История и методология механики

Евгений Алексеевич Зайцев
e_zaitsev@mail.ru

Лекция № 16

Развитие геометрической статики в XVIII – начале XIX вв.

План лекции

I. Три подхода к проблеме равновесия (по Лагранжу)

1. Принцип рычага,
2. Принцип сложения сил и
3. Принцип виртуальных скоростей
4. Принцип блоков (дополнительно для доказательства 3).

II. Даниил Бернулли

«Исследование принципов механики и геометрическое доказательство сложения и разложения сил» (1728)

III. Луи Пуансо, «Начала статики» (1803)

1. Критика Пуансо аналитической статики Лагранжа
2. Аксиомы и леммы статики в трактате Пуансо «Начала статики»
3. Элементы теории пары сил. Условия равновесия свободного твердого тела
4. Объяснение парадокса весов Ж.П. Роберваля

I. Три подхода к проблеме равновесия (по Лагранжу)

Три подхода к проблеме равновесия (по Лагранжу)

Ж.-Л. Лагранж, «Аналитическая механика» (1788). Отдел 1. О различных принципах статики (исторический обзор).

«Статика – это наука о равновесии сил.

…

Равновесие получается в результате уничтожения нескольких сил, которые *борются* и взаимно сводят на нет действие, производимое ими друг на друга; статика имеет своей целью дать законы, согласно которым происходит это уничтожение.

Эти законы основаны на общих принципах, которые можно свести к трем:

I. Принцип рычага,

II. Принцип сложения сил и

III. Принцип виртуальных скоростей».

<u>Отступление</u>. Об использовании термина «борются» (антропоморфизм) по отношению к силам.

1. Принцип рычага

«Принцип рычага, как его знают все механики, заключается в следующем. Если прямолинейный рычаг нагрузить с обеих сторон от точки опоры какими-либо двумя грузами таким образом, чтобы расстояния этих грузов от точки опоры были обратно пропорциональны самим грузам, то рычаг останется в равновесии, а нагрузка на точку его опоры будет равна сумме обоих грузов.

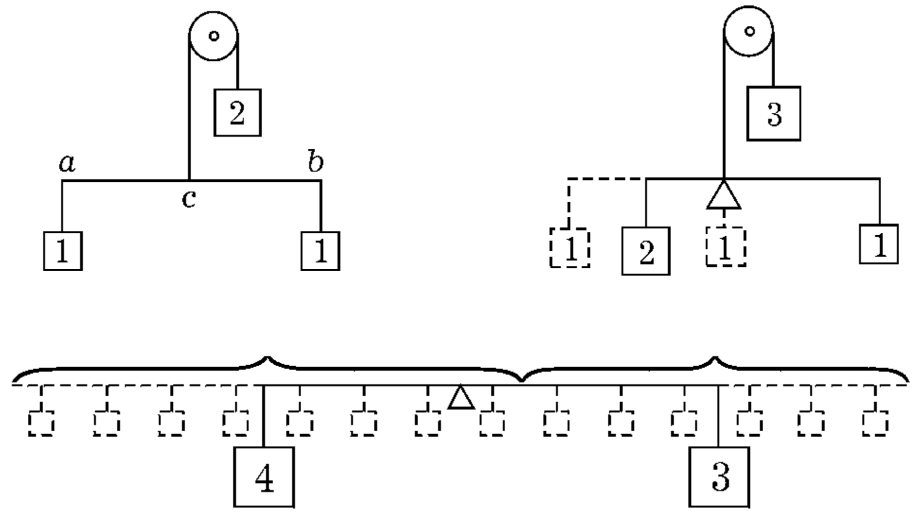
Для случая, когда грузы равны и находятся на равном расстоянии от точки опоры, Архимед принимает этот принцип в качестве очевидной аксиомы механики или, по меньшей мере, в качестве опытного закона. К этому простому и первичному случаю он сводит случаи, когда на рычаге помещены неравные грузы».

1. Статика на основе принципа рычага.
Доказательства принципа рычага в геометрической статике

<u>Доказательство # 1</u>

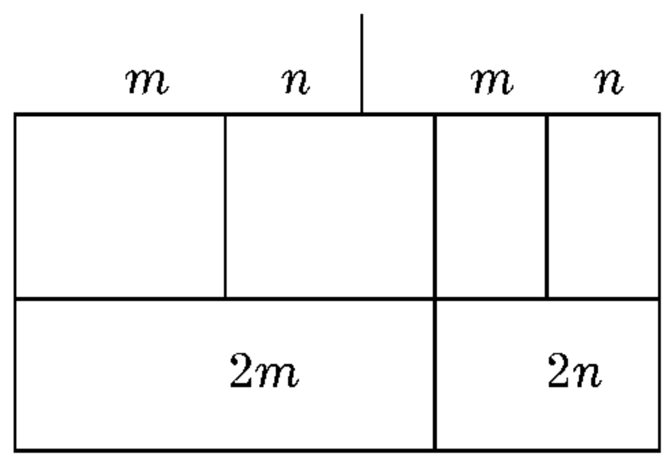
Архимед (III в. до н.э.)

«О равновесии плоских фигур»



<u>Доказательство # 2</u>

Симон Стевин (1586) и Галилей (1638)



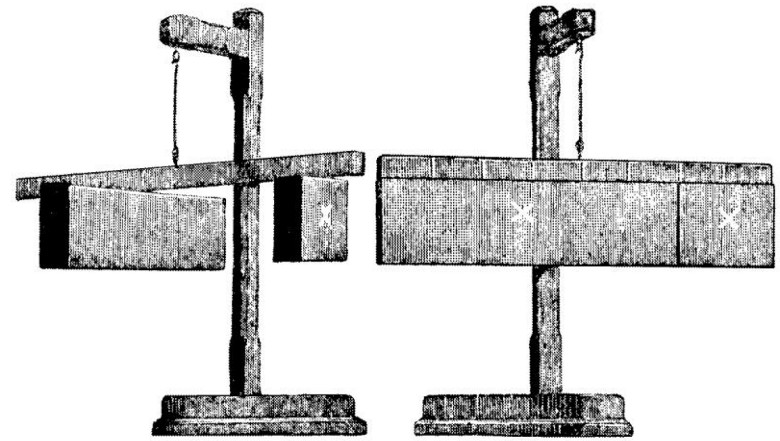
Э. Мах, «Механика. Историко-критический опыт ее развития» (2000): 16-38.

1. Статика на основе принципа рычага.

Доказательство принципа рычага № 3 Христиан Гюйгенс (1693).

