

История и методология механики

Лекция № 18

Евгений Алексеевич Зайцев

e_zaitsev@mail.ru

Тема лекции

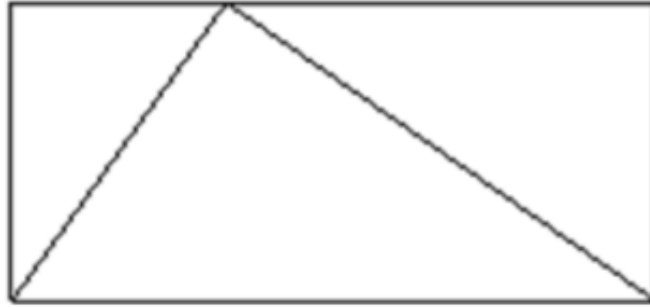
1. Введение. Геометрические и аналитические методы в математике и механике
2. Проблема возникновения аналитической механики
3. Развитие аналитической статики в трактате Л. Карно «Опыт о машинах вообще» (1783), использование заменяющей схемы грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины.
4. Развитие аналитической статики в трактате Лагранжа «Аналитическая механика» (1788). Разработка принципа виртуальных скоростей. Общая формула статики.

Введение

Геометрические и аналитические методы. Математика

Геометрия и алгебра. Элементарный пример

П. Локхард «Плач математика».



Задача: Найти соотношение между площадями треугольника и прямоугольника

Алгебраическое решение

Обозначим стороны прямоугольника a и b . Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab$$

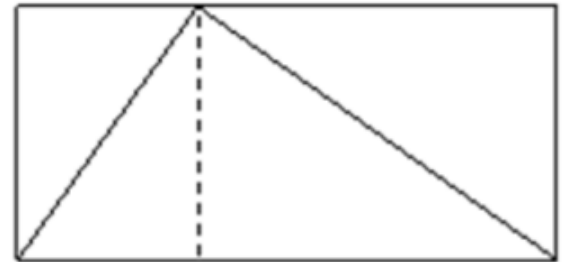
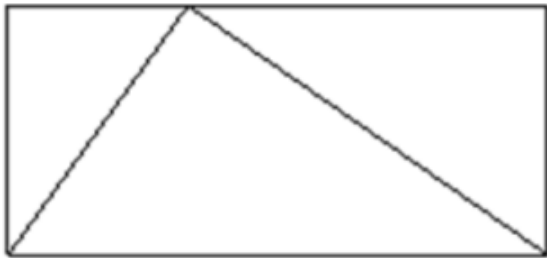
$$S_{\square} = ab$$

Ответ:

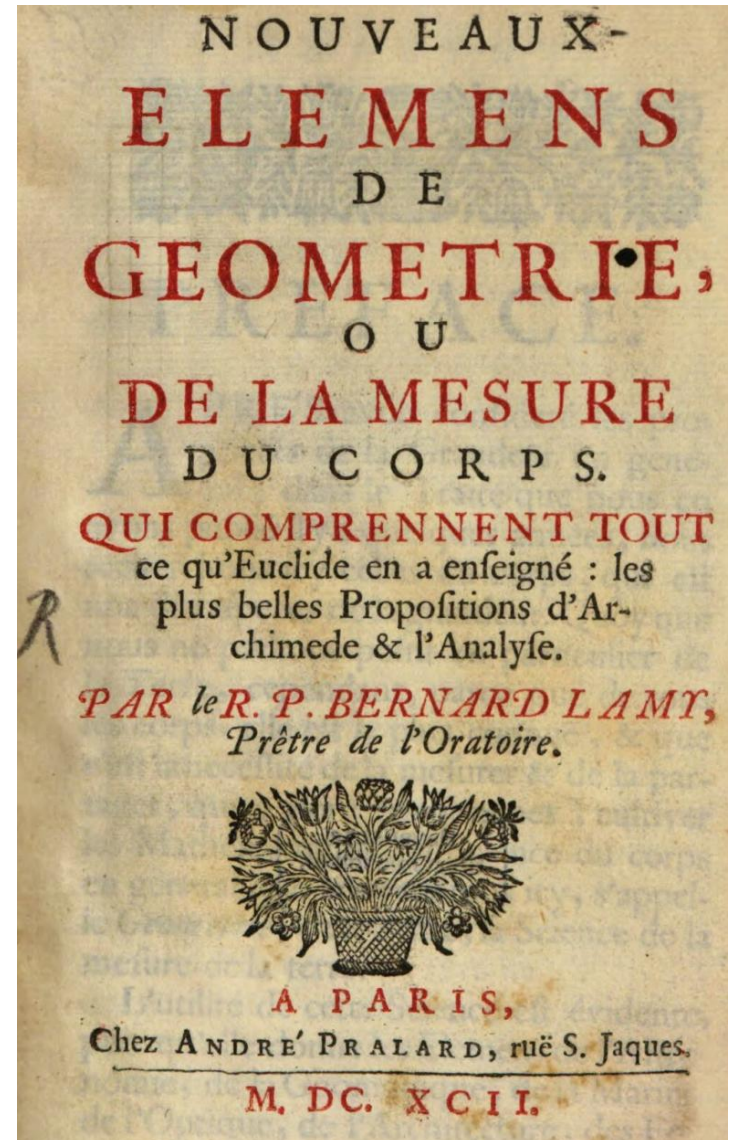
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\square}$$

Геометрия и алгебра. П. Локхард «Плач математика».
Математика как искусство.

Геометрическое решение – при помощи вспомогательного построения



Геометрия и алгебра (аналитическая геометрия).
Bernard Lamy, Nouveaux élemens de geometrie ... (1692)



Аналитический и геометрический метод решения задач (Б. Лами)

Бернар Лами, «Новые начала геометрии» (1692)

Глава XII

«Решение (геометрической) задачи можно попытаться найти, следуя одному из двух путей.

Первый путь - использование «Начал» [Евклида], которые позволяют найти прием, подходящий для данной задачи, но непригодный для других.

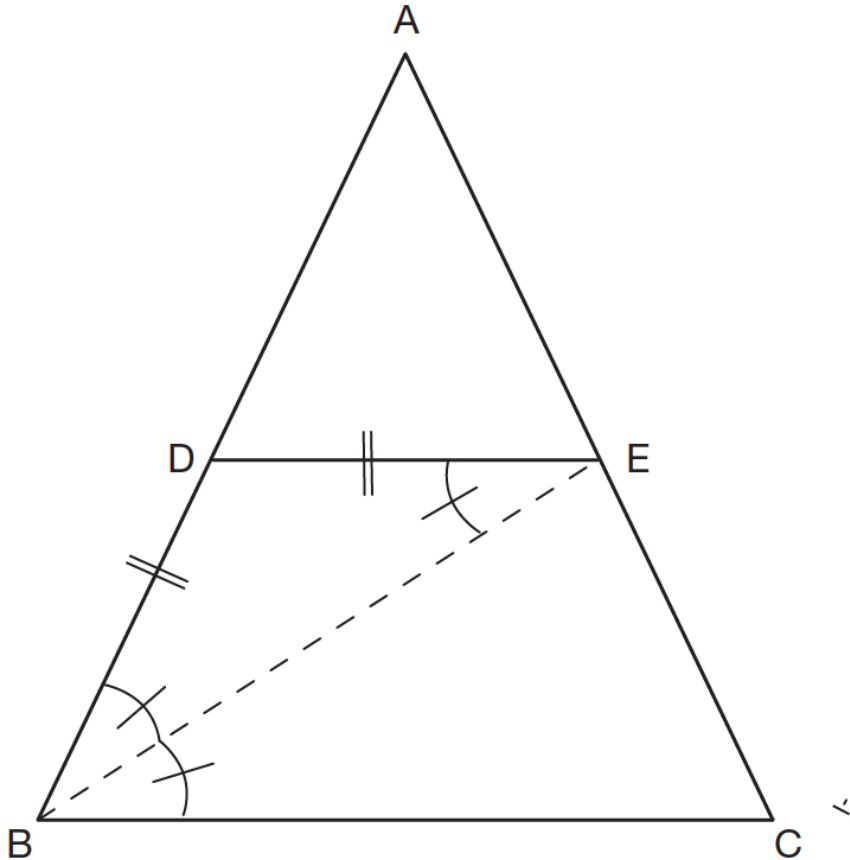
Второй путь – следование порядку, предписываемому Методом; на этом пути искомое находится превосходнейшим образом, ибо он (Метод), будучи общим, охватывает все задачи».

«Начала» Евклида – геометрический метод

«Метод» – приемы аналитической геометрии Декарта, позволяющие свести задачи геометрии к алгебре.

Lamy, B. (1692) Nouveaux élemens de geometrie

Пример: два решения одной задачи – геометрическое и алгебраическое



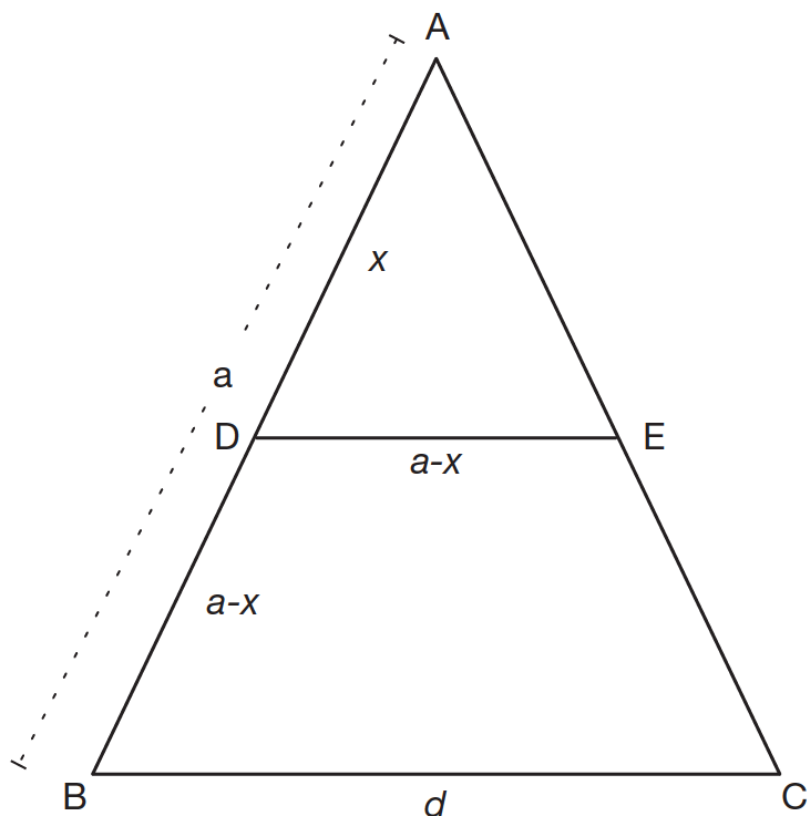
Дано: равнобедренный треугольник ABC.

Требуется: параллельно основанию BC провести прямую DE, пересекающую стороны AB и AC, так, чтобы $DB = DE$.

Геометрическое решение

Вспомогательное построение – проведение биссектрисы угла ABC.

Алгебраическое решение. Лами отдает ему предпочтение.



Обозначим через a величины сторон $AB = AC$, а через d – величину стороны BC . Через x обозначим неизвестную величину AD .

Тогда $BD = DE = a - x$.

Из подобия треугольников ADE и ABC имеем

$$\frac{a}{d} = \frac{x}{a-x}.$$

После преобразования получаем уравнение

$$a^2 = xd + ax = x(d + a),$$

решая которое, находим

$$x = \frac{a^2}{d + a}$$

Педагогическое кредо Бертрана Лами

«...те, кто будет читать мою Работу, должны встать на мое место; должны считать себя не теми, кто просто держит в руках эту Книгу, а Творцами (Auteurs), перед которыми стоит задача открыть то, чему эта Книга предлагает научить. Я вовсе не собираюсь брать на себя роль Учителя; будучи всего лишь провожатым, я подготавливаю ум читающего мои сочинения к тому, чтобы тот мог самостоятельно, обладая даже посредственным вниманием, открывать истину излагаемых мною начал и видеть их естественные следствия».

...ceux qui liront mon Ouvrage, doivent se mettre en ma place; ne considerant pas qu'ils ont un Livre entre les mains, mais se regardant comme Auteurs, & comme ayant à trouver ce que ce Livre propose d'enseigner. Je ne leur servirai que de guide ; je ne fais point le personnage de Maitre, je prepare l'esprit de celui qui lit mes Ecrits de maniere, que de lui-même il peut, avec une médiocre attention, découvrir la vérité des principes que j'expose, & appercevoir les conséquences qui en sont les suites naturelles.

