

Лекция 17

Чиненова Вера Николаевна

v.chinenova@yandex.ru

Разработка принципа виртуальных скоростей

План лекции

- Развитие аналитической статики в трактате Л. Карно "Опыт о машинах вообще", использование заменяющей схемы грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины.
- Развитие аналитической статики в трактате Лагранжа "Аналитическая механика".
- Разработка принципа виртуальных скоростей. Общая формула статики.

Лазар Карно (1753 -1823)



Л.Карно

- 1753 г., 13 мая – Родился в г. Нолэ (Франция) в семье адвоката
- 1771-73 – Мезьерская школа, начал службу в чине инженер-поручика в г.Кале
- 1782 – книга «Опыт о машинах вообще»
- 1791 – депутат Национального Собрания
- 1792 – член Конвента
- 1793 – член «Комитета общественного спасения»
- 1794 – избран Президентом Конвента
- 1793-95 – руководил обороной Французской Республики от интервенции коалиции европейских монархий.
- Создание 14 армий.
- 1795 – избран в Институт Франции (Академия наук)
- класс физ-мат наук
- 1795-97 – Член Директории

Л.Карно

- 1796 – рождение старшего сына С Карно –
- будущего основателя термодинамики
- 1797 – «Фрюктидор»: бегство в Швейцарию.
- Исключение из Академии наук.
- 1797-1800 – пребывание в Швейцарии; первая эмиграция
- 1800 – военный министр Консульства.
- Вторичное избрание в АН.
- 1803 – «Основные принципы равновесия и движения»
- 1802-1813 – многочисленные экспектизы по различным
- предложениям, поступающим на отзыв
- в Нац. Институт
- 1810- «Об обороне крепостей»
- 1814 – руководство обороной Антверпена

Л. Карно в битве при Ватиньи



Л.Карно- министр внутренних дел



Л.Карно

- 1815 – министр внутренних дел в правительстве Наполеона («100 дней»).
- 1815 – изгнание из Франции после вторичной реставрации Бурбонов;
- 2-я эмиграция, вторичное исключение из АН
- 1816 – визит в Варшаву; отъезд в Пруссию
- 1816-23 – жизнь в эмиграции (Магдебург, Пруссия)
- 1823 г., 2 авг. – смерть и похороны в Магдебурге
- 1883 г.- прах перенесен в Пантеон в Париж

Л.Карно

- 1783г. - Л.Карно «Опыт о машинах вообще»
- 1803г. – «Общие принципы равновесия и движения» (3-е издание)
- **Вывод условия равновесия (а затем и условия движения) обобщенной машины или механической системы со связями методом расчета баланса виртуальной мощности.**

Принцип виртуальных скоростей:

Из письма И.Бернулли:

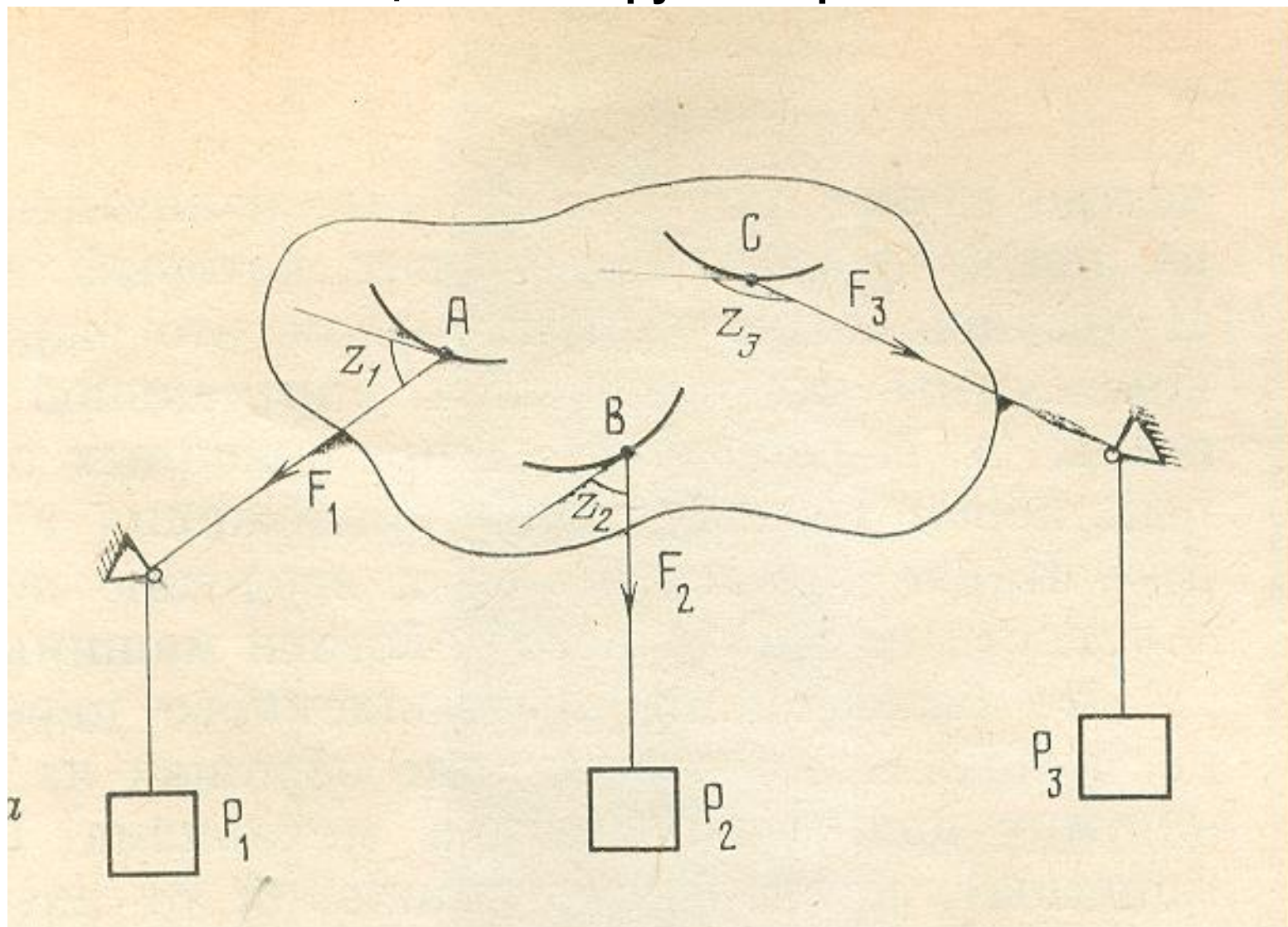
«При всяком равновесии любых сил, каким бы способом они ни были приложены и в каком бы направлении они ни действовали одна на другую, посредственно или непосредственно, сумма энергий положительных будет равна сумме энергий отрицательных, взятых с положительным знаком».

Л.Карно

- Понятие Карно «геометрического движения» соответствует абстракции виртуального перемещения точки или бесконечно малого ее перемещения, допустимого связью в данный момент времени.

$$SF_i \times u_i \times \cos z_i = 0$$

Заменяющая схема грузов Карно



Начало возможных перемещений

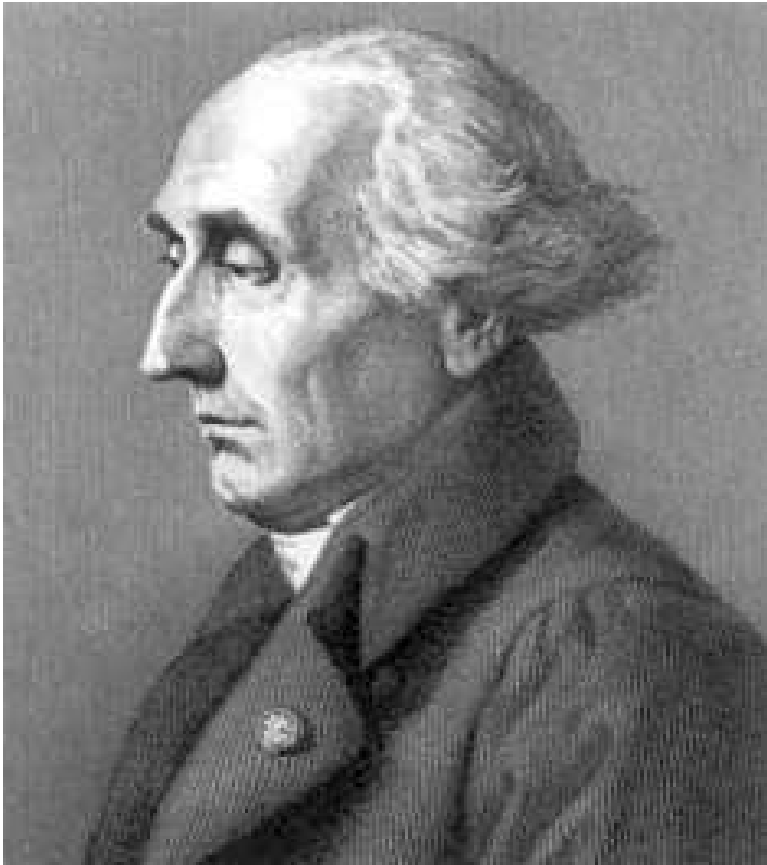
- Необходимое и достаточное условие равновесия системы состоит в том, что **сумма работ активных приложенных сил для каждого возможного перемещения системы должна быть равна нулю.**