Модификация доказательства Стевина-Галилея.

Э. Мах, «Механика. Историко-критический опыт ее развития» (2000), с. 16-38.



Вся статика «простых машин» может быть выведена из принципа рычага.

Нетривиальный пример: вывод из принципа рычага условий равновесия тел на наклонной плоскости.

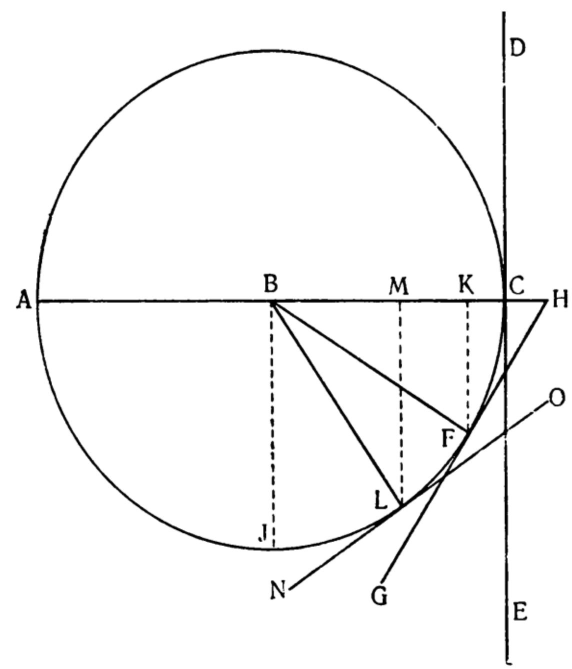
Галилей (1634) и Ж.П. Роберваль (1636).

Ломаный рычаг.

Инфинитезимальная техника:

отождествление малой дуги окружности и малого отрезка наклонной плоскости.

Подробности в лекции 2.



2. Статика на основе принципа сложения сил

«Вторым основным принципом статики является принцип сложения сил.

Он основан на следующем предположении; если на тело*) одновременно в различных направлениях действуют две силы, то эти силы эквивалентны одной силе, способной сообщить телу то же самое движение», которое сообщили бы ему, действуя порознь, обе данные силы.

Но когда тело должно одновременно двигаться равномерно по двум различным направлениям, то оно необходимо проходит диагональ параллелограмма, стороны которого оно прошло бы отдельно в результате каждого из обоих этих движений.

Отсюда заключают, что две любые силы, действующие вместе на одно и то же тело, эквивалентны единой силе, представленной по своей величине и направлению диагональю параллелограмма, стороны которого изображают величины и направления обеих заданных сил. В этом и заключается принцип, который называется *принципом сложения сил.*

*) Слово «тело» обозначает здесь материальную точку (Прим. Бертрана)

2. Статика на основе принципа сложения сил

- Сложение движений было известно уже древним грекам («Механические проблемы» псевдо-Аристотеля). Его применяли главным образом геометры для описания кривых, Архимед – для спирали, Никомед – для конхоиды и т.д. Во всех этих случаях речь идет о кинематике, т.е. только о скоростях, но не о силах.

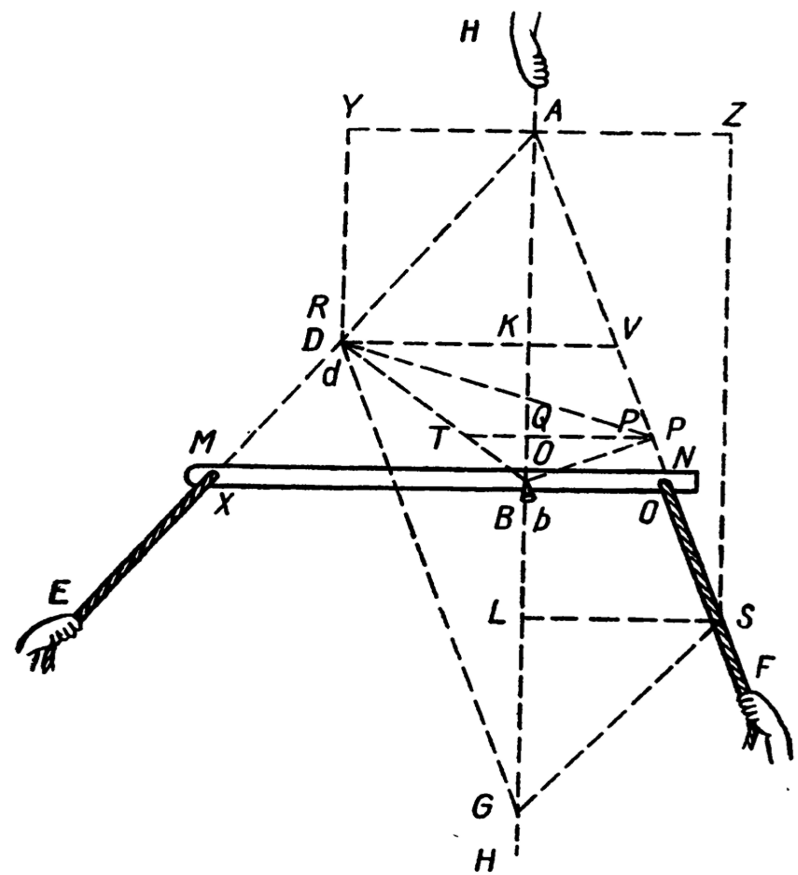
- Впервые на место движений поставил силы Ньютон (1687). Он также показал, каким образом законы равновесия могут быть выведены из закона сложения и разложения сил, если диагональ параллелограмма принять в качестве силы, составленной из двух сил, выражаемых его сторонами (Второе дополнение к 3-му закону движения).

- Более четко это сделал П. Вариньон (опубликовано в 1725). При помощи принципа сложения сил Вариньон доказал правило равенства моментов сил относительно точки вращения стержня, а затем, опираясь на это правило, доказал правило рычага.

- Попытка сделать принцип сложения сил независимым от рассмотрения движений принадлежит Д. Бернулли (1726).

2. Статика на основе принципе сложения сил
Вывод правила рычага (П. Вариньон, 1725)

Правило рычага следует из равенства моментов сил E и F относительно точки B (опора стержня) при удалении точки схода этих сил A на бесконечность.



«Упомянутая теорема, предложенная Вариньоном, является основой почти всех современных учений о статике, где на ней строится общий принцип, известный под именем *принципа моментов*. Большое преимущество его заключается в том, что сложение и разложение сил сводятся к действиям сложения и вычитания; благодаря этому, как бы велико ни было число складываемых сил, легко определяется их результирующая, которая в случае равновесия должна быть равна нулю».