B. Lamy. Traité de la grandeur (1680) p. 1-2.

Аналитическая геометрия Декарта и анализ бесконечно малых Лейбница

Декарт и Лейбниц о недостатках геометрического метода и преимуществе аналитики

Рене Декарт:

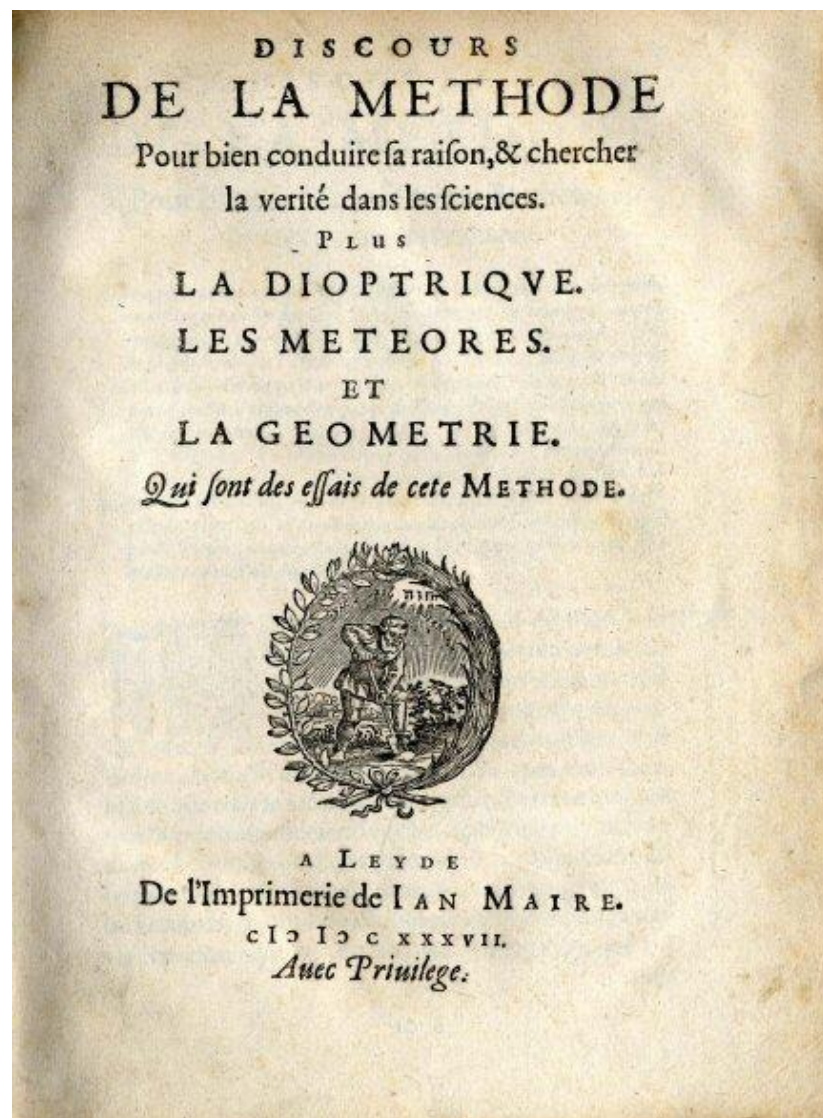
Геометрические решения «столь привязаны к фигурам геометрии, что сильно утомляют воображение».

Р. Декарт, «Рассуждение о методе» (1637)

Г.В. Лейбниц:

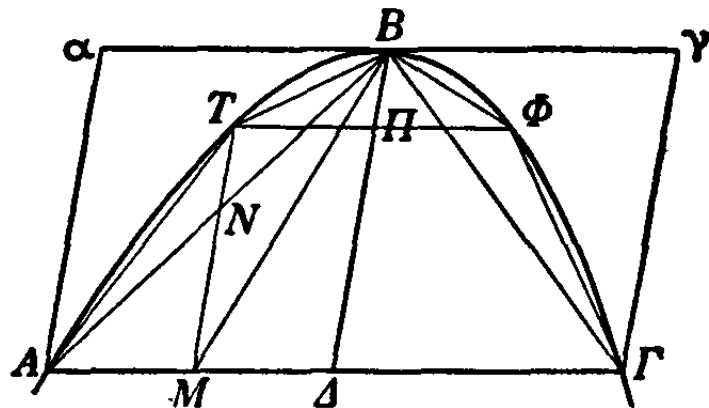
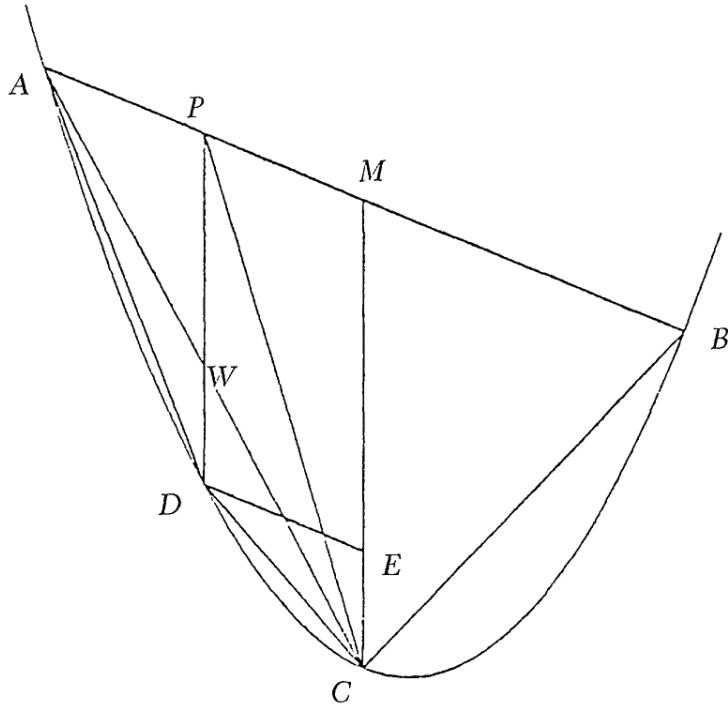
«Это исчисление привлекает меня больше всего тем, что обладает тем же преимуществом перед геометрией Архимеда, что исчисления Виета и Декарта перед геометрией Евклида и Аполлония – оно избавляет нас от использования воображения».

Из письма Х. Гюйгенсу (1692).

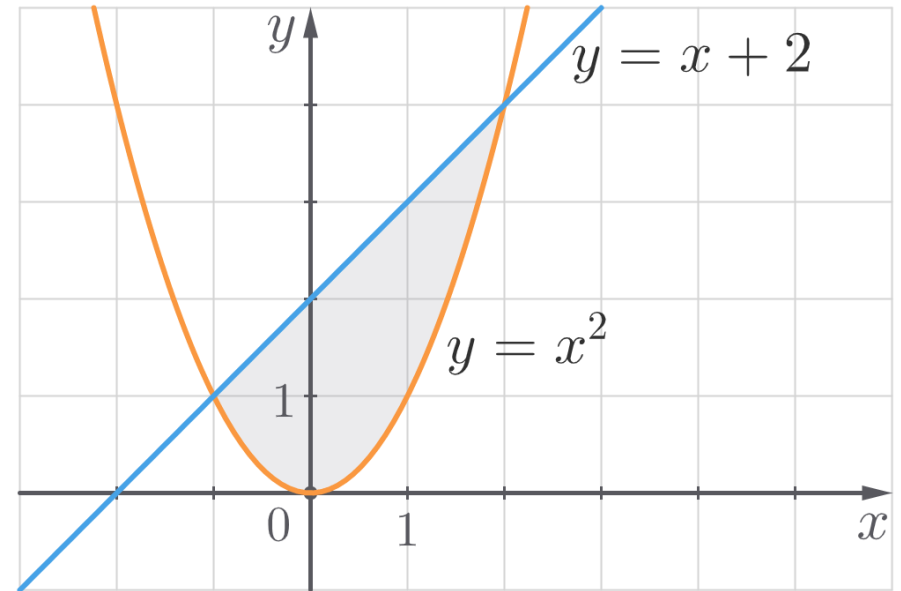


Площадь сегмента параболы

Геометрическое решение Архимеда
(метод исчерпывания)



Аналитическое решение



$$\int_{-1}^2 (x + 2) - \int_{-1}^2 x^2 dx$$

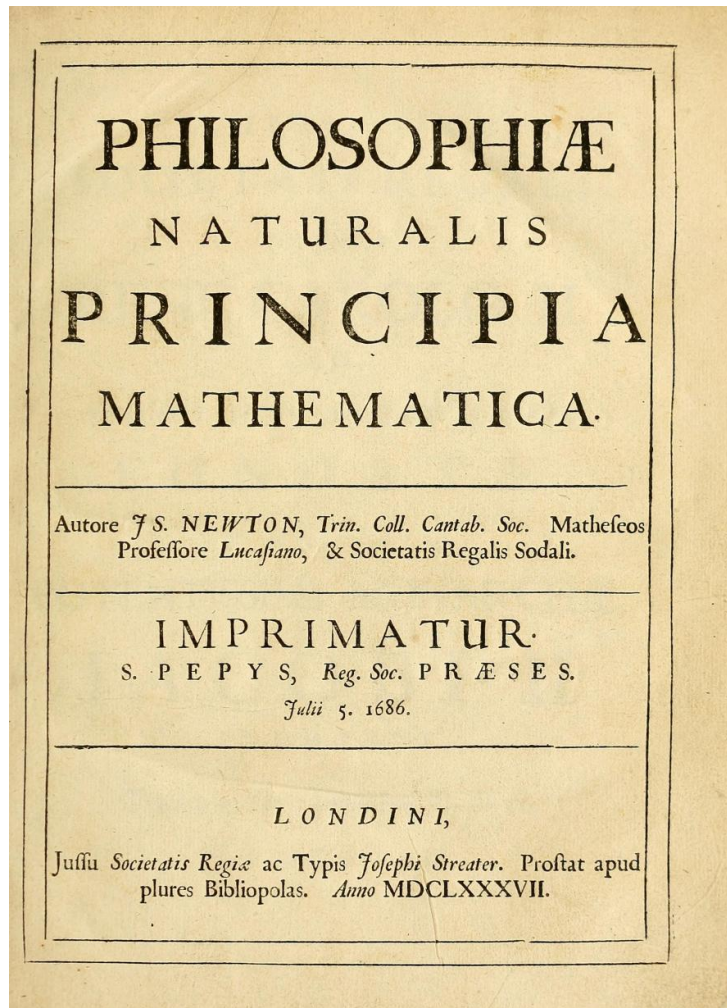
Введение

Геометрические и аналитические методы. Механика

Теоретическая механика. Два подхода – геометрический и аналитический

Классическая механика (XVII в.)

И. Ньютон, «Математические начала
натуральной философии (1687)



Аналитическая механика (XVIII в.)

Ж.-Л. Лагранж, «Аналитическая
механика» (1788)



У истоков аналитической механики.

Л. Эйлер о мотивах перехода к аналитическому описанию движения.

«Однако, то, что сказано о сочинениях, в которых не применяется анализ, особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений (доказанных геометрически – *Е.З.*) , но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет сам к *анализу* и те же предложения не разрешит аналитическим методом.

Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с „Началами“ Ньютона и „Форономией“ Германа; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог.

И вот тогда-то, я попытался, насколько умел, *выделить анализ* из этого синтетического (геометрического – *Е.З.*) метода и те же предложения для собственной пользы *проработать аналитически*; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса» (курсив мой – *Е.З.*).

Л. Эйлер «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736)

Аналитическая механика (о формализме Лагранжа)

«В своей “Аналитической механике” (1788) Лагранж создал новое, необычайно мощное оружие для решения любых механических задач при помощи чистых вычислений, без каких бы то ни было физических или геометрических соображений, при условии, что кинетическая и потенциальная энергии заданы в абстрактной аналитической форме.

Относясь к этому выдающемуся результату со своей обычной скромностью. Лагранж писал в предисловии к своей книге:

“Читатель не найдет в этой книге рисунков. Развитые мною методы не требуют ни каких бы то ни было построений, ни геометрических или механических аргументов — одни только алгебраические операции в соответствии с последовательными едиными правилами”.

Лагранж таким образом создал программу и основания аналитической механики».

Корнелиус Ланцош, «Вариационные принципы механики» (М., 1965), с. 390

Аналитическая механика (о формализме Лагранжа)

«Он (Лагранж) не дает чертежей в своей книге даже там, где они имели бы существенное значение в понимании вопроса (например, в его доказательстве принципа возможных перемещений при помощи полиспастов).

Излагаемые им методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа».

Иван Николаевич Веселовский,
«Очерки по истории теоретической механики» (М., 1974), с. 155.

Два подхода к математизации движения

Классическая механика XVII в.

- ❑ Предмет исследования – линии движения (траектории), выраженные в виде геометрических кривых.
- ❑ Метод – построение траекторий движения при помощи вспомогательных линий. Их исследование методами геометрии.

Аналитическая механика XVIII в.

- ❑ Предмет исследования – функциональные зависимости, выраженные в символике.
- ❑ Метод – составление дифференциальных уравнений, их исследование и решение краевых задач.

