

# Лекция 17

Чиненова Вера Николаевна

[v.chinenova@yandex.ru](mailto:v.chinenova@yandex.ru)

# **Развитие геометрического и аналитического направления статики в XVIII и XIX веках**

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА Луи ПУАНСО

## ТРИ ПОДХОДА К ПРОБЛЕМЕ РАВНОВЕСИЯ (ПО ЛАГРАНЖУ)

- ✚ Ж.-Л. Лагранж, «Аналитическая механика» (1788). Отдел 1. О различных принципах статики (исторический обзор).
- ✚ «Статика – это наука о равновесии сил.
- ✚ Равновесие получается в результате уничтожения нескольких сил, которые борются и взаимно сводят на нет действие, производимое ими друг на друга; статика имеет своей целью дать законы, согласно которым происходит это уничтожение.
- ✚ Эти законы основаны на общих принципах, которые можно свести к трем:
  - ✚ Принцип рычага,
    - 🔗 Принцип сложения сил и
      - ▶ Принцип виртуальных скоростей».
- ✚ Отступление. Об использовании термина «борются» (антропоморфизм) по отношению к силам.

Сложение движений было известно уже древним грекам («Механические проблемы» псевдо-Аристотеля. Его применяли главным образом геометры для описания кривых, Архимед – для спирали, Никомед – для конхоиды и т.д. Во всех этих случаях речь идет о кинематике, т.е. только о скоростях, но не о силах.

- Впервые на место движений поставил силы Ньютон (1687). Он также показал, каким образом законы равновесия могут быть выведены из закона сложения и разложения сил, если диагональ параллелограмма принять в качестве силы, составленной из двух сил, выражаемых его сторонами (Второе дополнение к 3-му закону движения).

- Более четко это сделал П. Вариньон (опубликовано в 1725). При помощи принципа сложения сил Вариньон доказал правило равенства моментов сил относительно точки вращения стержня, а затем, опираясь на это правило, доказал правило рычага.

- Попытка сделать принцип сложения сил независимым от рассмотрения движений принадлежит Д. Бернулли (1726).



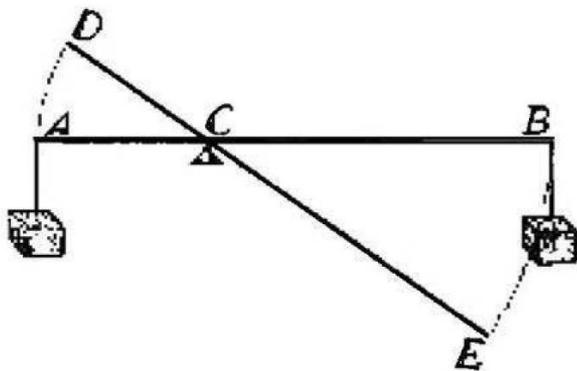
## СТАТИКА НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ.

### РАЗЪЯСНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ВИРТУАЛЬНОЙ СКОРОСТИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРИНЦИПА

*«Под виртуальной скоростью следует понимать скорость, которую тело, находящееся в равновесии, готово принять в тот момент, когда равновесие нарушено, т. е. ту скорость, какую тело фактически получило бы в первое мгновение своего движения;*

*принцип, о котором идет речь, заключается в том, что силы находятся в равновесии, когда они относятся друг к другу обратно отношению их виртуальных скоростей, измеренных по направлению этих сил»*

(Лагранж с.22).