Лагранж

3. Статика на основе принципа виртуальных скоростей. Разъяснение понятия виртуальной скорости и предварительная формулировка принципа

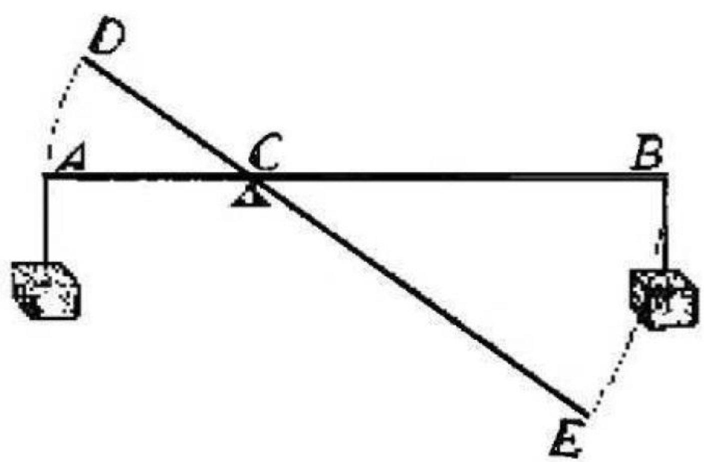
«Под *виртуальной скоростью* следует понимать скорость, которую тело, находящееся в равновесии, готово принять в тот момент, когда равновесие нарушено, т. е. ту скорость, какую тело фактически получило бы в первое мгновение своего движения;

и принцип, о котором идет речь, заключается в том, что

силы находятся в равновесии, когда они относятся друг к другу обратно отношению их виртуальных скоростей, измеренных по направлению этих сил».

3. Статика на основе принципа виртуальных скоростей
Г. Галилей. Вывод закона рычага из принципа виртуальных скоростей
«Механика», ок. 1593)

«Рассмотрим весы, разделенные на неравные части в точке C, и грузы подвешенные к точкам A и B, и относящиеся друг к другу, как расстояния BC и AC; из уже сказанного очевидно, что один груз уравновесит другой. … Теперь рассмотрим движение, совершаемое тяжелым телом B, которое опускается в точку E, а также движение, совершаемое другим телом A, которое поднимается в D; при этом мы без сомнения обнаружим, что путь BE во столько раз больше пути AD, во сколько раз расстояние BC больше расстояния CA. … Итак, оказывается, что скорость опускающегося тяжелого тела B во столько раз больше скорости поднимающегося тела A, во сколько раз тяжесть последнего превосходит тяжесть первого…»



3. Принцип виртуальных скоростей
Окончательная формулировка Лагранжа

«Если какая-либо система произвольно большого числа тел, или точек, на каждое из которых действуют любые силы, находится в равновесии, и если этой системе сообщить любое малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малый путь, представляющий ее виртуальную скорость, то сумма сил, помноженных каждая соответственно на путь, проходимый по направлению силы точкой, к которой она приложена, — будет всегда равна нулю, если малые пути, проходимые в направлении сил, считать положительными, а проходимые в противоположном направлении считать отрицательными».

3. Принцип виртуальных скоростей
Общие замечания

«И вообще, мне кажется, можно сказать наперед, что все общие принципы, которые еще могли бы быть открыты в учении о равновесии, представили бы собою не что иное, как тот же самый принцип виртуальных скоростей, рассматриваемый с иной точки зрения и отличающийся от принципа виртуальных скоростей лишь по своей формулировке.

Однако сам по себе этот принцип является не только очень простым и очень общим; он обладает еще и тем драгоценным и единственным преимуществом перед другими принципами, что он может быть выражен в общей формуле, охватывающей все проблемы, которые могут быть поставлены по вопросу о равновесии тел».

3. Принцип виртуальных скоростей
Вопрос о его очевидности и обосновании. Принцип блоков

«Что касается природы принципа виртуальных скоростей, то следует признать, что этот принцип сам по себе *не является настолько очевидным,, чтобы его можно было выдвинуть в качестве начального принципа*; но его можно рассматривать как общее выражение законов равновесия, выведенных из двух принципов, которые были нами изложены выше.

Точно так же при обоснованиях, которые приводили для этого принципа, его всегда, прямо или косвенно, ставили в связь с указанными принципами.

Но в статике существует еще и другой общий принцип, *независимый* от принципов рычага и сложения сил, хотя механики обычно и относят его к ним, — который представляется нам естественным основанием для принципа виртуальных скоростей; его можно назвать *принципом блоков».*