Два подхода к математизации движения

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">❑ Классическая механика XVII в. – раздел (инфинитезимальной) геометрии.❑ Отсутствие общих схем решения (каждая задача на геометрическое построение требует особого решения).❑ Свойства движения выводятся из способа построения траекторий. | <ul style="list-style-type: none">❑ Аналитическая механика XVIII в. – раздел математического анализа (дифференциальные уравнения).❑ Наличие общих схем решений (исходя из типов дифференциальных уравнений).❑ Свойства движения дедуцируются из свойств функций, являющихся решением дифференциальных уравнений. Линии движения обычно строятся <i>post factum</i> и в поиске решения не участвуют. |
|---|---|

Геометрический метод в классической механике XVII в.

Схема построения траекторий

Основное положение:

Всякое движение в силовом поле состоит из двух независимых компонент

- ☐ Равномерное перемещение вдоль прямой линии – инерциальное движение.
- ☐ Равноускоренное перемещение вдоль другой прямой под действием силы (эта сила является причиной отклонения от прямолинейного движения по инерции).
- ☐ Траектория строится последовательно путем составления движения из этих двух компонент.

Две центральные задачи механики XVII в.

1. Задача о полете снаряда.

Движение в силовое поле «плоской Земли».

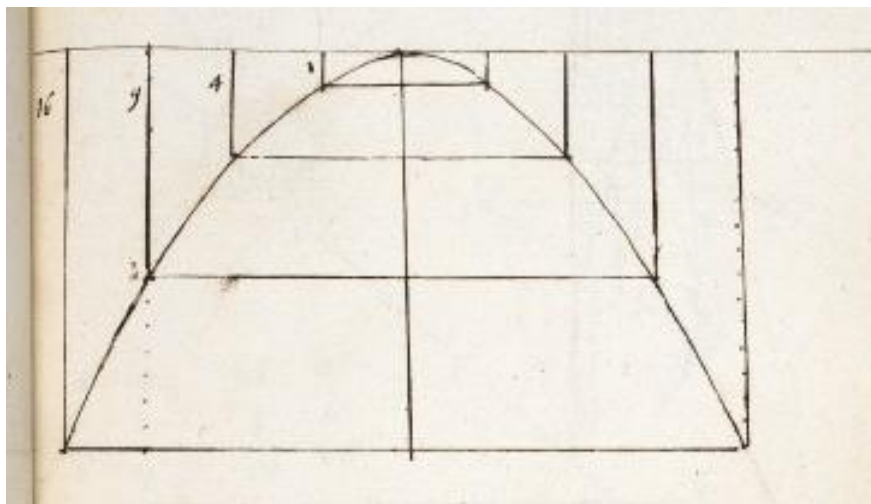
(Т. Гарриот, Галилей, Б. Кавальери, Э. Торричелли)

2. Задача о движении небесных тел.

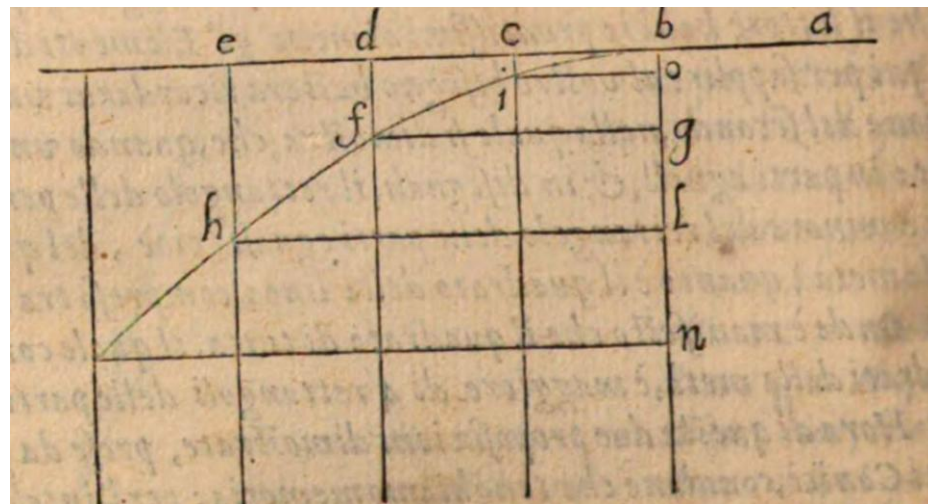
Движение в центральном силовом поле.

(И. Ньютон, «Математические начала натуральной философии», 1687)

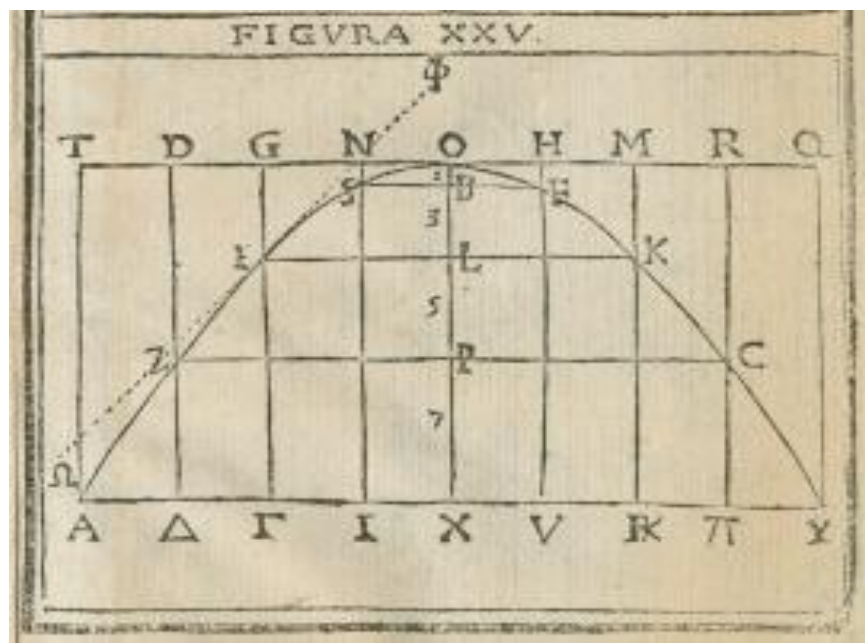
Задача о полете снаряда. Геометрическое решение.



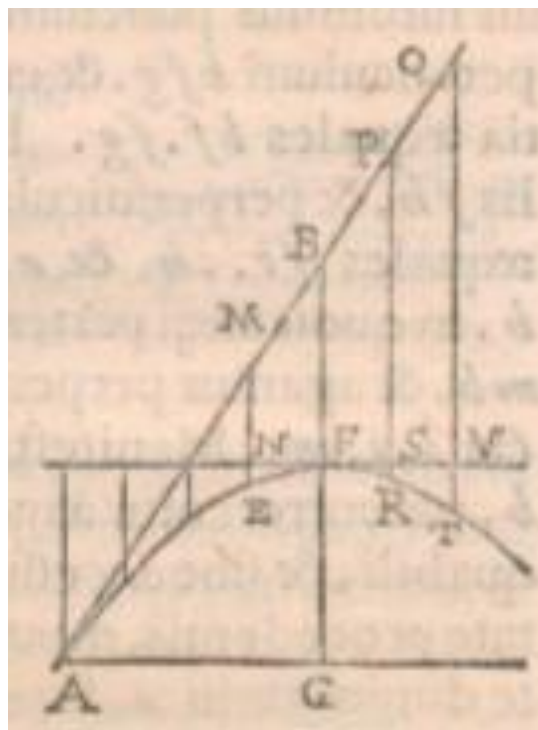
Т. Гарриот (ок. 1610)



Г. Галилей (1638)



Б. Кавальери (1632)



Э. Торричелли (1641)

Задача о полете снаряда. Различные аналитические решения (для сравнения)

1. Дифференциальные уравнения движения (2-ой закон Ньютона)

$$m\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow x \text{ линейно зависит от } t.$$

$$m\ddot{y} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -g \quad \Rightarrow y \text{ зависит от линейной комбинации } t \text{ и } t^2.$$
$$\Rightarrow y(x) - \text{парабола.}$$

2. Уравнения Эйлера-Лагранжа

Функция Лагранжа: $L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = 0, \text{ т.к. } \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0$$

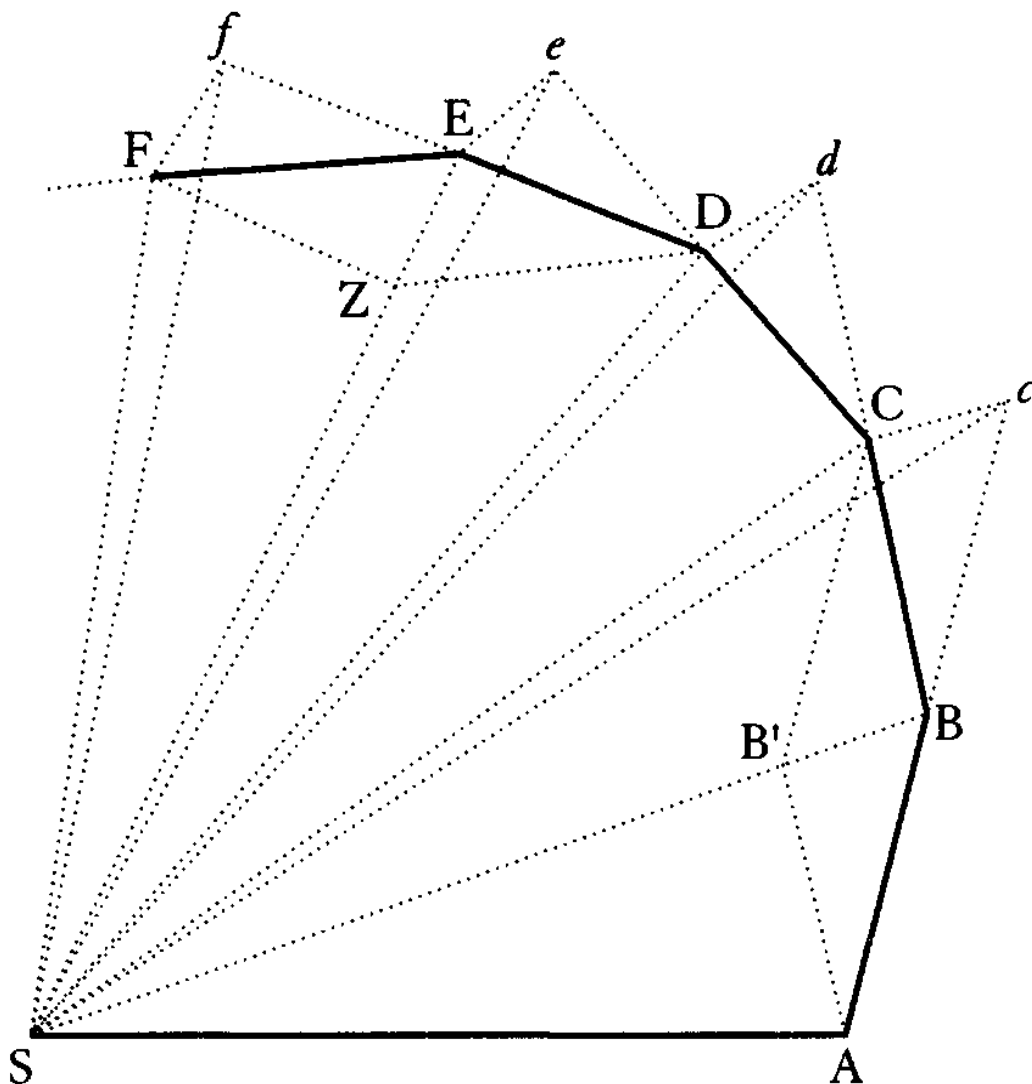
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -g$$

3. Вариационный метод.

В качестве элемента действия берется $mvds$, где $v \sim \sqrt{y}$.

Решается экстремальная задача $\int \sqrt{y} ds \rightarrow extrem$ (Л.Эйлер, 1744).

Движение в поле центральной силы. Закон площадей – прообраз и частный случай общего закона моментов количеств движения .



Обобщение 2-го закона Кеплера

«Площади, описываемые радиусами, проводимыми от обращающегося тела к неподвижному центру сил, лежат в одной плоскости и пропорциональны временам описания их».

И. Ньютон, «Математические начала натуральной философии» (1687). Предложение 1.

«Прекрасная теорема Ньютона о площадях» (Лагранж)

Аналитический вывод закона площадей для движения в поле центральной силы

Формализм Эйлера-Лагранжа

Функция Лагранжа: $L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(r)$

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}, \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} = 0$$

$mr^2\dot{\theta} = const$ – закон сохранения момента импульса
в полярных координатах.

