство нулю вариации вертикальной координаты груза.**

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Остроградский предложил записывать общую формулу статики в виде:

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots \leq 0$$

М.В.Остроградский (1801-1861)

- **Лагранж разработал алгоритм использования неопределенных множителей Лагранжа в общем случае равновесия системы материальных точек, подверженной ограничению со стороны неудерживающих связей.**

М.В.Остроградский (1801-1861)

- **Метод Остроградского позволяет найти не только величину неопределенного множителя, но и его знак, который был безразличен в случае систем с удерживающими (двусторонними) связями.**

- В 1854 г. выходит «Мемуар о общей теории соударения», в котором дано суммарное изложение общей теории принципа возможных перемещений и аналитической теории равновесия механических систем со связями общего вида.
- Остроградский разработал алгоритм использования неопределенных множителей Лагранжа в общем случае равновесия системы материальных точек, подверженной ограничению со стороны неудерживающих связей.
- Приведем пример, как этот алгоритм работает (из книги: И.А. Тюлина, «История и методология механики», 1979, с. 142).

М.В.Остроградский (1801-1861)

- **Механический смысл
неопределенных множителей -
реакции связей – в этом методе
приобретает особую отчетливость,
так как знак λ
позволяет судить о том, какие из
связей перестают влиять с
некоторого момента времени
(освобождают точку)**

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Приведем пример, как этот алгоритм работает (из книги: И.А. Тюлина, «История и методология механики»).
- Пример: случай равновесия материальной точки на гладкой освобождающей поверхности, например на поверхности гладкой сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

М.В.Остроградский (1801-1861)

Уравнение, которому удовлетворяют координаты материальной точки, запишем в виде:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = C$$

где $C = 0$, если точка находится на сфере, $C > 0$, если точка вне сферы.

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Проверим уравнение связи:

$$2x\delta x + 2y\delta y + 2z\delta z = \delta C$$

δC равно нулю, когда точка на сфере, больше нуля, когда она вне сферы.

М.В.Остроградский (1801-1861)

Условие равновесия точки под действием силы с проекциями, X, Y, Z :

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta\pi$$

где $\delta\pi = 0$ для неосвобождающей связи,
 $\delta\pi < 0$ для случая освобождения точки от
связи.

М.В.Остроградский (1801-1861)

Пусть на точку действует только ее вес,
тогда последнее условие примет вид:

$$-mg\delta z = \delta\pi$$

Умножим вариацию связи на неопределенный множитель Лагранжа и сложим с условием равновесия:

$$2\lambda x\delta x + 2\lambda y\delta y + (-mg + 2\lambda z) \cdot \delta z = \delta\pi + \lambda\delta C$$

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Так как виртуальные перемещения точки, не покидающей сферу, входят в число виртуальных перемещений, правая часть равенства равна нулю из условия неопределенности множителя λ и независимости вариаций координат, следует

$$x = 0, y = 0, 2\lambda z = mg$$

- Этот же случай позволяет получить из уравнения связи $z = \pm R$

М.В.Остроградский (1801-1861)

Рассмотрим теперь равенство $\delta\pi + \lambda\delta C = 0$

Так как $\delta\pi \leq 0$, то $\lambda\delta\tilde{N} \geq 0$

Если связь освобождает, то $\delta\tilde{N} > 0$ и $\lambda > 0$

Следовательно, точка на внешней поверхности гладкой сферы под действием веса может находиться в равновесии только при
т.е. в верхнем положении

М.В.Остроградский (1801-1861)

- Изменение знака λ при обращении этой величины в нуль означало бы, что точка покидает связь (реакция, проходя через значение нуль, должна изменить знак; давление поверхности должно быть заменено натяжением нити).
- Остроградский рассматривает равновесие веревочного многоугольника, имеющего n узлов, в которых приложены заданные силы. Он указывает два метода решения задачи о равновесии гибкой нити, каждый элемент которой находится под действием данных сил.

М.В.Остроградский (1801-1861)

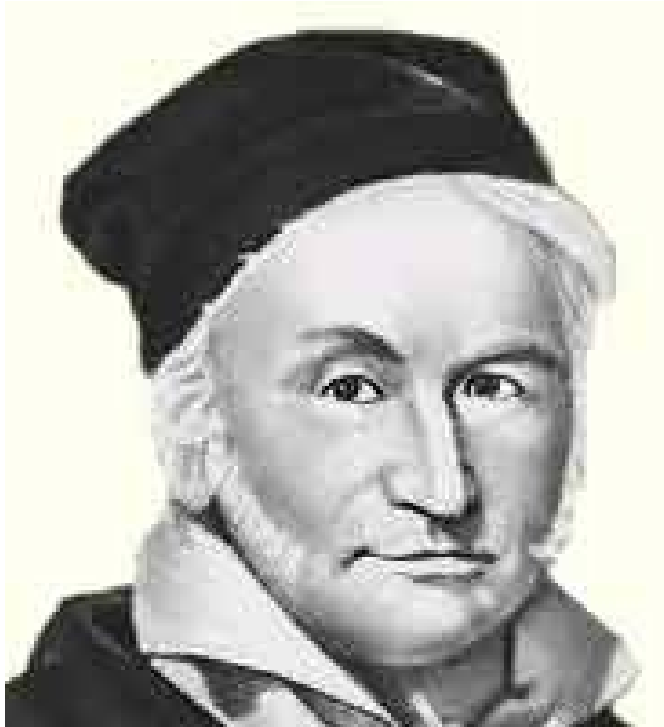
- Ученик Остроградского, его ассистент в Институте инженеров путей сообщения, **Карл Яниш (1813-1872)** в своей работе «**О началах равновесия и движения**» (1838) продолжил развитие и **обобщение принципа виртуальных перемещений**, дав первое строгое доказательство этой формулы статики в общем случае (требование неположительности суммы элементарных работ сил на виртуальных перемещениях).
- Сущность доказательства состоит в сочетании идеи чисто геометрического доказательства принципа возможных перемещений Ампера с трактовкой возможных перемещений Остроградского.

- В середине XIX в. установилась научная переписка между Остроградским и Н. Д. Брашманом.
По выражению Н. Е. Жуковского, Брашман заложил научные основы преподавания механики в Московском университете.
- Таким образом идеи Остроградского отразились и на деятельности ученых Московского университета.
Н. Е. Жуковский писал: «Мой высокочтимый учитель Ф. А. Слудский (*ученик Брашмана*) был носителем идей Лагранжа и Остроградского. На лекциях он часто вспоминал Остроградского и с особым удовольствием излагал в его духе статью об отрицательных моментах (*для неудерживающих связей*) и о начале наименьшего действия».

- Ученики

- Н. Д. Брашман,
В. Я. Буняковский,
И. А. Вышнеградский,
Д. М. Деларю,
Д. И. Журавский,
Н. П. Петров,
Ф. В. Чижов и другие

К.Ф.Гаусс (1777-1855)



- «Об одном новом общем основном законе механики».
- Гаусс пишет об **актуальности обобщения теории принципа возможных перемещений на случай неудерживающих связей.**