Л.Карно

- Карно придавал большое значение суммарному **«моменту активности»** в теории машин, подчеркивая, что это количество нужно по возможности экономить, чтобы извлечь наибольший полезный эффект при действии машины.

- Идея механической машины «вообще» и идеальной машины, как образца для сравнения с реальной
- Концепция о безударной передаче «живой силы» в машинах при $\Delta v \rightarrow 0$
- Положение о потере «живой силы» при трении и ударе.
- Идея о КПД (effet utile) равном 100% у идеальной машины.

Ж.Л.Лагранж (L.Lagrange) (1736-1813)



- Родился 25 января 1736г. В Турине
- Туринский университет; «Записки Туринской академии наук» (статья о распространении звука)
- Переписка с Л. Эйлером
- 1756 – ин. член Берлинской АН
- 1764- «Исследование о либрации Луны» (1-я премия Парижской королевской академии наук)
- 1766-1787 – директор физ-мат класса Берлинской АН
- 1766 – иссл-е о движении спутников Юпитера (премия Парижской королевской академии наук)
- 1772 – поч. чл. Парижской королевской АН
- 1776 – поч. член Петербургской АН

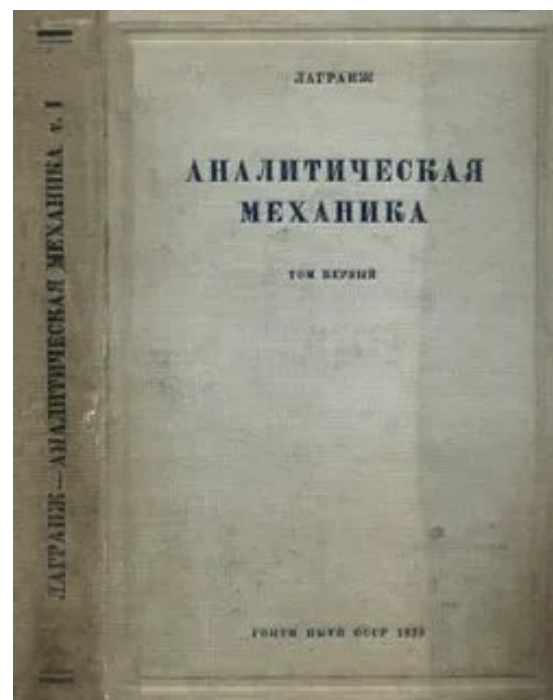
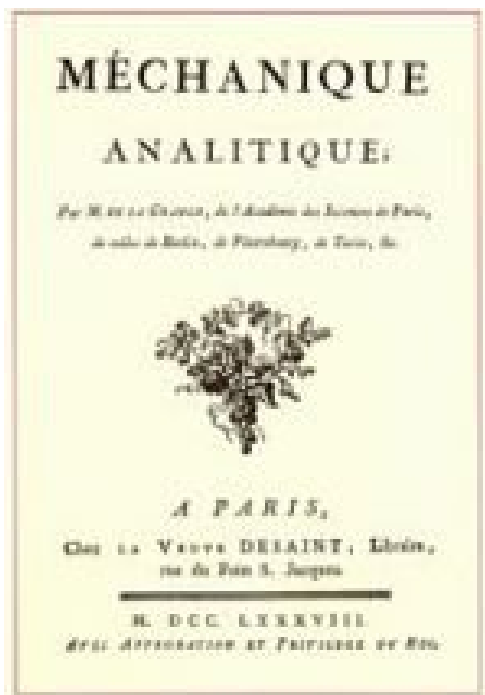
Ж.Л.Лагранж (1736-1813)

- **1788 – «Аналитическая механика»**
- 1787 – переезд во Францию
- Бюро консультаций по вопросам прикладного искусства и ремесел (организованного якобинским Конвентом),
- Комиссия по разработке метрической системы, Лагранж был мобилизован на решение проблем обороны Франции
- Администратор Монетного двора Франции
- Участие в создании (по замыслу Конвента) Нормальной и Политехнической школ,
- 1797 -«Теория аналитических функций»
- 1801 -«Лекции по исчислению функций»
- 1813 - орден Почетного легиона.
- 10 апреля 1813г. Лагранж скончался.