*«Рассмотрим весы, разделенные на неравные части в точке  $C$ , и грузы подвешенные к точкам  $A$  и  $B$ , и относящиеся друг к другу, как расстояния  $BC$  и  $AC$ ; из уже сказанного очевидно, что один груз уравновесит другой. ... Теперь рассмотрим движение, совершаемое тяжелым телом  $B$ , которое опускается в точку  $E$ , а также движение, совершаемое другим телом  $A$ , которое поднимается в  $D$ ; при этом мы без сомнения обнаружим, что путь  $BE$  во столько раз больше пути  $AD$ , во сколько раз расстояние  $BC$  больше расстояния  $CA$ . ... Итак, оказывается, что скорость опускающегося тяжелого тела  $B$  во столько раз больше скорости поднимающегося тела  $A$ , во сколько раз тяжесть последнего превосходит тяжесть первого ...»*

**Г. ГАЛИЛЕЙ. ВЫВОД ЗАКОНА РЫЧАГА ИЗ ПРИНЦИПА ВИРТУАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ  
«МЕХАНИКА», ОК. 1593)**

*«Если какая-либо система произвольно большого числа тел, или точек, на каждое из которых действуют любые силы, находится в равновесии, и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, — будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными».*

(Лагранж, с.24)

## ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ

*«И вообще, мне кажется, можно сказать наперед, что все общие принципы, которые еще могли бы быть открыты в учении о равновесии, представили бы собою не что иное, как тот же самый принцип виртуальных скоростей, рассматриваемый с иной точки зрения и отличающийся от принципа виртуальных скоростей лишь по своей формулировке.*

*Однако сам по себе этот принцип является не только очень простым и очень общим; он обладает еще и тем драгоценным и единственным преимуществом перед другими принципами, что он может быть выражен в общей формуле, охватывающей все проблемы, которые могут быть поставлены по вопросу о равновесии тел».*

Лагранж

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА Л. ПУАНСО

1. Аксиомы и леммы статики в трактате Пуансо «Начала статики».
2. Элементы теории пары сил.
3. Условия равновесия свободного твердого тела.

# ЛУИ ПУАНСО (POINSOT) (1777-1859)

«НАЧАЛА СТАТИКИ» (LES ÉLÉMENTS DE STATIQUE), P., 1803



**POINSOT,**  
(Louis)

*Membre de la Légion d'honneur.*

*Né à Paris, le 9 Janvier 1777, déc. en 1852.*

Окончил Политехническую школу в Париже (1797), с 1809 профессор там же.

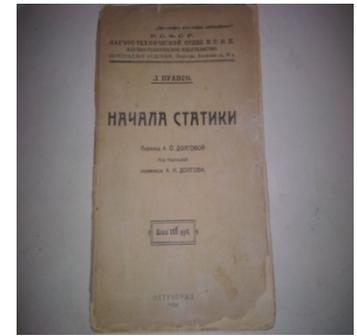
Член Парижской АН(Академия наук) с 1813

В период Июльской монархии — в

Министерстве народного образования.

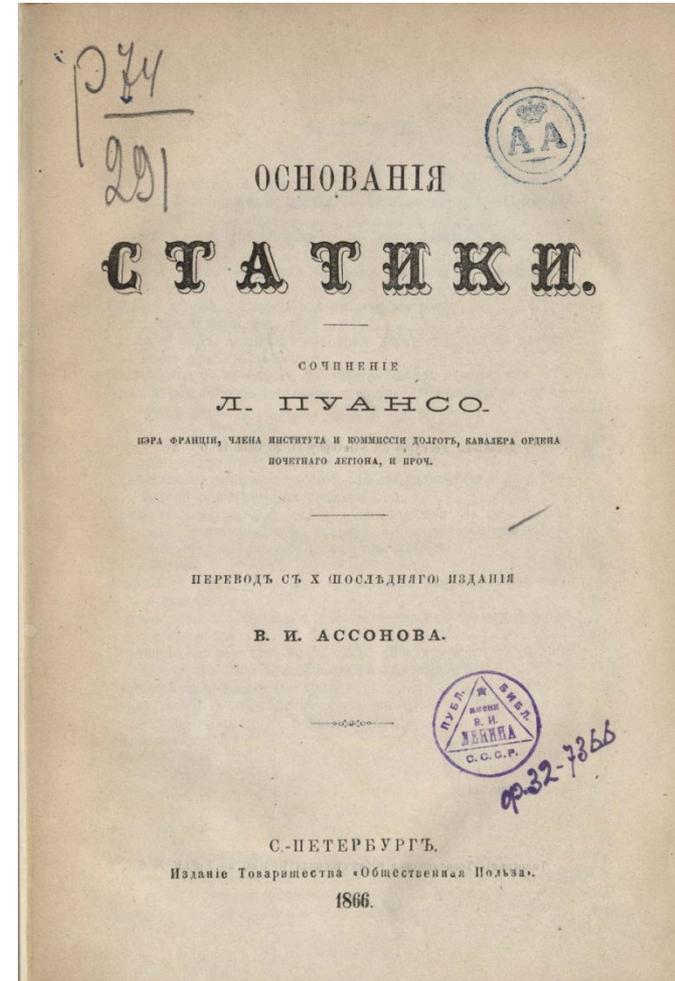
Пэр Франции (1846), сенатор (1852).

# ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»



В **1803** опубликовал «**Элементы статики**», в которых применил разработанные им геометрические методы исследования к учению о равновесии твёрдых тел и их систем.

В **1834** построил теорию вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Впервые ввёл понятие эллипсоида вращения.



**Сила** есть причина производящая движение тела.

Пуансо указывает, что сила обладает точкой приложения, величиной и направлением, и формулирует основные задачи механики:

1. найти движение, которое какая-либо механическая система получает под действием заданных сил, и обратно:

2. найти соотношения сил, действующих на систему, чтобы она получила заданное движение.

Начинать надо со статики

Для решения этой общей задачи нужно начать с частного случая — решить, какими должны быть соотношения сил, приложенных к системе, чтобы она получила движение, равное нулю, иными словами, находилась бы в равновесии.

Если эта задача будет решена, то к ней легко будет привести и другую; вот почему обычно изучение механики начинают со статики, которую определяют как науку о равновесии сил.

## ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

**Статика** - учение о равновесии сил, приложенных к твердому телу.

**Сила** характеризуется отрезком, т.е. длиной (величиной), направлением и точкой приложения.

**Абсолютно твердого тело** – совокупность точек, неизменно связанных между собой.

**Принцип освобожденности от связей:**

**сопротивления, испытываемые телом от постоянных причин, могут быть заменены соответственными силами, после такой замены сопротивлений силами можно считать тело свободным в пространстве**

## ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА I. «Основные начала». Сложение и разложение сил. Пары сил. Общий случай сложения – приведение системы сил к силе и паре сил, плоскость которой перпендикулярна силе.

ГЛАВА II. «Об условиях равновесия». Условия равновесия параллельных сил. Условия равновесия тел, имеющих одну и две точки опоры.

ГЛАВА III. Теория центров тяжести. Центр тяжести рассматривается не как особая точка приложения веса тела, а как центр параллельных сил – точка, через которую проходит равнодействующая весов частиц тела.

ГЛАВА IV. «О машинах». Определение машины: машины представляют не что иное, как тела или системы тел, стесненные в своих движениях какими-нибудь препятствиями.

В зависимости от этих препятствий Пуансо дает классификацию машин:

- рычаг (наличие одной неподвижной точки опоры),
- ворот (наличие неподвижной прямой)
- наклонная плоскость (наличие неподвижной опорной плоскости)

Классификация тесно связана с рассматриваемыми во второй главе случаями равновесия несвободного тела.

## ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

**Аксиома:** две равные, противоположно направленные силы, приложенные к одной точке, уравниваются.

**Следствие** констатирует возможность переноса силы по линии ее действия в твердом теле.

**Аксиома:** равнодействующая двух равных сходящихся сил проходит по биссектрисе внутреннего угла между линиями действия сил.

**Следствие аксиомы 2.** «Отсюда легко заключаем, что действие силы на тело не изменится в какой бы точке своего направления сила ни была приложена». Т.е. точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия».