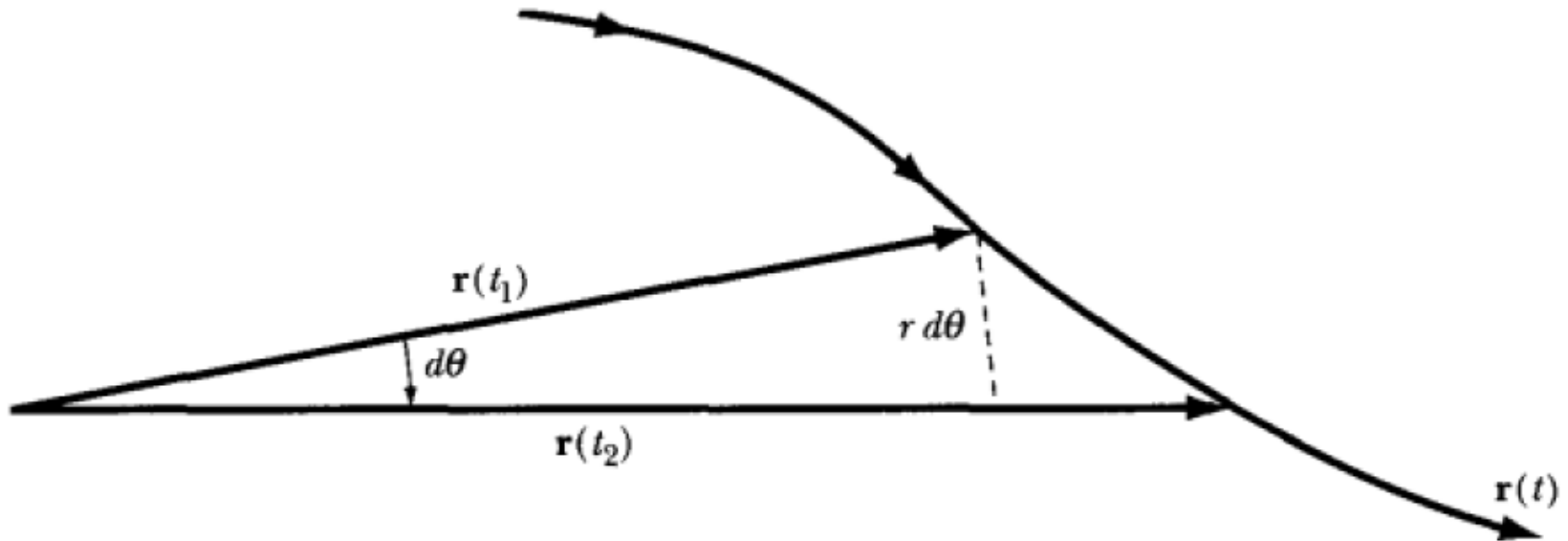
Закон сохранения момента импульса
Разные варианты аналитической записи

$mr^2\dot{\theta} = \text{const}$ – закон сохранения момента импульса
в полярных координатах.

$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const}$ – закон сохранения момента импульса
в декартовых координатах.

$[\mathbf{r}, m\dot{\mathbf{r}}] = \text{const}$ – закон сохранения момента импульса
в векторной форме.

Закон площадей – геометрическая интерпретация закона сохранения кинетического момента



При движении точки по траектории $\mathbf{r}(t)$ радиус-вектор заметает за интервал времени dt площадь

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

После деления на интервал времени dt получаем

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

И значит, площадь A линейно зависит от времени. Откуда следует, что радиус-вектор за равные промежутки времени заметает равные площади.

Часть 2. Возникновение аналитической механики

Две вехи в истории становления аналитической механики

1. Понятие момента импульса и формулировка закона момента импульса – аналога 2-го закона Ньютона
2. Понятие возможного перемещения и его использование в статике и динамике.

Классическая механика Ньютона и аналитическая механика

Постановка проблемы

Э. Мах писал:

«Принципов Ньютона *достаточно*, чтобы без привлечения какого-нибудь нового принципа рассмотреть каждый практически возможный случай механики, будь то из области статики или динамики.

Если при этом возникают затруднения, то это всегда только затруднения математического (формального), но никогда *не принципиального* характера».

Э. Мах «Механика. Историко-критический очерк ее развития» (1883).

Ряд фактов ставит под сомнение эту точку зрения...

Классическая механика Ньютона и аналитическая механика

Постановка проблемы

Сам Ньютон скромнее оценивал свои достижения. В предисловии к «Началам», перечислив задачи небесной механики, которые ему удалось решить, он пишет:

«Было бы *желательно* (!) вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обуславливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел ... стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга.

Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и оставались бесплодными.

Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому *более правильному* (!), изложенные здесь основания доставят некоторое освещение».

Одна из проблем: Второй закон Ньютона и закон моментов количества движения

По-видимому, Ньютон понимал, что законы механики, которые он сформулировал, недостаточны для решения вопросов, связанных с движением реальных, а не точечных масс.

Об этом свидетельствует отсутствие в его работах типичных для механики твердого тела задач таких, как качание физического маятника или качение колеса.

Вопрос: что препятствовало распространению принципов Ньютона на движение твердых тел?

Сравним два закона механики, относящиеся к поступательному движению точечной массы и к вращению тела вокруг оси.

Одна из проблем: Второй закон Ньютона и закон моментов количеств движения

Второй закон Ньютона для точечной массы: ускорение пропорционально величине силы и обратно пропорционально массе тела:

$$a = F / m \quad (1)$$

Закон моментов количеств движения для вращения:

$$\alpha = M / I \quad (2)$$

α – угловое ускорение; M – момент силы; I – момент инерции.

В случае вращения точечной массы m вокруг оси (2) выводится из (1).

Достаточно сделать замену:

$$\alpha = a / r$$

$$M = Fr$$

$$I = mr^2, \text{ где } r \text{ – радиус вращения.}$$

Вывод остается в силе для системы, состоящей из конечной совокупности точечных масс.

Закон Ньютона и закон моментов количеств движения для твердого тела

Вопрос:

Верно ли, что в случае твердого (непрерывного) тела соотношение (2) может быть выведено из (1)?

Отрицательный ответ – Клиффорд Трусделл (1919-2000). Статьи в сборнике:

Truesdell C., Essays in the History of Mechanics (1968) (выложена в Dropbox)

«A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason» (pp. 85-137)

«Whence the Law of Moment of Momentum?» (pp. 239-271)

«Откуда взялся закон момента количества движения?»

Основной вывод Трусделла:

Закон Эйлера – самостоятельный закон, не выводимый из второго закона Ньютона. Решая задачу о движении твердого тела Эйлер расширил список фундаментальных принципов механики.

Значит, заслуга Эйлера не ограничивается приданием механике Ньютона аналитической формы.

NB. Вариант ответа на вопрос Трусделла с т. зрения механики сплошной среды – в статье: «Thence the Moment of Momentum» (2020) [Wolfgang H. Müller](#), [Wilhelm Rickert](#), [Elena N. Vilchevskaya](#) (в интернете)

Задача, поставленная Эйлером. Необходимость нового принципа.

Когда Эйлер приступил к исследованию механического движения, кроме законов Ньютона было еще несколько кандидатов на роль всеобщих принципов механики.

Это – закон сохранения кинетической энергии, принцип Торричелли, усеченные варианты закона виртуальных скоростей

Проблема состояла в том, что ни один из этих принципов не обладал достаточной степенью общности.

Эйлер отмечал этот факт:

«Эти принципы непригодны для исследования движений тел, которые не являются бесконечно малыми.... Ими можно пользоваться, если сведение тела к точке не ведет к грубым ошибкам: так можно поступать, когда линия действия силы проходит через центр тяжести Если же линия силы не проходит через центр тяжести, то мы не можем определить в полной мере результат действия этой силы. Это тем более верно, когда движимое тело несвободно, т.е. связано некоторым препятствием, зависящим от его формы»

«Рассуждение о наилучшей конструкции кабестана» (1745)

Закон сохранения момента количества движения в аналитической механике

Основные вехи. Вопрос об истоках

1717 – первое аналитическое доказательство закона площадей (Яков Германн).

1740 –е гг. получено обобщение закона площадей при решении задачи о движении тел на движущихся поверхностях.

Авторы:

Иоганн и Даниил Бернулли (движущаяся поверхность – наклонная плоскость)

Д. Бернулли – задача о движении шарика во вращающейся трубке. Письма к Эйлеру и трактат «Новая задача механики» (1745). В этой задаче принцип возможных перемещений.

Алекси Клод Клеро

Л. Эйлер «О движении тел по подвижным поверхностям» (1746)

Патрик Дарси – теоретик и практик-артиллерист, изучал и небесную механику (теорию Луны). Обобщенный закон площадей для движения системы материальных точек вокруг неподвижного центра («Динамическая задача», 1752)

Подробности см. И.Б. Погребысский, «Аналитическая механика, XVII в.» / История механики с древнейших времен ... (1971) и «От Лагранжа до Эйнштейна»

Основная проблема

Так что же все-таки послужило истоком аналитической формы закона площадей и закона момента количества движения, а, значит, и всей аналитической механики?

Тезис 1: теоретические изыскания о движении по поверхностям (случай Эйлера, Клеро, Бернулли)

Тезис 2. Астрономия (в частности, движение Луны)

Тезис 3: запросы практики (Дарси)

Вопрос остается открытым.

Аналогичный (неутешительный) вывод будет сделан и в отношении принципа возможных перемещений...

Проблема становления аналитической механики

Принцип возможных перемещений – основа аналитической механики

Его истоки

Предыстория (основные вехи)

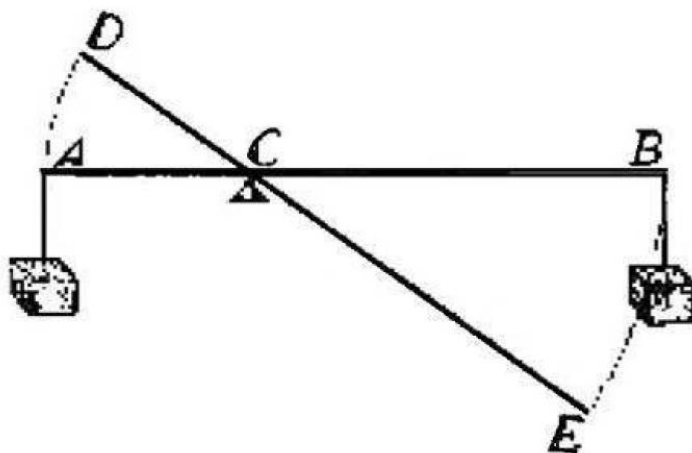
1. Псевдо-Аристотель «Механические проблемы»(под вопросом)
2. Гвидобальдо дель Монте
3. Галилей. Правило рычага и гидростатика
3. Декарт «Золотое правило механики»
4. Ньютон. Теория удара (схолия = поучение к гл. «Аксиомы и законы движения»)
5. Иоганн Бернулли (письмо Вариньону)

История

1. Л. Карно «Опыт о машинах вообще» (1783; 1786; 1803)
2. Ж.-Л. Лагранж «Аналитическая механика» (1788; 1811-15).

Принцип виртуальных перемещений в статике Галилея.
Закон рычага («Механика», ок. 1593)

«Рассмотрим весы, разделенные на неравные части в точке C , и грузы подвешенные к точкам A и B , и относящиеся друг к другу, как расстояния BC и AC ; из уже сказанного очевидно, что один груз уравновесит другой. ... Теперь рассмотрим движение, совершаемое тяжелым телом B , которое опускается в точку E , а также движение, совершаемое другим телом A , которое поднимается в D ; при этом мы без сомнения обнаружим, что путь BE во столько раз больше пути AD , во сколько раз расстояние BC больше расстояния CA Итак, оказывается, что скорость опускающегося тяжелого тела B во столько раз больше скорости поднимающегося тела A , во сколько раз тяжесть последнего превосходит тяжесть первого...»



Принцип виртуальных перемещений (скоростей) Галилей «О телах пребывающих в воде» (1612)

Более точная формулировка принципа возможных перемещений (чем в «Механике»)

Начало:

«Так, например, два груза, равные по абсолютному весу и помещенные на двух равных плечах коромысла весов, остаются в равновесии и не опускаются, поднимая один другой; в самом деле, равенство расстояний их от центра, в котором укреплено коромысло и около которого они вращаются, заставляет эти грузы проходить при движении коромысла в данное время равные пространства, так как они движутся с одинаковой скоростью; следовательно, нет причины, почему бы один груз опустился более другого; поэтому они сохраняют равновесие, и моменты сил их остаются подобными и равными.

Принцип виртуальных перемещений (скоростей) Галилей «О телах пребывающих в воде» (1612)

Продолжение:

«Второй принцип...

Если ... одно плечо коромысла в десять раз длиннее другого, вследствие чего при вращении коромысла около центра конец его проходит в десять раз большее пространство, чем конец короткого плеча, то груз, помещенный на длинном плече, сможет поддержать и уравновесить другой груз, который в десять раз больше него по абсолютному весу; это происходит оттого, что при вращении коромысла меньший груз движется со скоростью в десять раз большей, чем скорость большего груза.

...

Такое соотношение между тяжестью и скоростью существует у всех механических инструментов и принимается Аристотелем как принцип в его «Проблемах механики»»

Далее Галилей дает обоснование закона Архимеда при помощи возможных перемещений.