Разработка принципа виртуальных скоростей

- **Идея вводить заменяющую схему грузов вместо системы сил, приложенных к точкам машины, использовалась многими учеными парижской Политехнической школы для обоснования принципа возможных перемещений.**

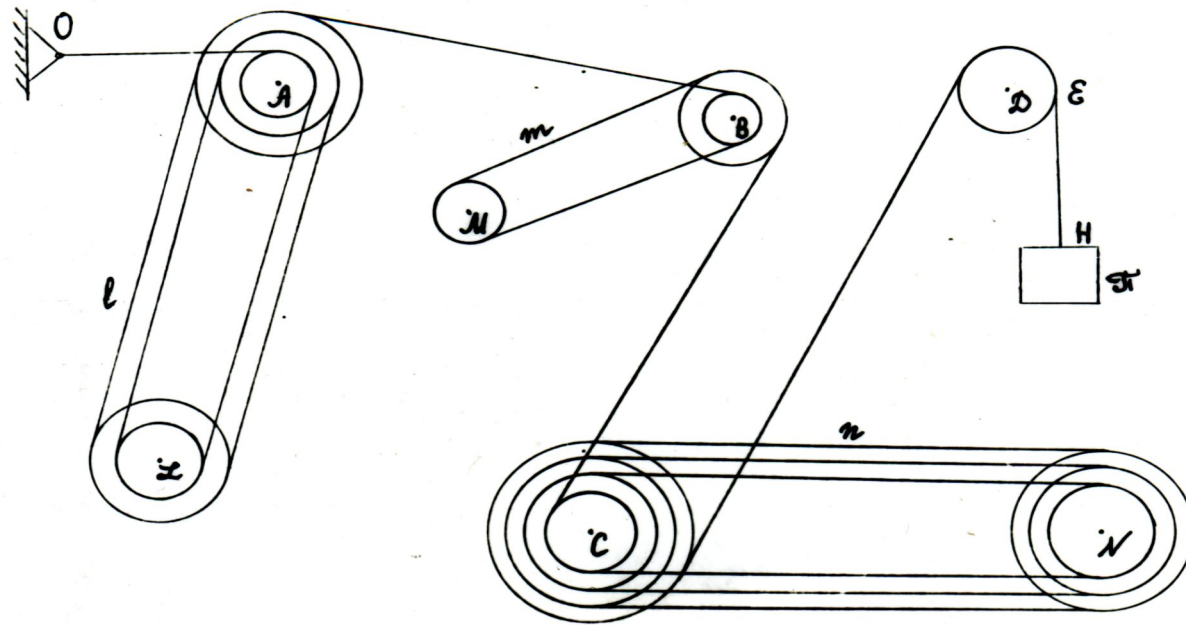
Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