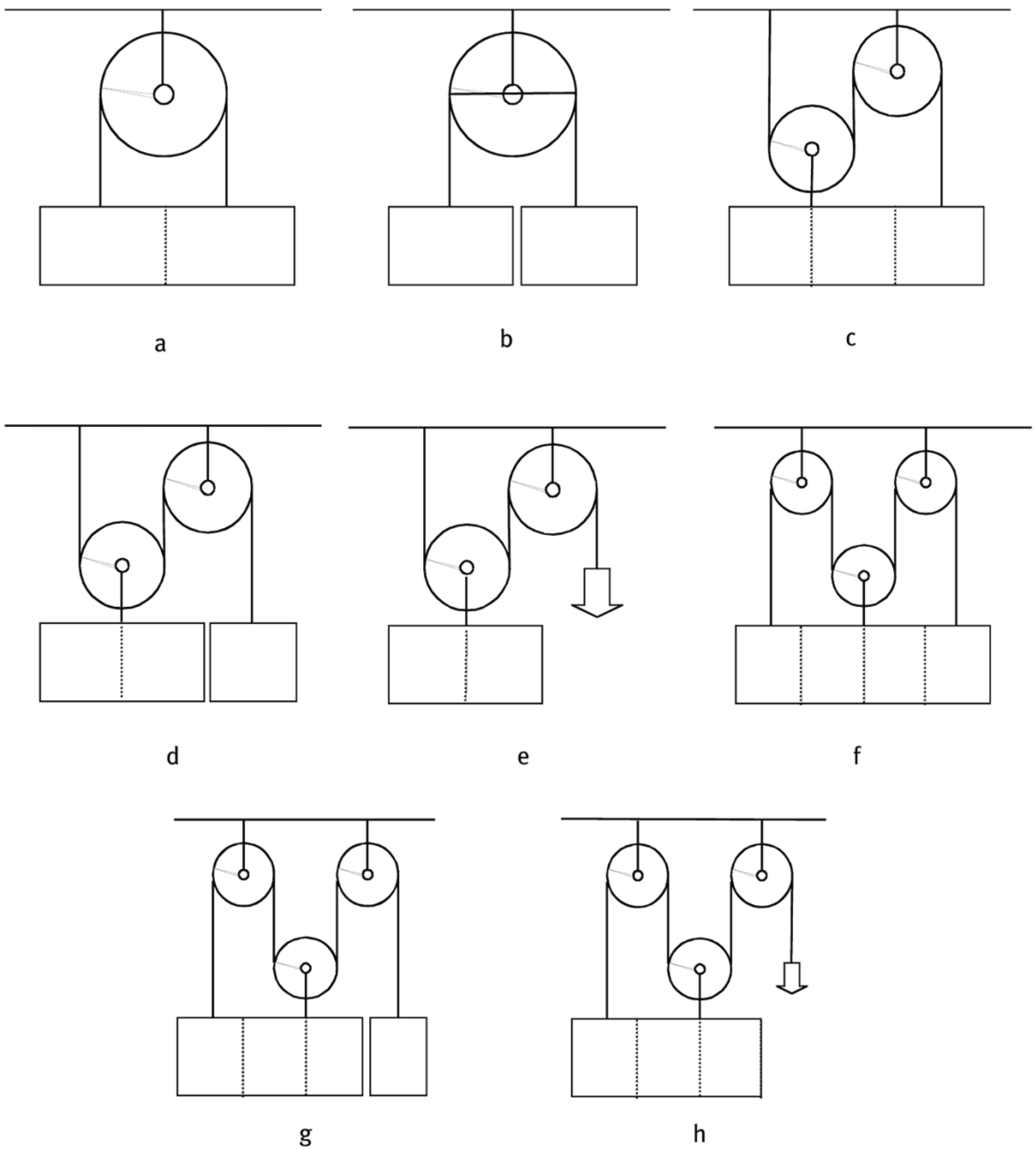
Затем Лагранж (очень красиво и наглядно) обосновывает принцип возможных скоростей при помощи принципа блоков, точнее, системы полиспастов.

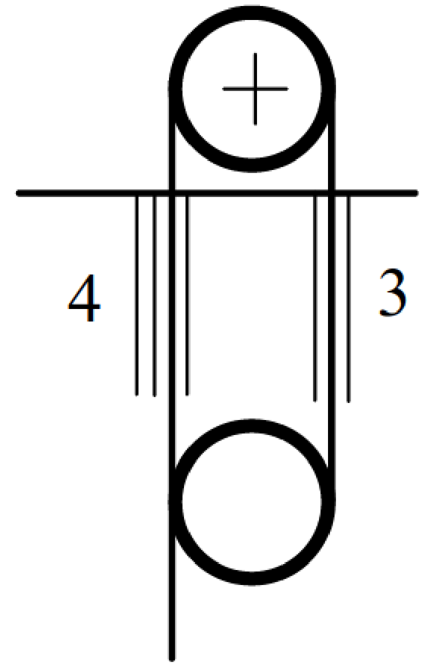
См. В.Л. Кирпичев «Беседы о механике» (М., 1950), с. 20-25.

(книга выложена в Dropbox).

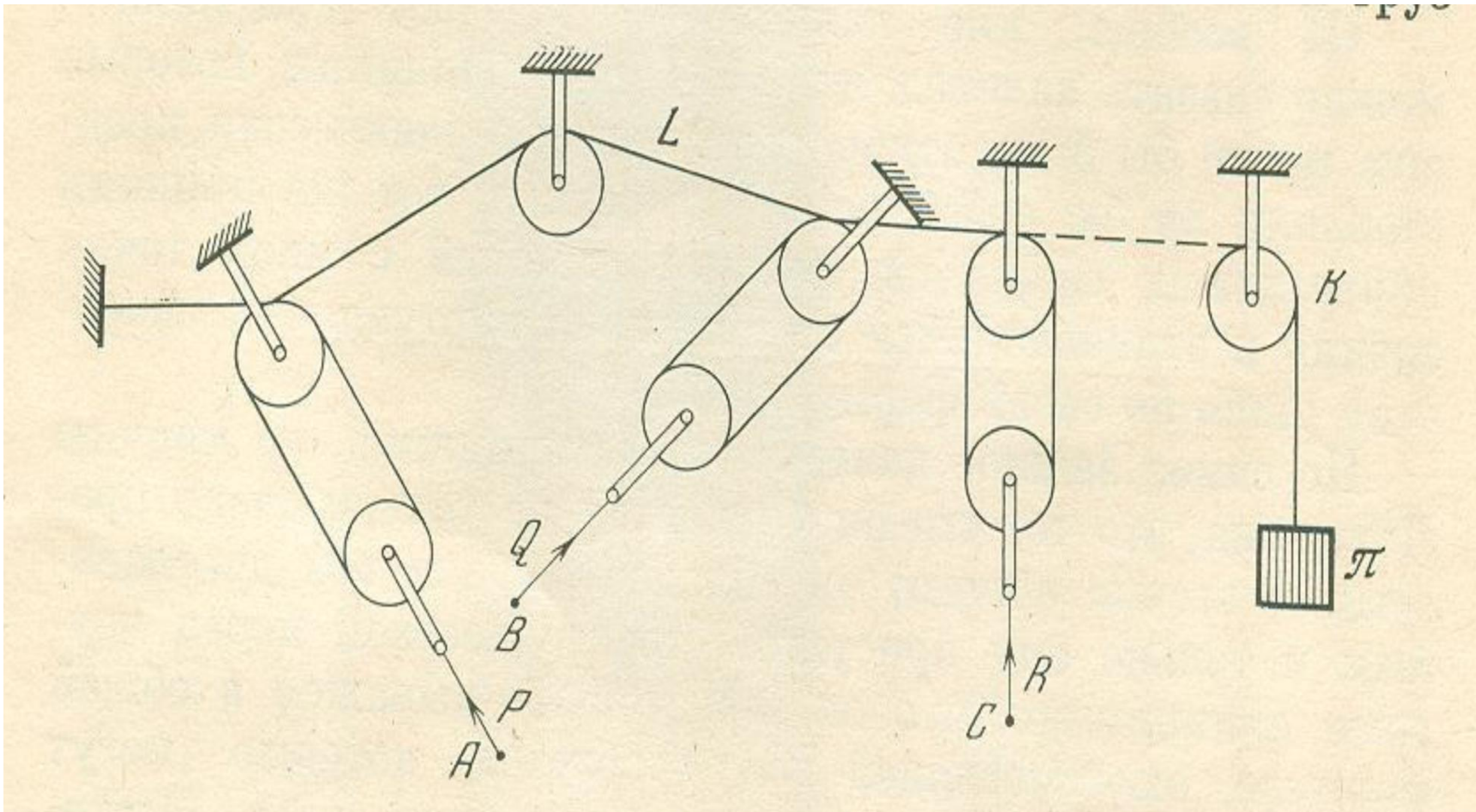
Принцип блоков (полиспаста)

В системе из неподвижных и подвижных блоков отношение между силой движения P и силой сопротивления R равно 1/n, где n число нагруженных нитей





Обоснования принципа возможных скоростей при помощи принципа блоков
В.Л. Кирпичев «Беседы о механике» (1950), с. 22
Э. Мах, «Механика. Историко-критический очерк развития» (2000), с. 61, рис. 54.