**Лемма о существовании равнодействующей двух сил.**

**Примечание к лемме.** «В одном только случае можно видеть *à priori* какое будет направление равнодействующей: это когда обе силы  $P$  и  $Q$  равны. Ясно, что равнодействующая в этом случае делит угол составляющих пополам, потому что нет никакой причины, чтобы равнодействующая делала с одною из составляющих угол, меньший, чем с другою».

## Глава I. Отдел I. Сложение и разложение сил. Аксиомы, леммы, следствия.

«**Основная аксиома.** Когда две силы  $P$  и  $Q$  действуют по одному направлению и в одну и ту же сторону, то очевидно, и должно принять за аксиому, что эти силы можно сложить и они дадут равнодействующую, равную их сумме  $P+Q$ ».

«*Примечание.* Эта аксиома есть основание всей науки о равновесии. Ее можно рассматривать или как определение, или как требование, которое должно допустить без всякого доказательства; потому что она следует из самого понятия о силе, как о величине».

«**Следствие.** Если две неравные силы  $P$  и  $Q$  действуют по одному направлению, но в противоположные стороны, то равнодействующая их равна разности этих сил  $P-Q$  и действует в сторону большей силы. В самом деле, из большей силы, которая положим будет  $P$ , можно выделить силу, равную и противоположную меньшей силе  $Q$ , т.е. уничтожающую ее; тогда обе эти силы можно отнять, и на точку будет действовать разность  $P-Q$  двух сил  $P$  и  $Q$ ».

## ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

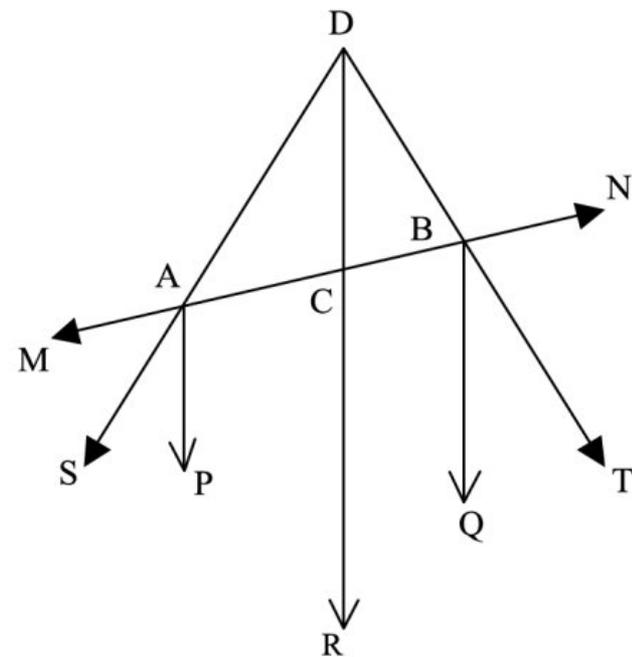
✚ **Первые две теоремы** утверждают, что равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону и приложенных в твердом теле, равна сумме величин сил и делит отрезок, соединяющий точки приложения составляющих в отношении, обратном отношению величин сил.

**«Теорема I.** Если какие-нибудь две параллельные силы  $P$  и  $Q$ , действующие в одну сторону, будут приложены к концам  $A$  и  $B$  прямой неизменяемой линии  $AB$ , то

- 1) эти две силы имеют равнодействующую силу, которая приложена к линии  $AB$  между  $A$  и  $B$ ;
- 2) эта сила параллельна составляющим силам  $P$  и  $Q$  и равна их сумме».

Остроумное доказательство, основанное на добавлении двух равных, но разнонаправленных сил  $AM$  и  $BN$ .

**Теорема II** (об обратном отношении сил и отрезков). Идея доказательства аналогична той, которую использовали Стевин и Галилей для правила рычага.