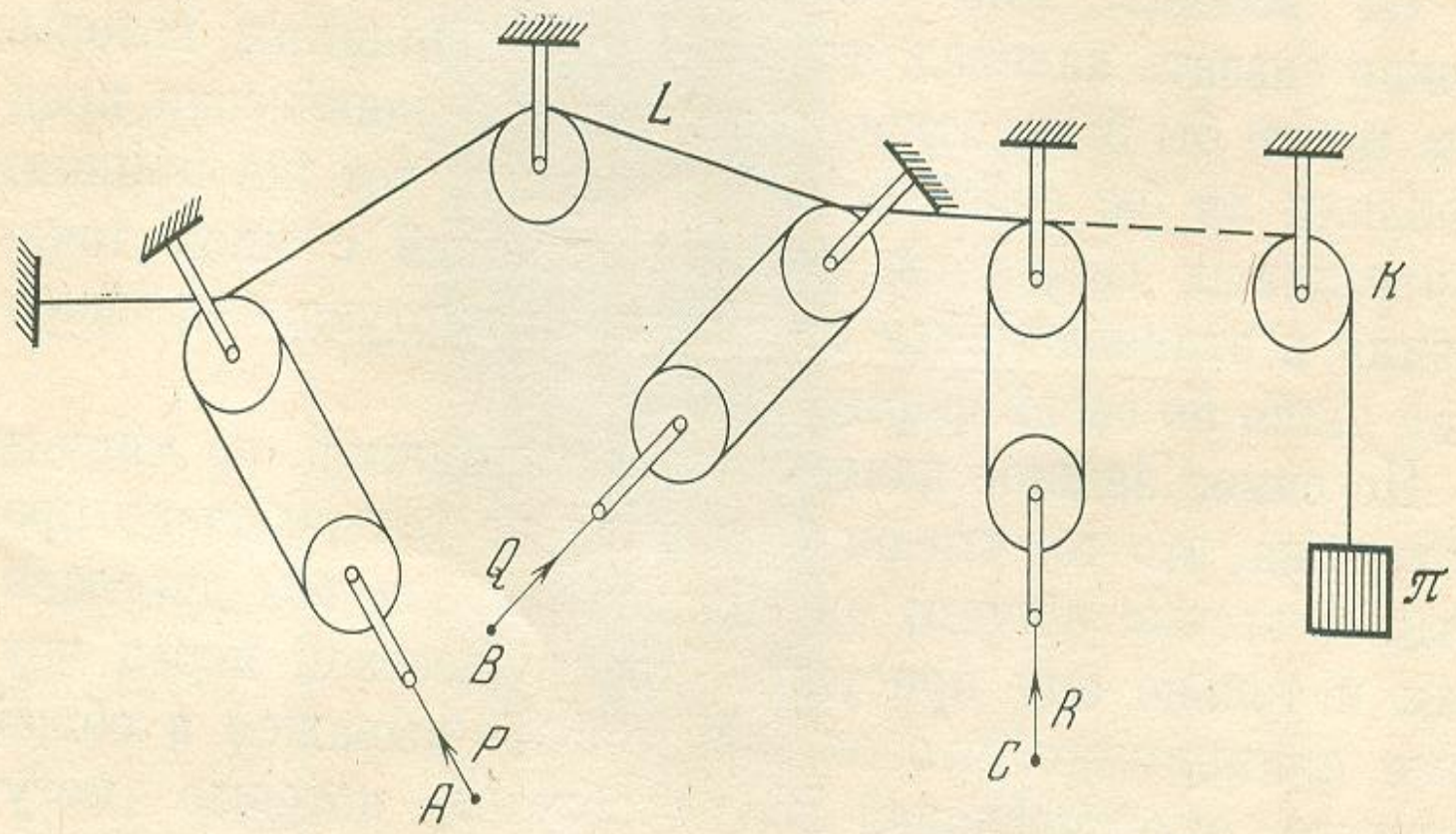


*Необходимое условие равновесия сил,
приложенных к механической системе*

«Если какая-либо система любого числа тел, или точек, на каждую из которых действуют любые силы, находится в равновесии и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными»

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»





Сумма работ активных сил для возможных перемещений точек их приложения должна быть равна нулю

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0$$

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Достаточность этого условия Лагранж доказывает только для двусторонних связей. Если допустить, что это равенство имеет место, то оно должно удовлетворяться как положительными перемещениями, так и отрицательными, и, таким образом, не существует никаких оснований для того, чтобы равновесие было нарушено в ту или другую сторону. Следовательно, должно иметь место равновесие.

- Отдел второй «Статики» Лагранжа называется «Общая формула статики».




Вместо виртуальных перемещений Лагранж вводит дифференциалы dp, dq, dr, \dots расстояний p, q, r, \dots между подвижным и неподвижным блоками полиспастов и полу- получает общую формулу статики:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots = 0.$$

Выражения $Pdp, Qdq, Rdr \dots$ Лагранж называет **моментами сил**, по терминологии XIX в. это работа сил на виртуальном перемещении, взятая со знаком минус.

Далее Лагранж поясняет, как пользоваться этой формулой для расчета состояния равновесия системы: сначала рассматривается случай системы, допускающий поступательное или вращательное движение без изменения относительного взаимного расположения точек системы.

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Лагранж разработал четкий алгоритм для исследования равновесия точки на некоторой поверхности (в общем случае для равновесия системы точек, стесненной некоторыми связями), вводя принцип освобожденности от связей посредством использования неопределенных множителей  ,  ,  .

Для случая равновесия точки под действием результирующей силы $P(x,y,z)$ на гладкой поверхности, уравнение которой задано $L(x,y,z)=0$.