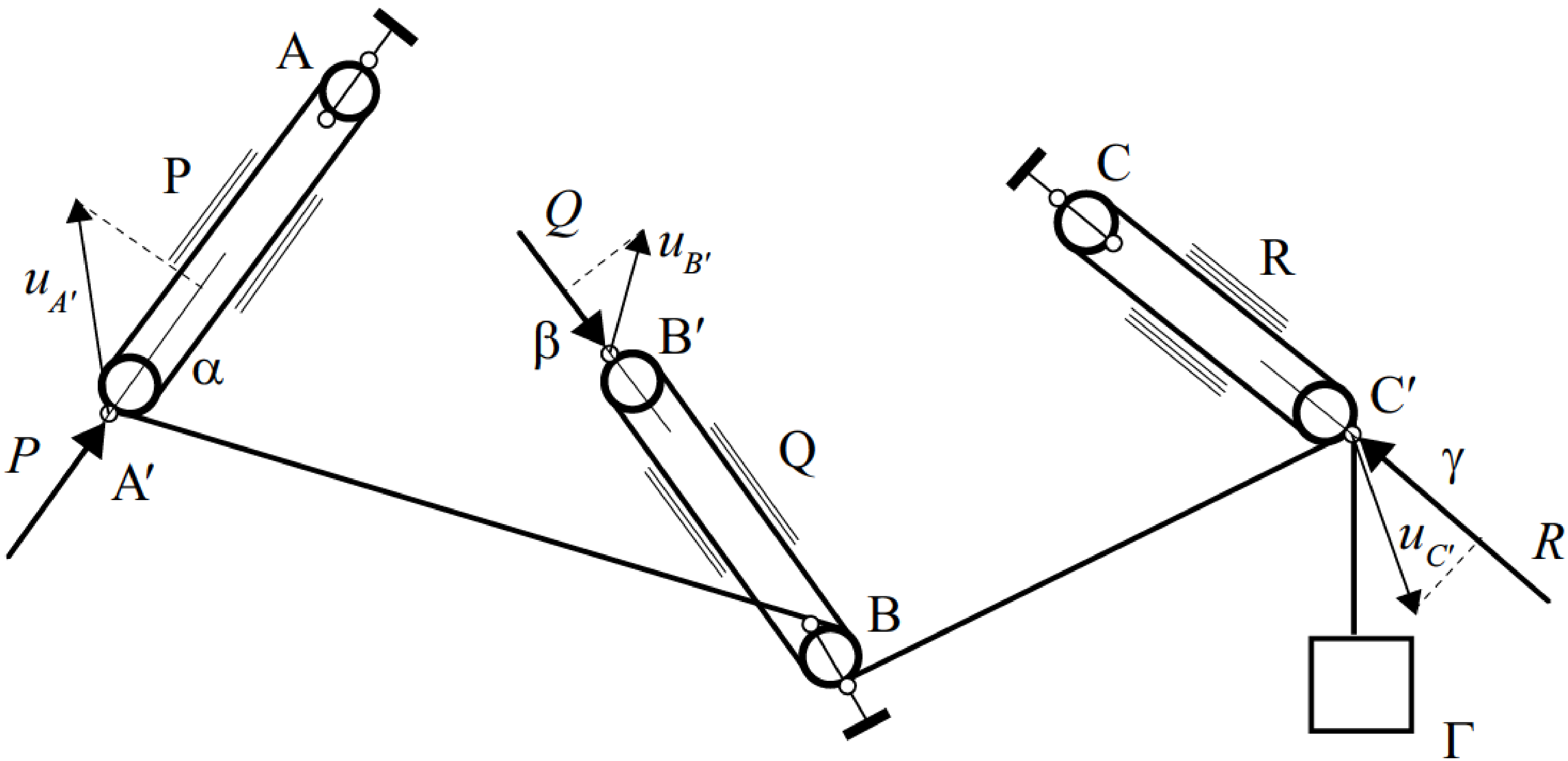


Реконструкция обоснования принципа возможных скоростей (Д. Капекки)

$u_{A'}$, $u_{B'}$, $u_{C'}$ – бесконечно малые возможные перемещения

α, β, γ – проекции этих перемещений на линии действия сил *P*, *Q*, *R*

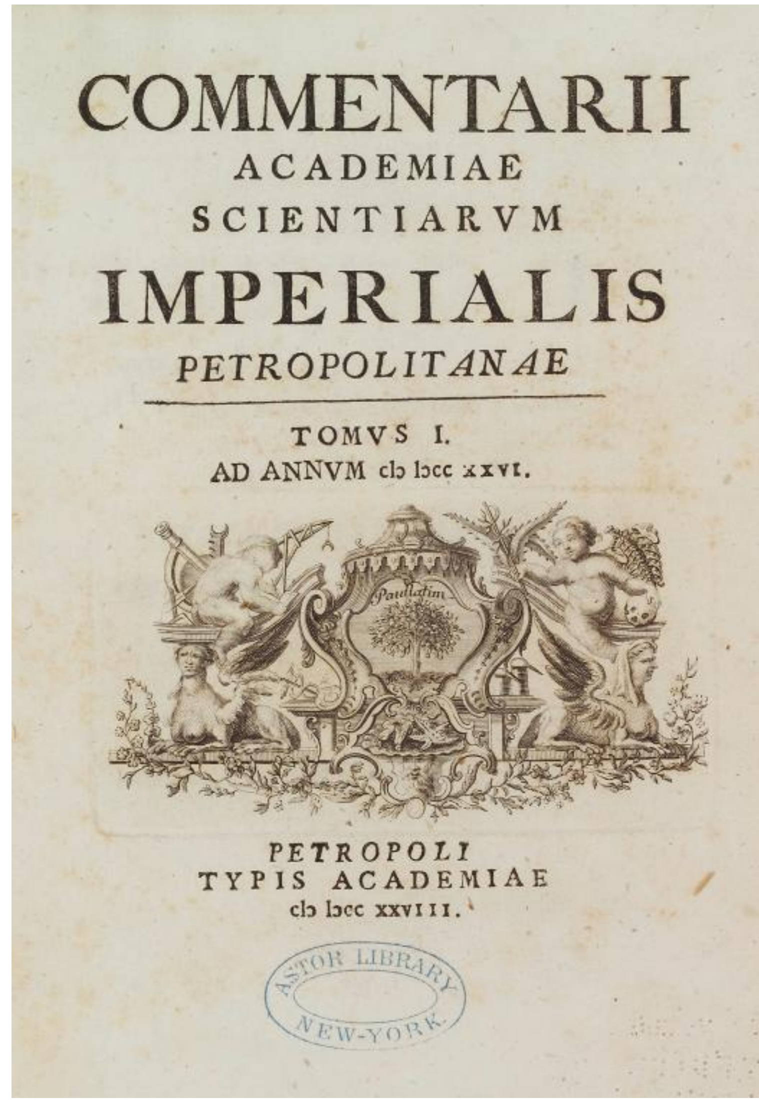
D. Capecchi, “History of virtual work laws” (2012), p. 261.