Вывод: Галилей первым и весьма плодотворно применил принцип возможных перемещений в гидростатике.

Принцип виртуальных скоростей в гидростатике

Лагранж о методе Галилея

Лагранж отмечает: только на основе сформулированного Галилеем принципа возможных перемещений можно связать вместе статику твердых тел и гидростатику.

Он указывает, что Галилей

«выводит непосредственно из этого принципа равновесие воды в сифоне... и доказывает подобным же образом равновесие жидкостей и погруженных тел...»

Рис. см. далее (Торричелли, Паскаль)

Литература: Е. Дюринг, пар. 43, с. 79 sq.

Э. Торричелли (1608-1647)
Портрет кисти Л. Липпи (ок. 1647)



Принцип Торричелли

Формулировка принципа (premessa):

«Два тяжелых тела (due gravi), соединенные вместе, не могут двигаться сами без того, чтобы их общий центр тяжести не опускался.

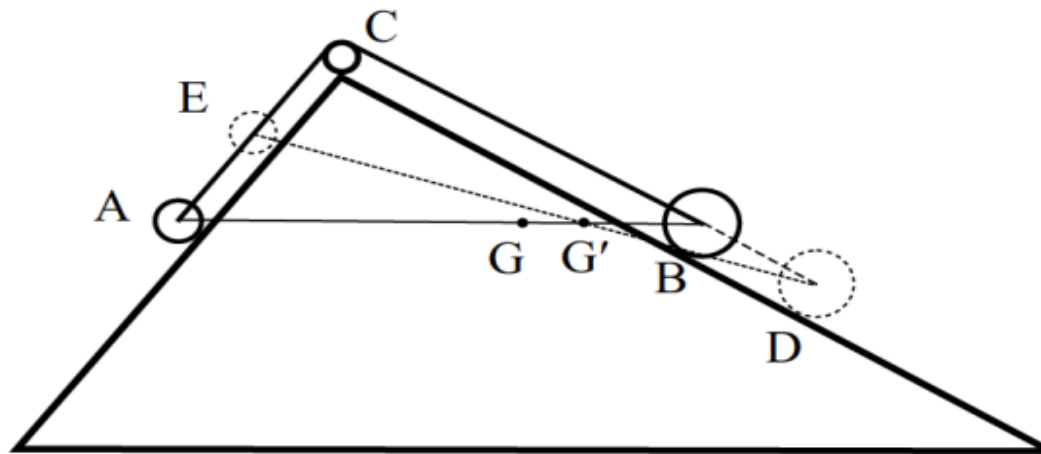
Обоснование

В самом деле, когда два тяжелых тела связаны друг с другом так, что движение одного влечет за собой движение другого, — безразлично, получается ли такая связь посредством весов, блока или другого механизма, — оба будут вести себя словно один груз, состоящий из двух частей; но такой груз никогда не придет в движение без того, чтобы его центр тяжести не опускался.

Стало быть, если груз расположен так, что его центр тяжести никак не может опускаться, он наверняка пребудет в покое в том положении, которое он занимает»

Э. Торричелли «О движении естественно падающих и брошенных тел» (1644)
(Opere scelte, p. 158).

Как работает принцип Торричелли
Закон равновесия тел на наклонной плоскости (р. 159)



Предложение 1.

«Если два груза расположены на двух плоскостях разного наклона, но одинаковой высоты, и если веса этих грузов стоят друг к другу в том же отношении, что и длины этих плоскостей, момент обоих грузов будет одинаковый».

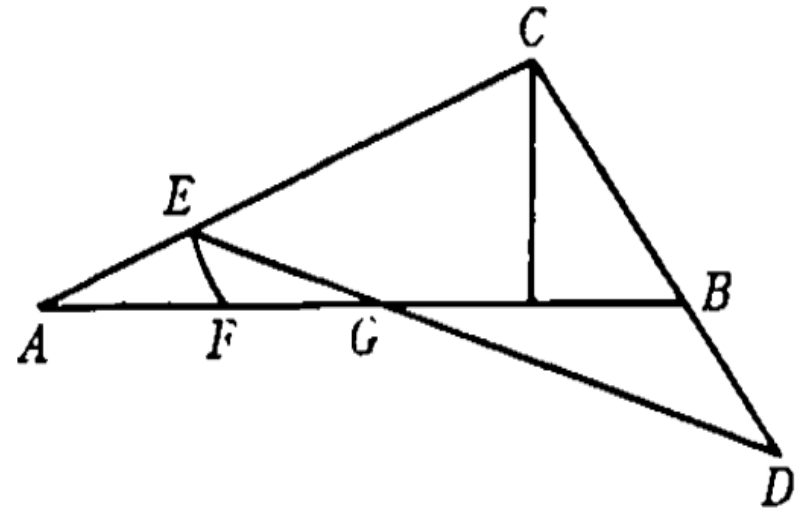
Структура геометрического доказательства

Рисунок, который Торричелли использует для доказательства.

В основе доказательства – подобие двух пар треугольников:

$$\triangle AEF \sim \triangle ACB$$

$$\triangle EFG \sim \triangle DBG$$



Предложение 2 (следствие).

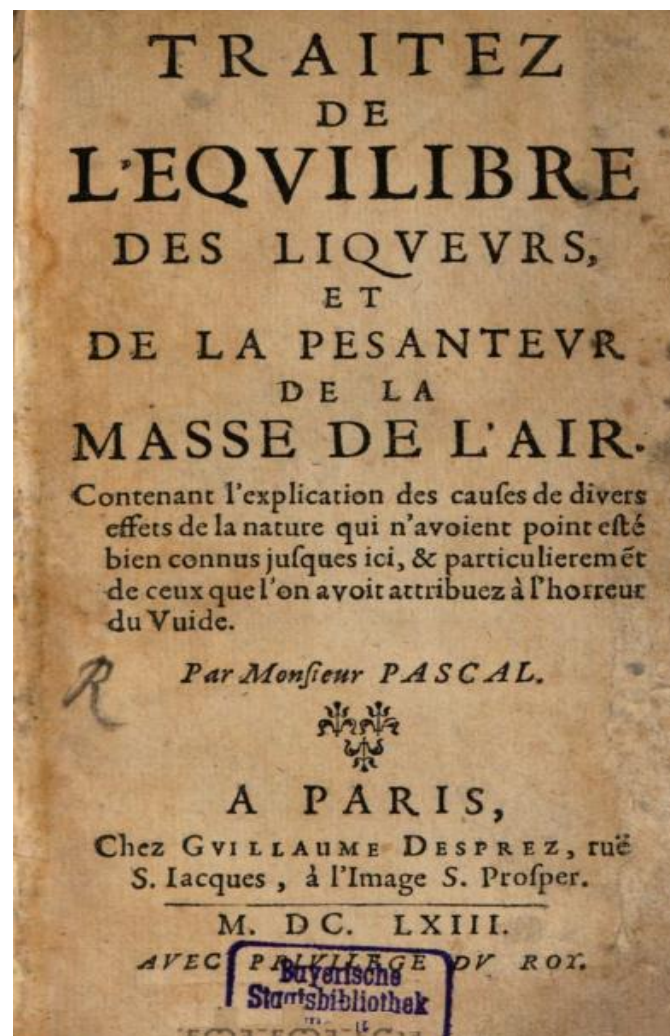
«Моменты тел, имеющих одинаковый вес, на разных наклонных плоскостях одной и той же высоты обратно пропорциональны длинам этих плоскостей».

Блез Паскаль (1623 –1662)

Портрет кисти неизвестного
художника (XVII в.)



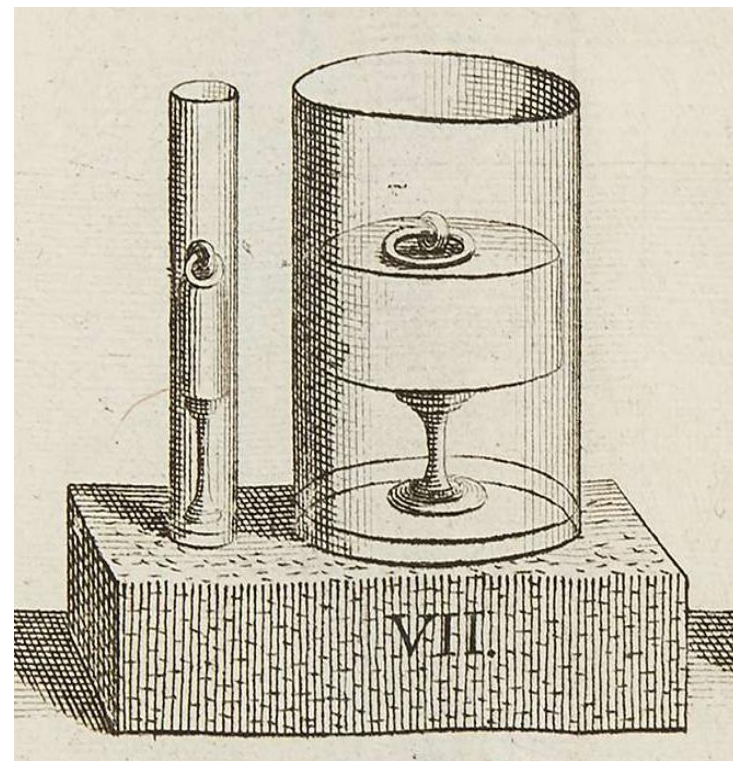
«Трактат о равновесии жидкостей» (1663)



Паскаль. Два «правила» (закона) для жидкостей в сообщающихся сосудах

1. «Надо признать, что в этой новой машине проявляется тот же постоянный закон, который наблюдается и во всех прежних, как то: рычаге, блоке, бесконечном винте и т. д., и который заключается в том, что путь увеличивается в той же пропорции, как и сила. Ибо очевидно, что если одно из этих отверстий во сто раз больше другого, то человек, который давит на малый поршень и опускает его на дюйм, вытолкнет другой поршень лишь на одну сотую часть дюйма».

2. «Вот еще доказательство, которое будет понятно только одним геометрам и может быть опущено другими. Я принимаю за принцип, что. никогда тело не движется под действием своего веса без того, чтобы центр тяжести его не понижался. Отсюда я вывожу, что два поршня, изображенные на фиг. VII, находятся в равновесии».



Лазар Карно (1753-1823)

Развитие аналитической статики в трактате Л. Карно «Опыт о машинах вообще» (1783), использование заменяющей схемы грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины.



Лазар Карно (1753-1823)

Л. Карно (1753–1823), по-видимому, сделал первую попытку обоснования и аналитической записи принципа виртуальных скоростей.

1783г. – «Опыт о машинах вообще» теория равновесия и движения механической системы, которую Карно называет «машиной».

1803г. – «Общие принципы равновесия и движения» (3-е издание)

Вывод условия равновесия (а затем и условия движения) обобщенной машины или механической системы со связями методом расчета баланса виртуальной мощности.

Карно вводит вместо сил, действующих в машине, заменяющую схему грузов, производящих посредством нитей в точках приложения сил те же действия, что и сами силы.

Понятие «геометрическое движение» (введено Карно) соответствует абстракции виртуального перемещения точки или бесконечно малого ее перемещения, допустимого связью в данный момент времени.

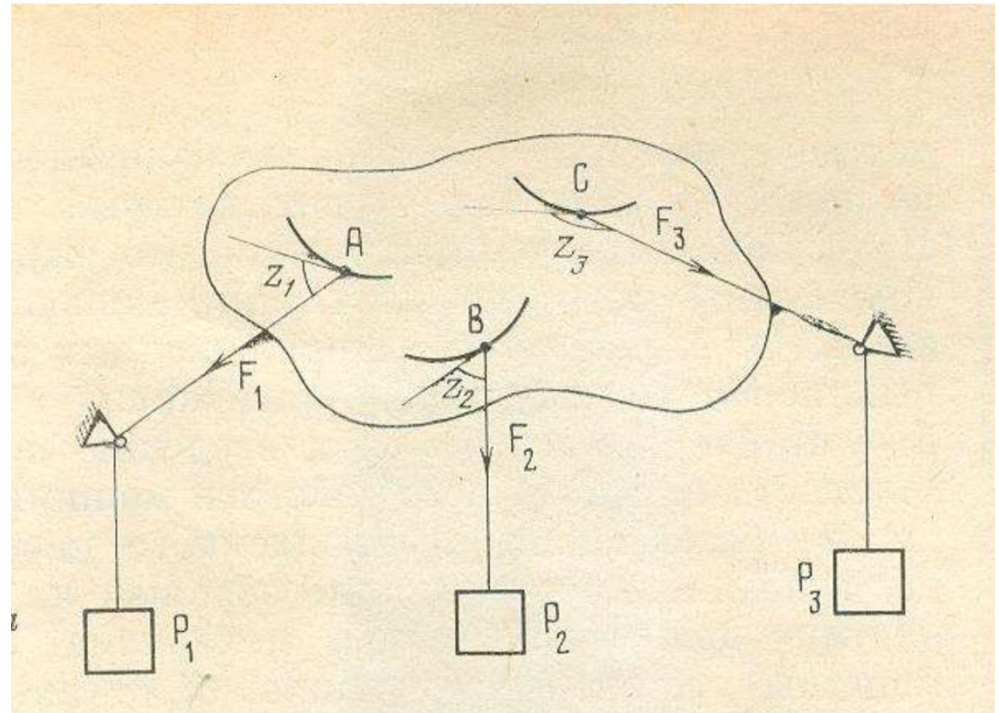
Л. Карно «Опыт о машинах вообще» (1783).