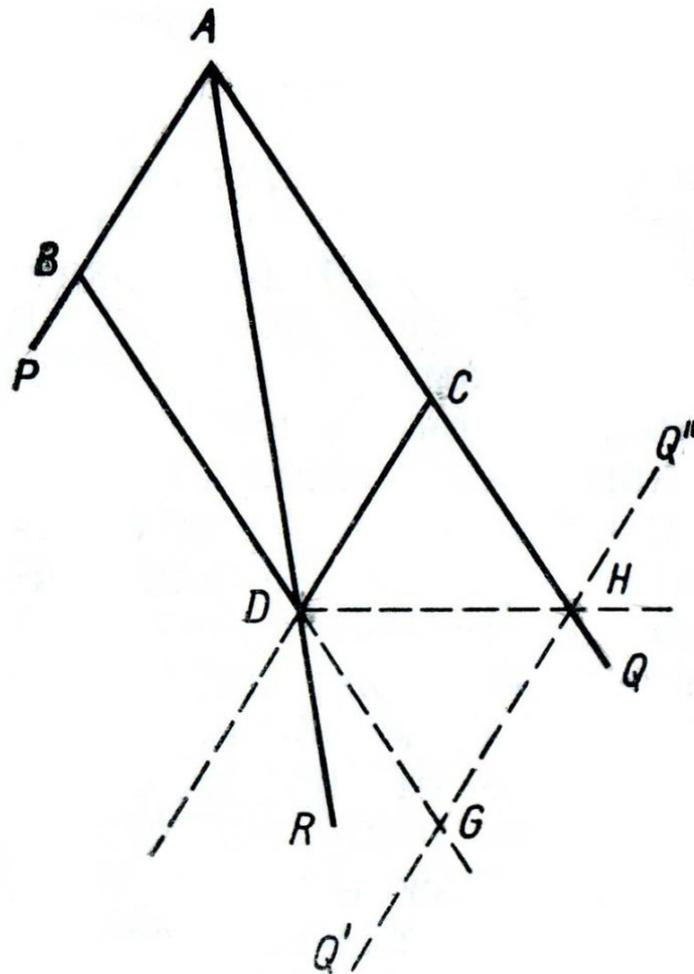
ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

**Третья и четвертая теоремы** обосновывают фундаментальное правило геометрической статики, называемое **правилом параллелограмма** (для сложения двух сходящихся сил).

ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

### Теорема III.

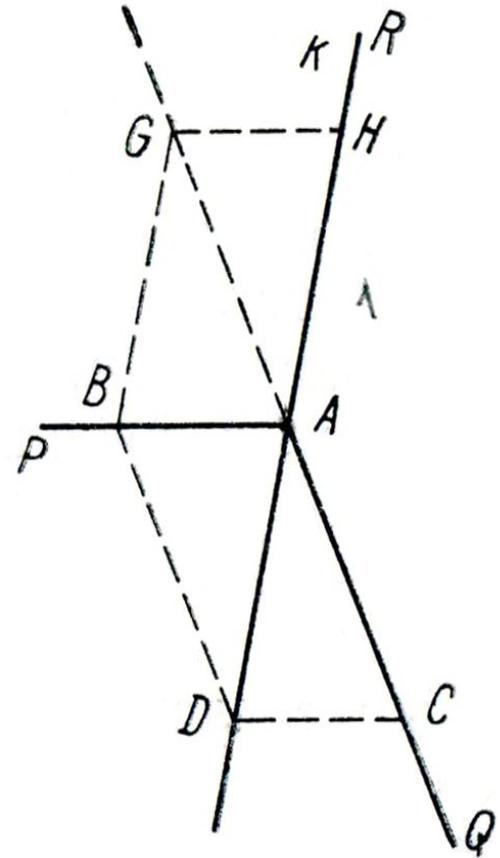
Равнодействующая двух каких-либо сил  $P$ ,  $Q$ , приложенных к одной и той же точке  $A$  и действующих под некоторым углом, направлена по диагонали параллелограмма  $ABCD$ , построенного на линиях  $AB$  и  $AC$  выражающих по величине и направлению силы  $P$  и  $Q$ .





ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

Теорема IV. Равнодействующая двух каких-либо сил  $P$  и  $Q$ , приложенных к одной и той же точке  $A$ , выражается и **по величине** диагональю параллелограмма  $ABDC$ , построенного на линиях  $AB$  и  $AC$ , которые изображают собой величину и направление сил  $P$  и  $Q$ .



## ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

**Пара сил** - совокупность двух равных, параллельных и противоположно направленных сил, приложенных не к одной точке.

Расстояние по перпендикуляру между этими двумя силами называется **плечом рычага**  $d=AB$

Произведение одной из сил на плечо – **моментом пары**  $Pd$

**Любую пару сил можно переносить любым образом в ее плоскости,**

**а так же переносить в любую плоскость, параллельную первой**

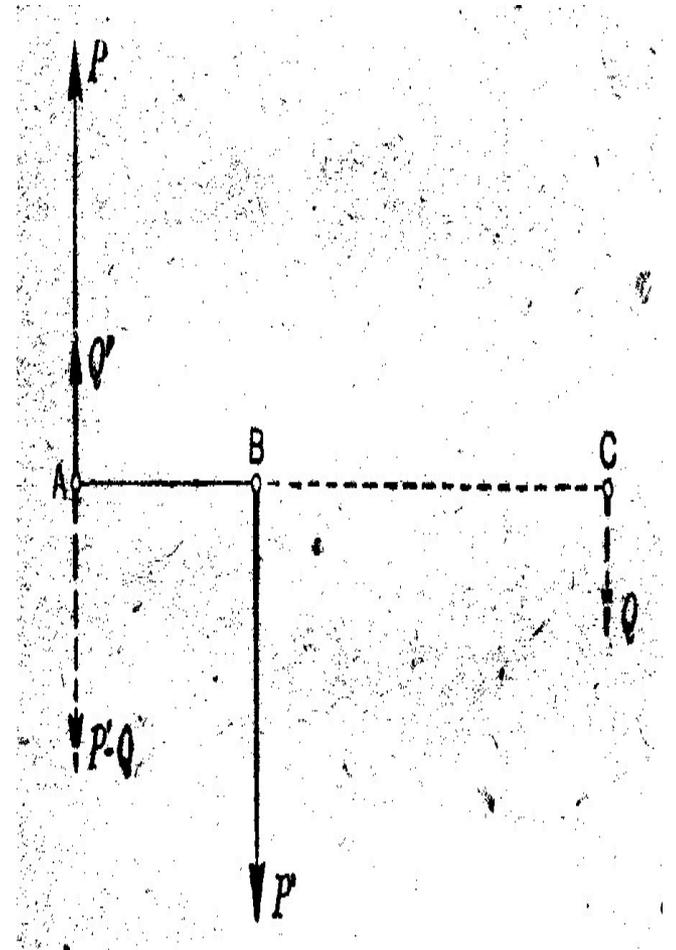
ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

Пару сил, не изменяя ее действия, можно повернуть в ее плоскости около любой точки плоскости.

Не меняя ничего в отношении данного тела к другим, его окружающим, **точку приложения силы, действующей на данное тело, можно перенести во всякое другое место тела, прибавляя лишь при этом к телу еще некоторую пару.**

## ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

Не меняя «эффекта» или «усилия» пары сил, ее можно заменять любой другой, расположенной в той же плоскости и имеющей то же направление вращения, при условии **сохранения неизменной величины момента пары**, изменяя модуль сил обратно пропорционально плечу пары.



ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

**Пара сил определяется тремя элементами: плоскостью, в которой она расположена, величиной момента пары, которая равна площади параллелограмма, построенного на двух силах пары, как на двух противоположных сторонах параллелограмма и направлением вращения.**

## ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

Пуансо сводит правила сложения пары сил (на плоскости и в пространстве), приложенных к твердому телу, к операции геометрического сложения моментов пар.

В следствии I излагаются «**законы равновесия произвольной свободной системы**», заключающиеся в равенстве нулю результирующей силы и результирующей пары.

Важным следствием теории пар явилась возможность приведения произвольной системы сил, приложенных в **твердом теле, к заданному центру.**

Пуансо провел исследование всех возможных случаев приведения произвольной системы сил к центру, указав его инварианты.

## ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ», ГЛ. II

Для статики интересен случай равновесия всей системы сил, что возможно тогда и только тогда, как показал Пуансо, когда **резльтирующая сила и результирующая пара равны нулю.**

Шесть уравнений равновесия твердого тела под действием некоторой системы сил

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} X_i = 0; \overset{n}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} Y_i = 0; \overset{n}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} Z_i = 0;$$

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \qquad \overset{n}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$

$$\overset{n}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

**Итак, для равновесия свободного твердого тела необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на прямоугольные оси координат равнялись нулю и чтобы суммы моментов всех сил относительно каждой из осей координат также равнялись нулю.**

## **ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»**

**Пуансо разработал теорию равновесия важнейших случаев несвободного твердого тела: тела с одной неподвижной точкой, затем - с двумя; тела, опирающегося на неподвижную плоскость, затем - на несколько плоскостей**

В каждом случае подробно исследован вопрос о нахождении давления тела на опоры.

ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

Условия равновесия тела, имеющего одну неподвижную точку

Теорема. Для равновесия несвободного тела,

имеющего одну неподвижную точку,

необходимо, чтобы сумма моментов

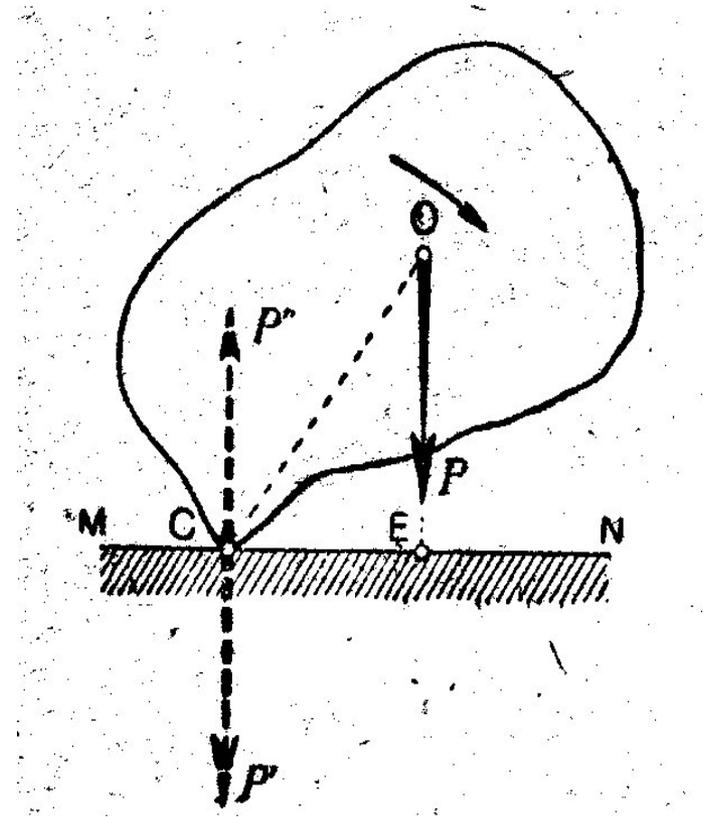
относительно осей координат равнялась

нулю:

$$L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0$$

# РАВНОВЕСИЕ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ ПЛОСКОСТЬ (ТЕЛО ИМЕЕТ ОДНУ ТОЧКУ ОПОРЫ)

Для равновесия тяжелого тела, имеющего одну неподвижную точку, необходимо, чтобы центр тяжести его лежал на вертикальной линии, проходящей через точку опоры.



ЛУИ ПУАНСО (1777-1859) «НАЧАЛА СТАТИКИ»

В разделе «**О центрах тяжести**» определяются центры тяжести тел и общие формулы для центра параллельных сил.

Раздел: «О машинах».

**«Машины суть не что иное, как тела или системы тел, движения которых стеснены некоторыми препятствиями»**