II. Даниил Бернулли (1700-1782)

«Исследование принципов механики и геометрическое доказательство сложения и разложения сил» (1728)

Даниил Бернулли (1700 – 1782). «Исследование принципов механики и геометрическое доказательство сложения и разложения сил»
Commentarii Academiae Petropolitanae . T. I (1726) Титульный лист



COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMVS I.
AD ANNVM cIↄ Iↄcc xxvi.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cIↄ Iↄcc xxviii.

Д. Бернулли. «Геометрическое доказательство сложения и разложения сил»

Поводом для написания статьи стала публикация в 1725 г. книги Вариньона «Новая механика».

В ней закон сложения двух сил, приложенных к материальной точке, обосновывается ссылкой на закон сложения по правилу параллелограмма двух «движений», которые эти силы «сообщают» этой точке, действуя порознь.

Бернулли критикует две «гипотезы», на основе которых Вариньон ведет свое доказательство:

Гипотеза 1: Скорость, которую сила сообщает телу, пропорциональна этой силе (аксиома аристотелевской динамики);

Гипотеза 2: о независимости сообщаемых телу отдельными силами движений друг от друга.

Бернулли считает, что для решения вопроса о совместном действии сил в статике (в отсутствие движения) следует полностью отказаться от использования понятия движения.

Д. Бернулли. Геометрическое доказательство сложения и разложения сил

Методология Бернулли

Основным понятием механики является сила (potentia). Она понимается как сила тяги.

Математически сила трактуется как отрезок, величина которого соответствует величине силы, а направление направлению действия силы.

Две силы, приложенные к данной точке, называются эквивалентными, несли они изображаются одинаковыми по величине и направлению отрезками.

Д. Бернулли. Геометрическое доказательство сложения и разложения сил

«Гипотезы» (аксиомы) Бернулли

(понятие движения полностью исключается из рассмотрения):

Гипотеза 1. Две любые силы могут быть заменены эквивалентными силами.

Гипотеза 2. Две силы, имеющие одинаковое направление, эквивалентны одной силе, равной их сумме, и две силы, прямо противоположные по направлению, эквивалентны одной силе, равной их разности.

Гипотеза 3. Данная сила, эквивалентная двум равным силам, является одинаково наклоненной к той и другой из них, то есть направленной вдоль внутренней биссектрисы угла, образованной этим двумя силами.

Замечание. 2-ая гипотеза трактует только о величине «суммарной» силы.

3-я гипотеза – только о направлении «суммарной» силы (она ничего не говорит о ее величине).

Д. Бернулли. Геометрическое доказательство сложения и разложения сил

Геометрическое доказательство Бернулли довольно сложное.

Оно содержит несколько шагов.

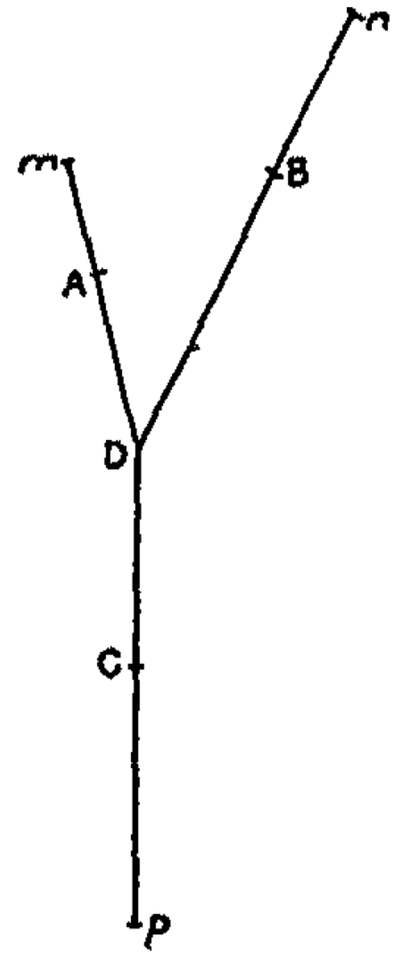
Подробности

Jouget, “Lectures…” t.2 p. 59 sq.

Westphal, S. 11-13.