Принцип возможных перемещений. Заменяющая схема грузов

$$\sum F_i \cdot u_i \cdot \cos z_i = 0$$

Пусть в некоторой точке М приложена сила F; в первое мгновение после нарушения равновесия точка М имела бы «геометрическое движение» (т. е. перемещение, допустимое связью) со скоростью u.

Угол между направлением силы F и скоростью u обозначен через z. Вместо силы в той же точке, по схеме Карно, подводится нерастяжимая невесомая нить по направлению действия силы F.

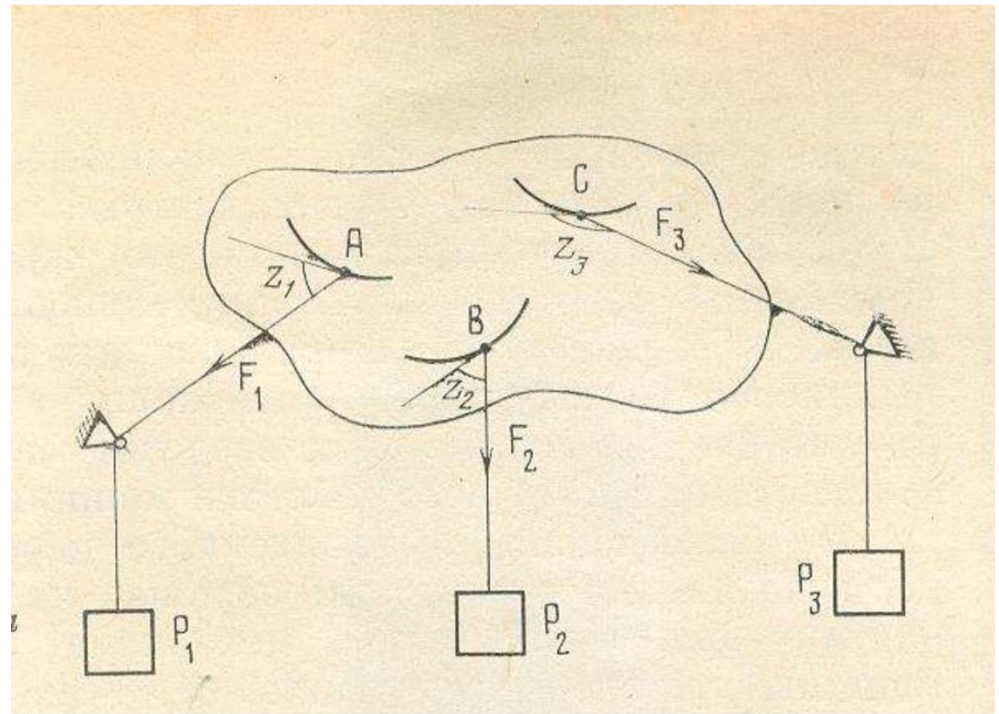


Л. Карно «Опыт о машинах вообще» (1783).

Принцип возможных перемещений. Заменяющая схема грузов

К свободному концу нити, свисающей после огибания идеального направляющего блока (дающего нити нужное направление в точке M), подвешен груз P такой же величины, как и сила F. Так поступает Карно в каждой точке системы. В результате он приходит к системе грузов, связанных посредством частей машины, в точках которой присоединены нити, несущие грузы. Равновесие полученной системы грузов трактуется с помощью принципа Торричелли о наинизшем положении центра тяжести системы.

$$SF_i \cdot u_i \cdot \cos z_i = 0$$

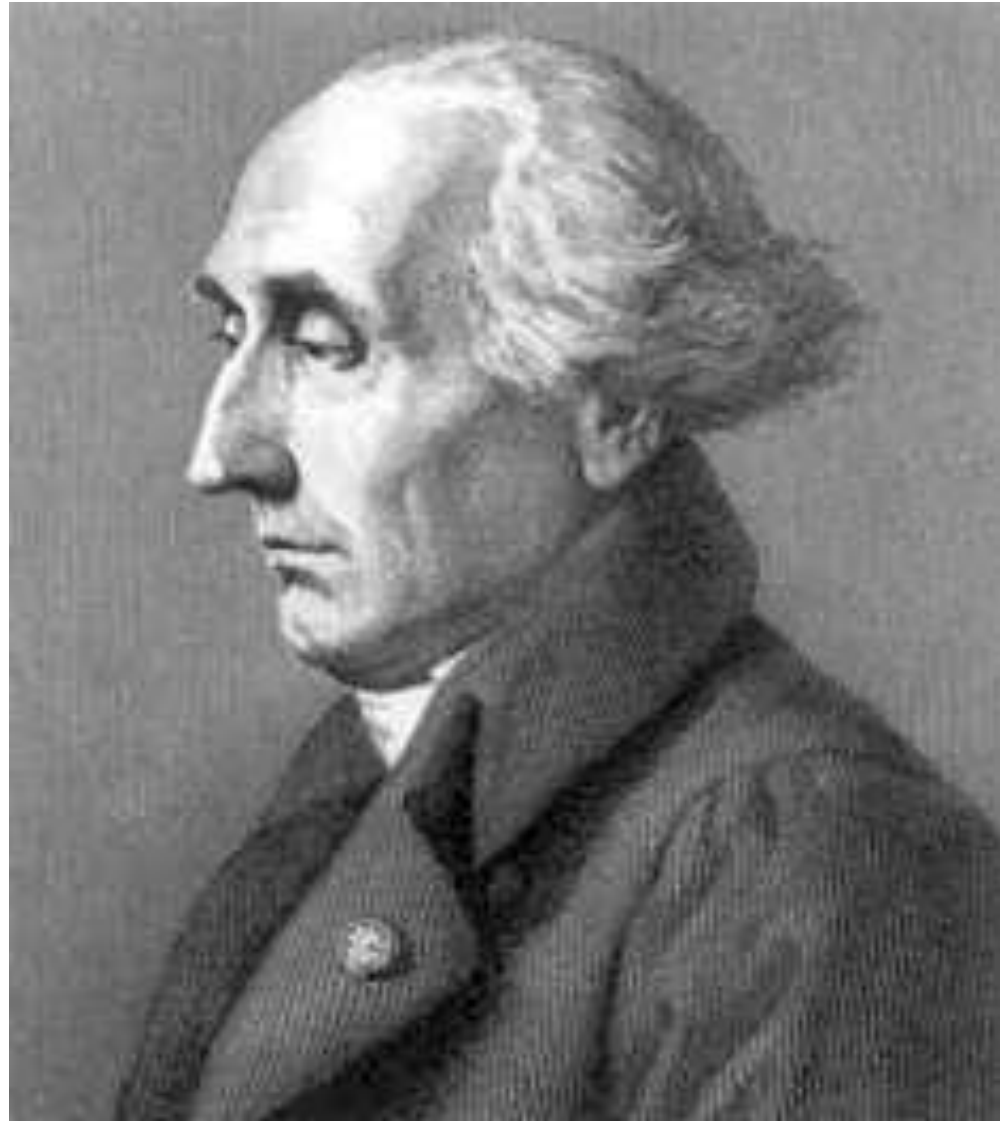


Жозеф-Луи Лагранж (25.01.1736-10.04.1813)

Развитие аналитической
статики в трактате Лагранжа
«Аналитическая механика» (1788).

Разработка принципа
виртуальных скоростей.

Общая формула статики.



Лагранж как личность

10 апреля 1813 г. Лагранж умер.

Деламбр вспоминает, с каким удивительным умиротворением встретил он свой последний час:

«Я почувствовал, что умираю; мое тело ослабело мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий (...)

Я завершил свой путь; я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить свой путь».

Из книги: С.П. Гиндикин «Рассказы о физиках и математиках» (2006)

Ж.-Л. Лагранж «Аналитическая механика» (1788)

О замысле книги словами автора: «Имеется уже несколько руководств по механике, но план этого сочинения совершенно новый. Я имел в виду привести всю теорию этой науки и искусство решения относящихся к ней задач к общим формулам, простое развитие которых давало бы все необходимые для решения всякой задачи уравнения. Я надеюсь, что тот способ, которым я старался этого достигнуть, не оставит желать ничего большего». «Это сочинение, кроме того, будет полезно и в другом отношении: оно объединит и представит с общей точки зрения различные до сих пор уже найденные принципы, служащие для решения вопросов механики, покажет их взаимную связь и зависимость и даст возможность иметь суждение об их верности и области их применимости».

Далее, об особенностях изложения:

«В этом сочинении нет чертежей. Методы, в нем излагаемые, не требуют ни геометрических построений, ни механических рассуждений, для них требуются лишь алгебраические операции, подчиненные правильному и однообразному ходу. Любители анализа с удовольствием увидят, что механика становится новой его отраслью, и будут мне признательны за такое расширение его области».

Принцип виртуальных скоростей. Лагранж

Формулировка (словесная)

«Если какая-либо система произвольно большого числа тел, или точек, на каждое из которых действуют любые силы, находится в равновесии, и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, — будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными».

3. Принцип виртуальных скоростей

Общие замечания

«И вообще, мне кажется, можно сказать наперед, что все общие принципы, которые еще могли бы быть открыты в учении о равновесии, представили бы собою не что иное, как тот же самый принцип виртуальных скоростей, рассматриваемый с иной точки зрения и отличающийся от принципа виртуальных скоростей лишь по своей формулировке.

Однако сам по себе этот принцип является не только очень простым и очень общим; он обладает еще и тем драгоценным и единственным преимуществом перед другими принципами, что он может быть выражен в общей формуле, охватывающей все проблемы, которые могут быть поставлены по вопросу о равновесии тел».

Общая формула статики для равновесия любой системы сил и метод применения этой формулы.

«Общий закон равновесия машин заключается в том, что силы относятся друг к другу обратно отношению скоростей точек, к которым они приложены, причем скорости должны измеряться по направлению этих сил.

В этом законе заключается положение, которое обычно называют **принципом виртуальных скоростей**.

Как мы показали в предыдущем разделе, этот принцип уже давно известен в качестве основного принципа равновесия, в силу чего его можно рассматривать как своего рода аксиому механики.

Статика. Раздел II (продолжение)

«Допустим, что силы P, Q, R , действующие по определенным направлениям, взаимно уравнивают друг друга.

Представим себе, что из точек, к которым приложены силы, отложены отрезки, равные $p, q, r, \dots$ и расположенные по направлению этих сил.

Обозначим через $dp, dq, dr, \dots$ вариации, или дифференциалы, этих отрезков, поскольку они могут получиться в результате какого-либо бесконечно малого изменения положения различных тел или точек системы.

Ясно, что эти дифференциалы выразят пути, которые будут пройдены в одно и то же мгновение силами $P, Q, R, \dots$ по своим собственным направлениям, если допустить, что эти силы стремятся удлинить соответственно отрезки $p, q, r, \dots$. Таким образом, дифференциалы $dp, dq, dr, \dots$ будут пропорциональны виртуальным скоростям сил $P, Q, R, \dots$ и, следовательно, могут быть для простоты подставлены вместо этих скоростей».

Статика. Раздел II (окончание)

Итак, для равновесия любого числа сил P, Q, R , направленных по линиям $p, q, r \dots$ и приложенных любым образом, мы имеем уравнение вида

$$Pdp + Qdq + Rdr \dots = 0.$$

Это общая формула статики для равновесия любой системы сил.

Мы назовем каждый член этой формулы, например Pdp , моментом силы P и примем слово «момент» в том смысле, какой ему придал Галилей, т. е. как произведение силы на ее виртуальную скорость. Тогда приведенная выше общая формула статики гласит:

Сумма моментов всех сил равна нулю.»

3. Принцип виртуальных скоростей

Его обоснование.

«Что касается природы принципа виртуальных скоростей, то следует признать, что этот принцип сам по себе *не является настолько очевидным,, чтобы его можно было выдвинуть в качестве начального принципа*; но его можно рассматривать как общее выражение законов равновесия, выведенных из двух принципов, которые были нами изложены выше.

Точно так же при обоснованиях, которые приводили для этого принципа, его всегда, прямо или косвенно, ставили в связь с указанными принципами.

Но в статике существует еще и другой общий принцип, *независимый* от принципов рычага и сложения сил, хотя механики обычно и относят его к ним, — который представляется нам естественным основанием для принципа виртуальных скоростей; его можно назвать *принципом блоков*».