Таких уравнений может быть несколько. Они вытекают из природы системы.

Лагранж умножает вариацию

$$\delta L = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

на неопределенный множитель λ и прибавляет результат к сумме

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i + \lambda \delta L = 0.$$

Группируя скобки перед каждой вариацией координат, и приравнивая каждую скобку (с использованием неопределенности множителя λ и независимости двух координат), Лагранж получает три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{3n} \left(X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0,$$

$$L(x,y,z)=0$$

Лагранж говорит об этих силах: «Вообще член λdL можно рассматривать как момент некоторой силы λ , стремящейся вызвать изменения значения функции L ... Отсюда следует, что каждое условное уравнение эквивалентно одной или нескольким силам, приложенным к системе по заданным направлениям, или вообще стремящимся вызвать изменение значений заданных функций... И обратно, эти силы могут занять место условных уравнений, вытекающих из природы заданной системы; таким образом, применяя эти силы, можно рассматривать тела как совершенно свободные и не подчиненные каким бы то ни было связям... В этом и заключается идея метода, излагаемого в настоящем отделе»¹⁹.

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

В наше время уравнения с
неопределенными множителями
✦, !, ● называют «уравнениями
Лагранжа первого рода»

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Суммарный элементарный момент сил выражается полным дифференциалом некоторой функции координат Π
(позже ее стали называть потенциальной энергией; в современной терминологии - элементарная работа всех сил на возможном перемещении системы, взятая со знаком минус).
- Необходимое и достаточное условие равновесия механической системы, по Лагранжу, сводится к утверждению о существовании **экстремума функции Π** в некотором положении системы, что выражается **равенством нулю дифференциала этой функции.**

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- «Когда эта функция является минимумом, то в этом случае имеет место **устойчивое равновесие** в том смысле, что если сначала система находилась в состоянии равновесия, а затем была немного из него выведена, то она сама собою стремится вернуться к этому состоянию, совершая около него бесконечно малые колебания»

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Отметим, что здесь же дан эскиз определения **статической устойчивости** как стремления системы, получившей малые возмущения координат или начальных скоростей в состоянии равновесия, возвратиться в дальнейшем к невозмущенному состоянию.

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

Разложив функцию Π , явно не зависящую от времени, в ряд по степеням отклонения координат от начального их значения в положении равновесия системы, Лагранж отбрасывает слагаемые всех степеней переменных, начиная с третьей и выше, считая переменные весьма малыми.

Линейная часть разложения равна нулю, так как это является необходимым условием экстремума функции Π . Квадратичная часть разложения может быть, по мнению Лагранжа, преобразована к сумме квадратов новых переменных (линейно выражающихся через прежние) с постоянными коэффициентами.

Из свойств интеграла энергии сумма кинетической и потенциальной энергии в начальный момент равна такой же сумме в любой другой момент времени.

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

Потенциальная энергия в возмущенном движении не превосходит некоторой положительной величины, которую, задаваясь определенными начальными условиями, можно сделать как угодно малой.

Отсюда вытекает ограниченность каждой из новых координат («нормальных») определенными границами.

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- В приведенном рассуждении Лагранж использовал необоснованные положения, которые могут не иметь места в общем случае: **разложимость функции Π в степенной ряд по возмущениям начальных координат и законность отбрасывания всех слагаемых этого разложения, где степени переменных выше второй.**
- Лагранж не проанализировал случаи условного экстремума функции, например, минимакса.

Ж.Лагранж «Аналитическая механика»

- Вторая часть теоремы, утверждающая, что максимум функции Π в положении равновесия является достаточным условием неустойчивого равновесия, здесь (в статике) также не обоснована, читатель отсылается к теории малых колебаний (отдел шестой первого тома)
- Учение о равновесии механической системы, включая гидростатику идеальной (несжимаемой и сжимаемой жидкости), изложено Лагранжем единообразным методом, с большим числом разработанных им приложений.
- Этот новый системный метод получил после Лагранжа широкое распространение и именуется **аналитической статикой**.

В отделе пятом рассматривается применение этого метода и общей формулы статики к решению отдельных конкретных задач о системах материальных точек, связанных нитями или стержнями, жесткими или упругими, о равновесии упругой пластинки, о равновесии твердого тела под действием любой системы сил.

В последующих отделах излагается гидростатика. «Статика» Лагранжа имеет весьма богатое содержание, значение которого для развития аналитической механики чрезвычайно велико.