Первый шаг

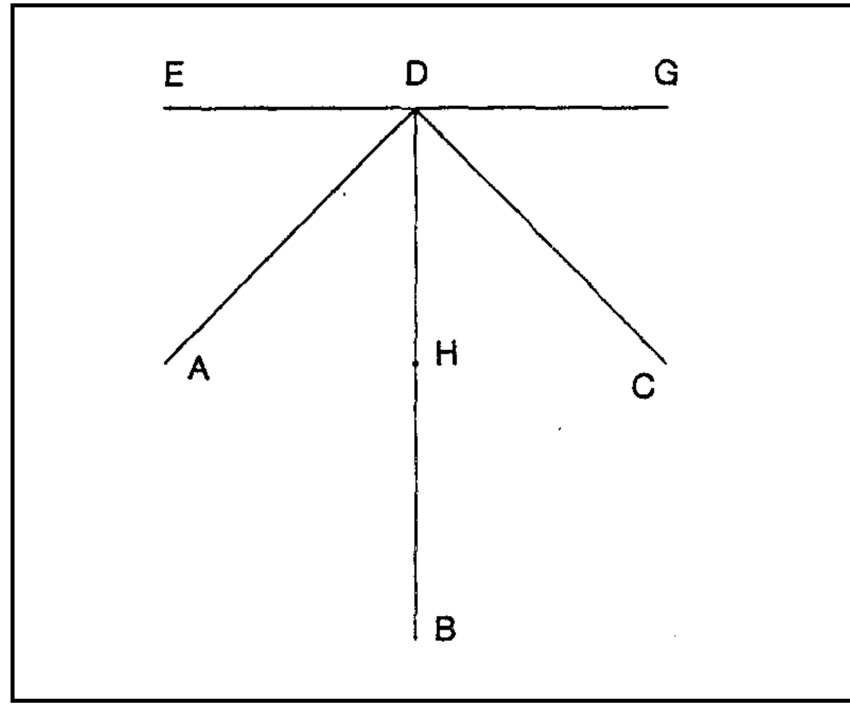
Предложение 1. (лемма). Если три силы DA, DB, DC находятся в равновесии, то в равновесии будут находится кратные им силы Dm, Dn, Dp.



Д. Бернулли. Геометрическое доказательство сложения и разложения сил

Предложение 2 (задача).

Найти силу DB, эквивалентную двум силам DA и DC, которые равны по величине и перпендикулярны по направлению.



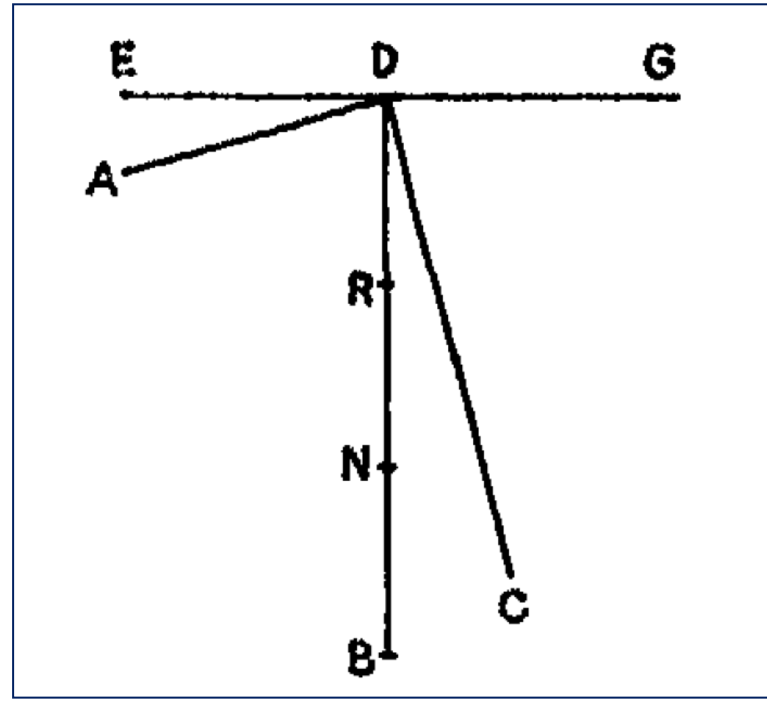
Решение. Поскольку направление силы DB определено (гипотеза 3), остается найти ее величину.

Ответ: она равна величине диагонали квадрата.

Д. Бернулли. Геометрическое доказательство сложения и разложения сил

Предложение 3 (задача).

Найти силу DB, эквивалентную двум силам DA и DC, которые перпендикулярны по направлению, но не равны по величине.



Решение

(опускаем …)

Ответ …

Следствие 1:

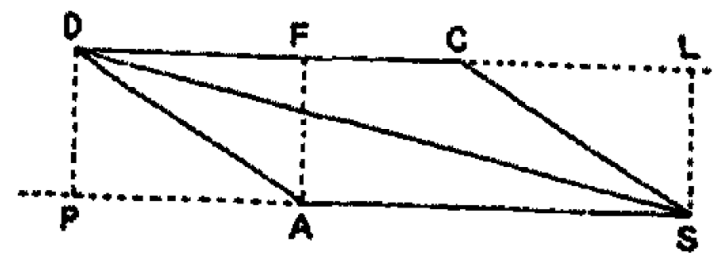
Сила DB равна по величине диагонали прямоугольника, построенного на отрезках DA и DC.

NB. Найдена только величина DB, но нам пока ничего не известно о ее направлении.

Д. Бернулли. Геометрическое доказательство сложения и разложения сил

Следствие 2:

В предположении, что сила DB направлена по диагонали прямоугольника, построенного на отрезках DA и DC, можно доказать, что то же самое верно для двух сил, угол между которыми не обязательно является прямым.



Доказательство

Заменим силу DA на две силы DP и DF, перпендикулярные между собой. Тогда вместо двух сил DA и DC у нас три силы DP, DF и DC, или, что то же самое, две силы DP и DL, эквивалентные DS.

Но диагональ DS является также диагональю параллелограмма DASC.

Q.E.D.

III. Луи Пуансо, «Начала статики» (1803)

1. Критика Пуансо аналитической статики Лагранжа

Луи Пуансо (Louis Poinsot) (1777-1859)

- Окончил Политехническую школу в Париже (1797), с 1809 профессор там же.

- Член Парижской Академии наук с 1813

- В период Июльской монархии (1830-1848) – в Министерстве народного образования. Пэр Франции (1846), сенатор (1852)

- В 1803 опубликовал «Начала статики» (Les éléments de statique), в которых применил разработанные им геометрические методы исследования к учению о равновесии твёрдых тел и их систем.

- В 1834 построил теорию вращения твёрдого тела вокруг неподвижной точки.

Луи Пуансо, «Начала статики» (1803)

Пуансо – наиболее яркий представителем новой французской механики.

Основное произведение по статике «Начала статики» (1803, 10-е издание в 1861; русские переводы 1866, 1920).