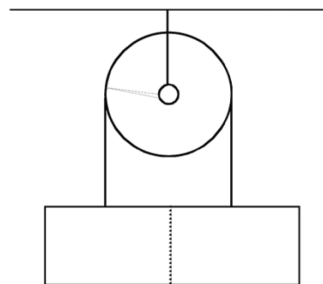
Затем Лагранж (красиво и наглядно, но без чертежа!) обосновывает принцип возможных скоростей при помощи принципа блоков (используя систему полиспастов).

См. В.Л. Кирпичев «Беседы о механике» (М., 1950), с. 20-25.

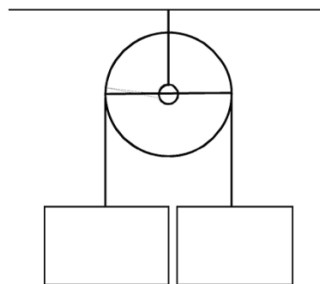
(книга выложена в Dropbox).

Принцип блоков (и его наглядная иллюстрация)

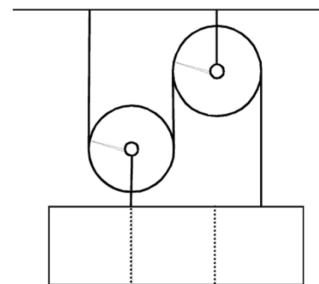
В системе из неподвижных и подвижных блоков отношение между силой движения и силой сопротивления равно $1/n$, где n число нагруженных нитей



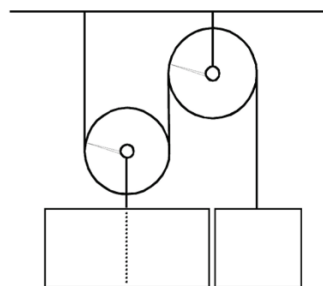
a



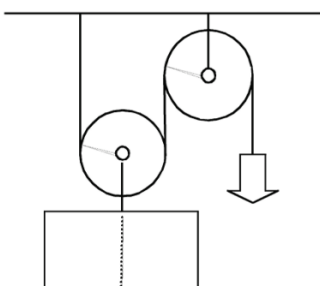
b



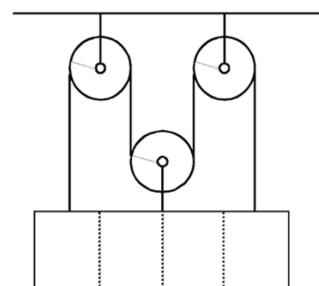
c



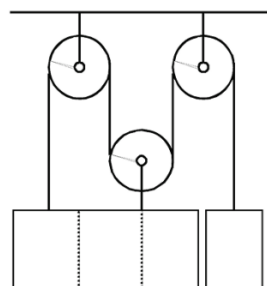
d



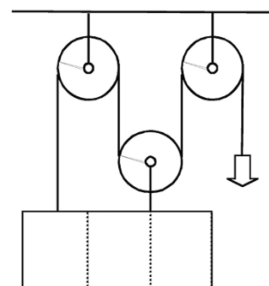
e



f



g



h

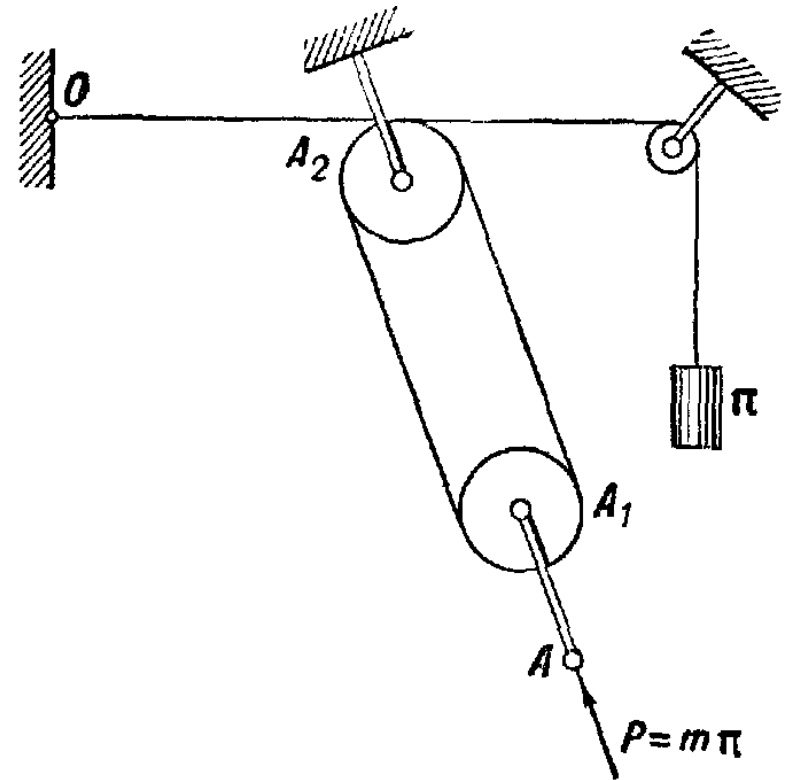
Ж.-Л. Лагранж.

Обоснования принципа возможных перемещений при помощи принципа блоков
В.Л. Кирпичев «Беседы о механике» (1950), с. 20

Положим, что все активные силы P , Q , R , ..., приложенные к системе в точках A , B , C , ... , имеют общую меру π , которая содержится m раз в силе P , n раз в силе Q и т.д. (при этом m , n и т. д. можно считать четными числами). Доказательство для несоизмеримых сил получается предельным переходом.

Все активные силы могут быть получены или воспроизведены с помощью одной силы π , повторенной несколько раз.

Фактически можно получить их с помощью одного груза, равного π , пользуясь полиспастом (см. рис.).



Ж.-Л. Лагранж.

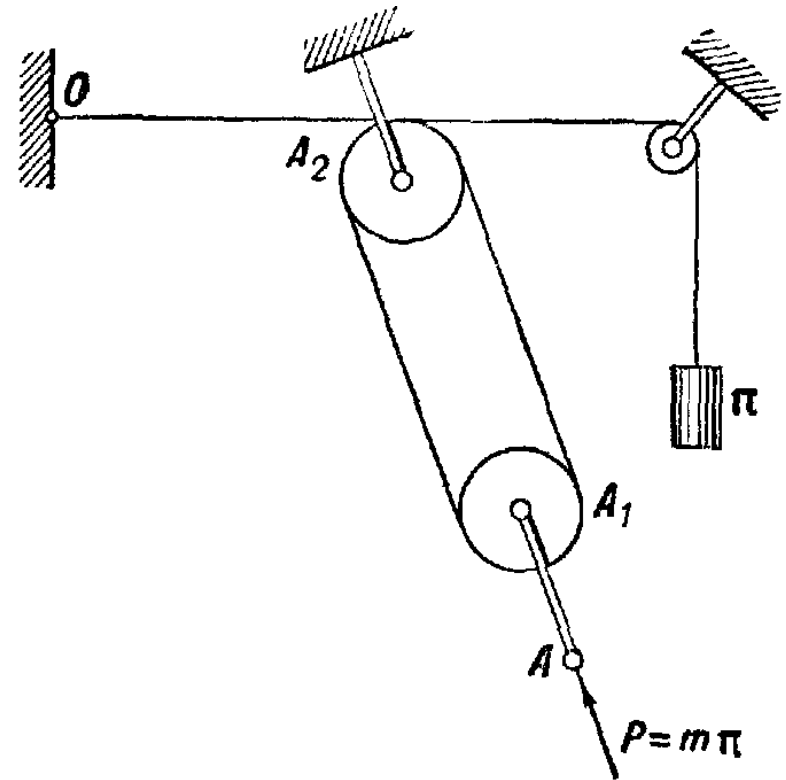
Обоснования принципа возможных перемещений при помощи принципа блоков
В.Л. Кирпичев «Беседы о механике» (1950, с. 20).

На рисунке точки приложения сил и сами силы.

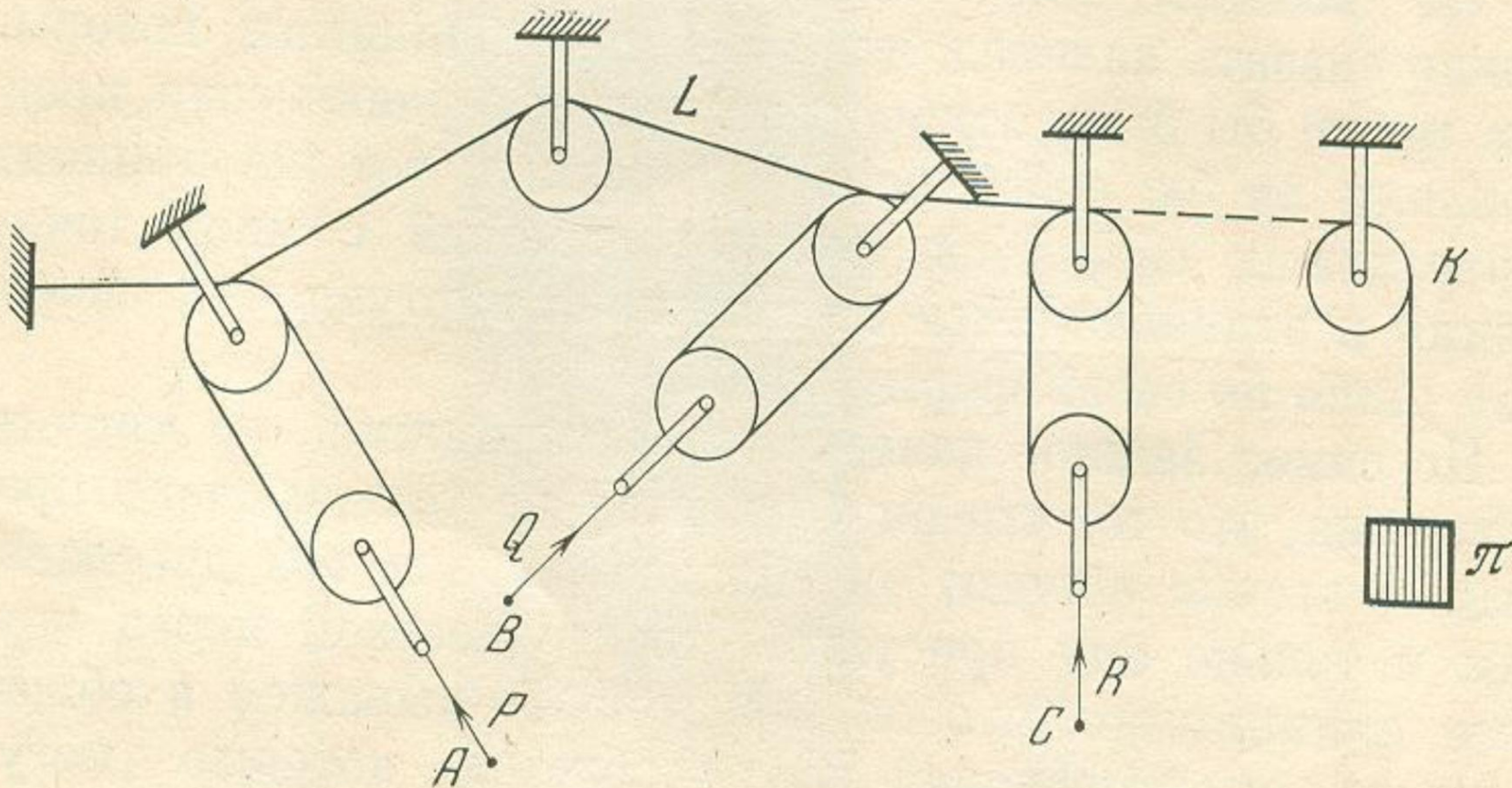
Чтобы получить силу P , приложенную в точке A , расположим обойму с подвижными блоками A_1 и обойму с неподвижными блоками A_2 по направлению силы P ; A_2 прикрепим к неподвижному предмету, а с помощью подвижной обоймы блока A_1 захватим точку A .

Затем оснастим этот полиспаст гибкой веревкой; один конец ее прикрепим к неподвижной точке O , обведем веревку через блоки A_1 , A_2 так, что между ними будет m ветвей веревки; наконец, проведем веревку через отводной блок и на конце ее повесим груз π .

Если веревка вполне гибкая и если в блоках нет трения, то на точку A будет действовать сила, равная m раз π , т. е. заданная сила P .



Таким же образом можем получить и остальные силы $Q, R, \dots$, причем для получения всех их можно воспользоваться одним грузом π и одной веревкой. Действием веса π будут вызваны все активные силы $P, Q, R, \dots$, приложенные к системе; он один заменяет их все, изображает всю совокупность активных действий на систему, которые стремятся вывести ее из равновесия.



Перепробуем мысленно различные возможные перемещения точек системы. Пусть окажется, что при одном из них груз π опускается. Тогда наша система не находится в равновесии.

Предположим, что, пробуя различные возможные перемещения системы, мы встречаем в числе их такое, при котором груз π поднимается. Так как у нас связи двусторонние, то возможно и перемещение прямо противоположное, а при нем, очевидно, груз π будет опускаться; следовательно, есть такое перемещение, при котором груз π опускается, и неизбежно равновесие будет нарушено.

Итак, если пробы нам покажут, что есть возможные перемещения, при которых груз π или поднимается или опускается, то мы заключаем, что система не находится в равновесии под действием заданных сил.

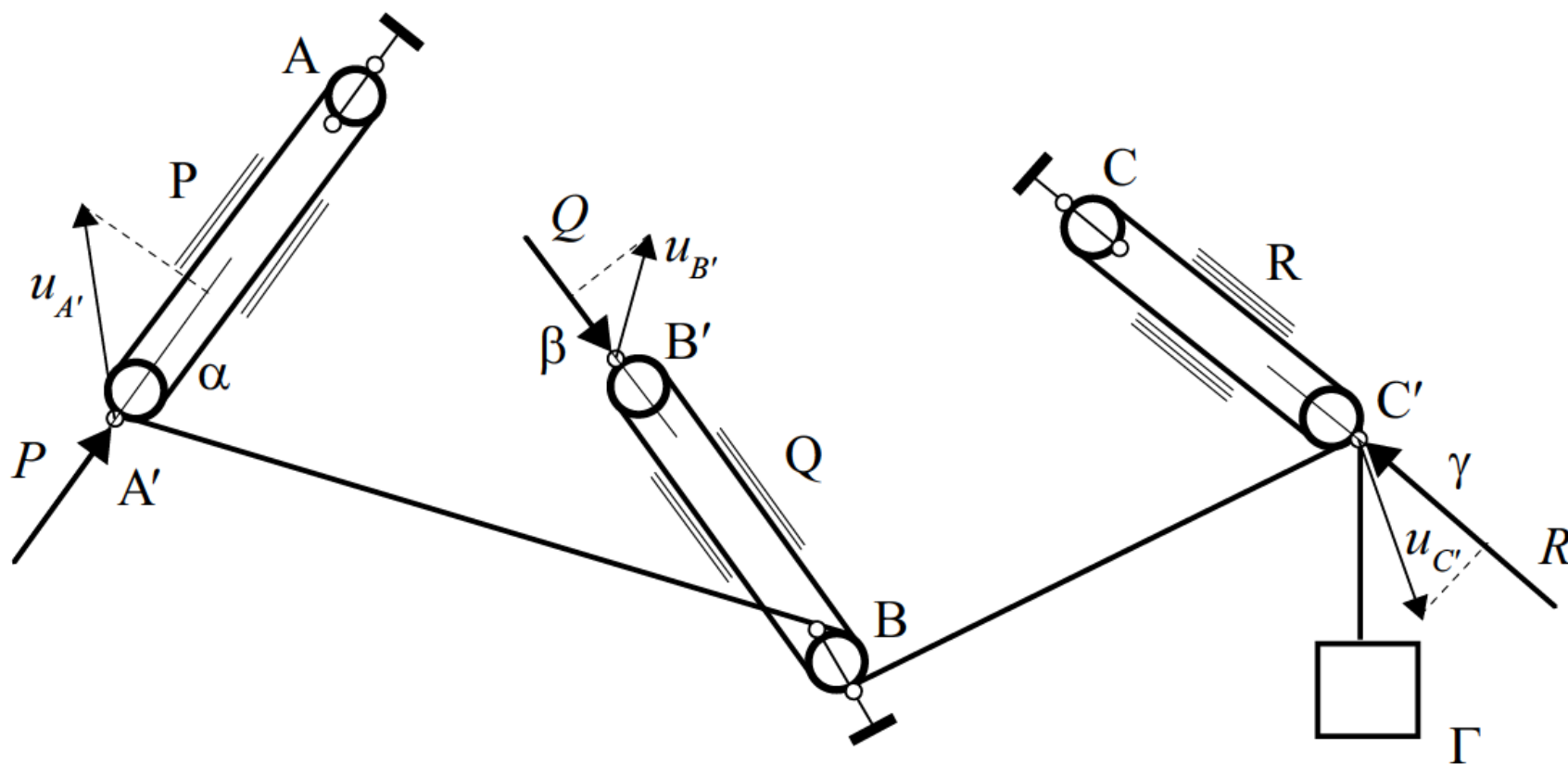
Но если, перепробовав все возможные перемещения, мы увидим, что при всех них наш груз π не поднимается и не опускается, а остается на прежней высоте, то заданная совокупность сил уравнивается в нашей системе. Это следует из того, что совокупность активных сил заменяется одним грузом π ; стоит только первоначально уничтожить в нем всякую скорость, и он не вызовет никакого движения, так как нет ни одного возможного перемещения, при котором этот груз опускается.

На этом рисунке кроме точек приложения и сил изображены:

$u_{A'}, u_{B'}, u_{C'}$ – бесконечно малые возможные перемещения

α, β, γ – проекции этих перемещений на линии действия сил P, Q, R

D. Capecchi, “History of virtual work laws” (2012, p. 261).



Математическое оформление идеи

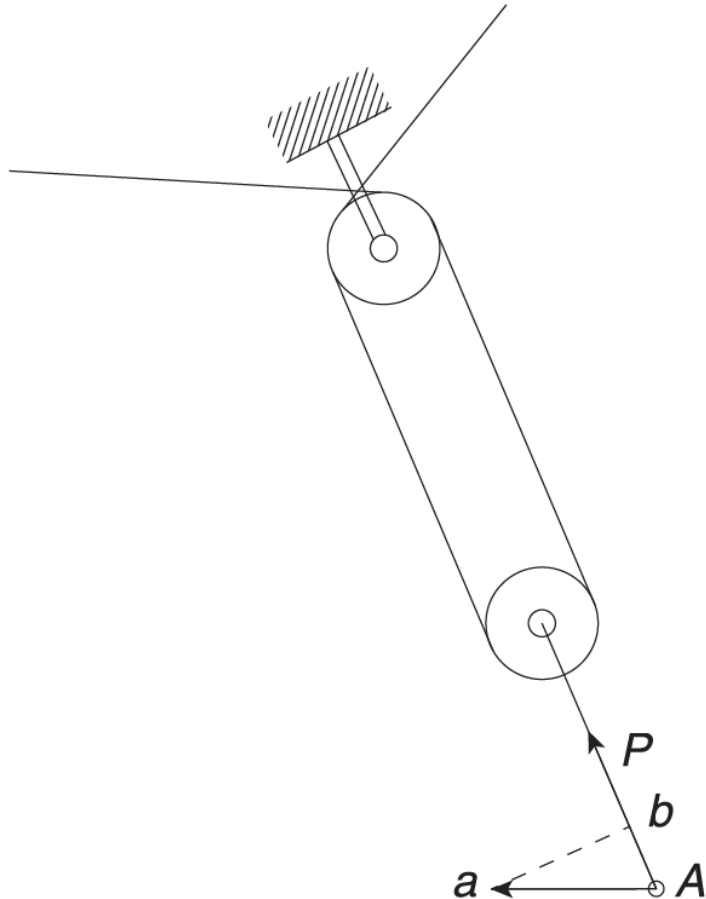
Посмотрим, как выражается опускание груза π в зависимости от активных сил и возможных перемещений системы. Рассмотрим одну из точек системы, например A , к которой приложена активная сила P . Пусть возможное перемещение точки A будет Aa .

При передвижении точки A в a расстояние между блоками изменится, и с точностью до величин второго порядка это изменение представится длиной Ab , т. е. проекцией перемещения Aa на направление силы P .

Эту проекцию назовем буквою r . При нашем перемещении расстояние блоков уменьшается на r , и если между блоками веревка проходит n раз, то полная длина веревки, оснащающей эти блоки, уменьшится на nr .

Следствием этого перемещения будет то, что груз π , повешенный на конце веревки, опустится на высоту nr .

Здесь проекция Ab совпадает с направлением силы P , и мы считаем ее положительной.

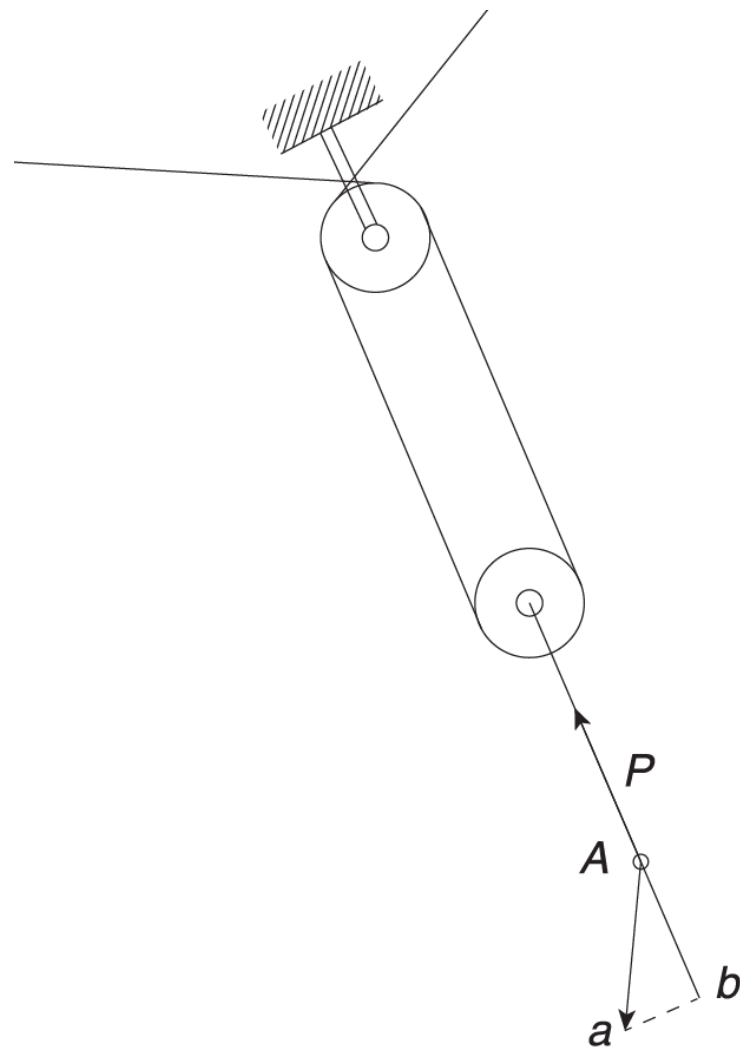


Математическое оформление идеи

В случае, представленном на рисунке, проекция $Ab = r$ идет противоположно силе P , и мы будем считать ее отрицательной.

Тогда результатом перемещения будет увеличение расстояния между блоками, и на оснастку их понадобится длина веревки больше прежней, т. е. при этом груз π поднимается.

Для обоих случаев можно формально писать, что происходит опускание груза на величину pr , но в первом случае величина r положительна, т. е. действительно происходит опускание груза, а во втором величина проекции r отрицательна, т. е. получается отрицательное опускание, следовательно, подъем груза.



Математическое оформление идеи (окончательное)

Рассматривая все точки приложения сил $P, Q, R, \dots$, и называя проекции перемещений на направления этих сил через $p, q, r, \dots$, а число ветвей веревки, оснащающих соответствующие блоки, через $n, m, \dots$, получим, что результатом перемещения всех точек системы будет опускание груза π на величину суммы:

$$np + mq + \dots$$

Если такая сумма окажется не равной нулю, то это означает, что равновесие не существует. Условие, необходимое и достаточное для равновесия, заключается в том, что опускание груза π должно быть равно нулю для каждого возможного перемещения, т. е. должно быть:

$$np + mq + \dots = 0.$$

Умножая на π , получим:

$$n\pi \cdot p + m\pi \cdot q + \dots = 0.$$

Но так как $n\pi = P, m\pi = Q, \dots$, то имеем условие:

$$Pr + Qq + \dots = 0$$

Здесь каждая активная сила умножается на проекцию перемещения; такое произведение есть работа силы для перемещения. Поэтому наше условие заключается в том, что сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю. А в этом и заключается начало возможных перемещений.

Вопрос об истоках принципа возможных перемещений

«Это доказательство (т.е. доказательство принципа возможных скоростей при помощи системы полиспаатов – Е.З.) интересно, как указатель тесной связи нашего принципа с машинами и механизмами разного рода. Сам принцип возможных перемещений вырос на почве изучения машин, и следы его происхождения видны во многих доказательствах этого принципа» (В.Л. Кирпичев).

Этот тезис вызывает сомнение. Лагранж не занимался задачами практической механики. Он был чистый теоретик.

Идея принципа возможных перемещений сформировались у него в ходе решения задач теоретической астрономии, в частности, вопроса о либрации Луны.

Замечание: Но и в небесной механике Лагранж не интересовался конкретными вычислениями, но лишь математическими принципами движения. И здесь он оставался теоретиком.

В практической механике аналитика стала использоваться спустя столетие после выхода в свет «Аналитической механики».