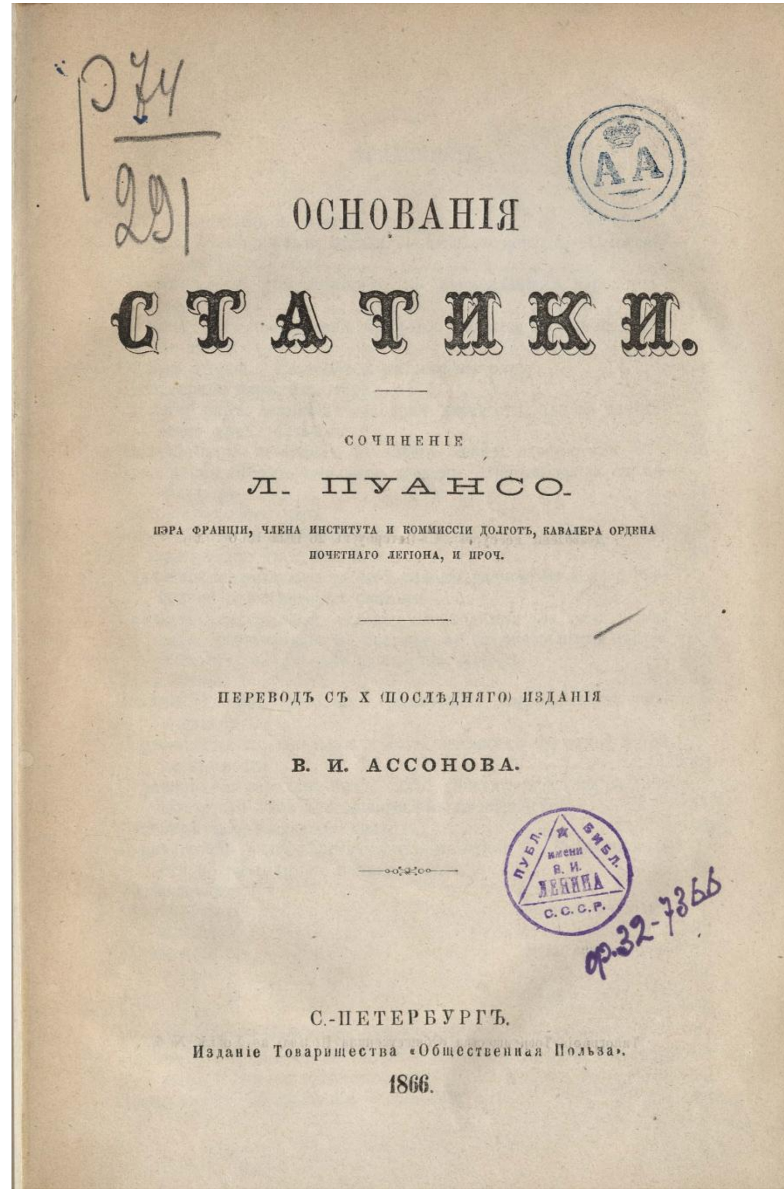
Оценка книги Пуансо

- «На заре нашего столетия были даны Пуансо лучшие основы статики».

  Е. Дюринг, «Критическая история общих принципов механики», 1873

- «В статике это произведение сыграло ту же роль, что «Начала» Ньютона в динамике».

  И.Н. Веселовский, «Очерки по истории теоретической механики», 1974.



ОСНОВАНІЯ

СТАТИКИ.

СОЧИНЕНІЕ

Л. ПУАНСО.

ПЭРА ФРАНЦІИ, ЧЛЕНА ИНСТИТУТА И КОММИССІИ ДОЛГОТЪ, КАВАЛЕРА ОРДЕНА ПОЧЕТНАГО ЛЕГІОНА, И ПРОЧ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ X (ПОСЛѢДНЯГО) ИЗДАНІЯ

В. И. АССОНОВА.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе Товарищества «Общественная Польза».

1866.

Пуансо. Критика принципа возможных скоростей Лагранжа. Программа Пуансо по его исключению из статики

В случае успеха,

«мы исключили бы идеи бесконечно малых движений и нарушений равновесия, которые являются <u>идеями, чуждыми</u> данному вопросу; принцип возможных скоростей выглядел бы тогда как простая теорема геометрии, не связанная с теми соображениями, которые всегда оставляют в уме нечто неясное».

«Размышления относительно принципа возможных скоростей» (1797).
Рукопись, написанная 20-летним Пуансо
(полностью опубликована в 1975)

Л. Пуансо, «Начала статики» (расширенное издание, 1861).
Критические соображения о принципе возможных скоростей

«Принцип возможных скоростей, как и большинство общих принципов механики, известен давно.

Галилей был первым, кто наблюдал у машин это знаменитое свойство скорости, хорошо известное соотношение, которое существует между приложенными силами и скоростями, которые имели бы точки их приложения в случае бесконечно малого нарушения равновесия машины.

Иоганн Бернулли, осознав полноту этого принципа, сформулировал его с большой степенью общностью, признаваемой за ним и в настоящее время.

Вариньон и множество геометров позаботились проверить его почти во всех разделах статики; и хотя общего доказательства этого принципа нет, его стали повсеместно рассматривать как основной закон равновесия систем».

Л. Пуансо, «Начала статики» (расширенное издание, 1861). Критика принципа возможных скоростей

Указав на «Аналитическую механику» Лагранжа, как на вершину развития принципа возможных скоростей, Пуансо пишет:

«Тем самым (т.е. посредством аналитической техники – *Е.З.*) преодолевались все трудности механики.

Но при этом <u>стали избегать, так сказать, занятий самой наукой</u>, которая превратилась в простой математический расчет; это превращение, свершившееся благодаря аналитической механике, явилось ярким примером силы Анализа.

…

Успешное развитие механики на основе единой формулы привело к вере в то, что эта наука уже по сути создана и что в ней остается только демонстрировать силу принципа возможных скоростей [в решении конкретных вопросов]».

Л. Пуансо, «Начала статики» (расширенное издание, 1861). Критика принципа возможных скоростей

Однако, последующее развитие механики показало наличие трудностей.

«Этот весьма общий закон (принцип возможных скоростей), в котором смешаны смутные и чуждые [статике] представления о бесконечно малых движениях и нарушениях равновесия, в известном смысле только затемнил суть дела.

Книга г-на Лагранжа уже тогда не давала ничего ясного, если не считать успехов в области математических расчетов. Над курсом механики сгустились тучи…»

Л. Пуансо, «Начала статики» (расширенное издание, 1861). Критика принципа возможных скоростей

«Г-н Лагранж поставил себя на вершину науки, открыв общее правило для решения или, по крайней мере, для сведения к уравнению всех задач механики; и эта цель было им достигнута.

Но чтобы сформировать механику как науку, нужно создать общую теорию, которая в равной степени охватывала бы все возможные точки зрения, с которых ее можно рассматривать.

Мы должны идти напрямик, не к смутному принципу возможных скоростей, а к некоторому ясному правилу для решения проблем.

Этот поиск, призванный удовлетворить наш ум, является главной целью публикуемого нами мемуара».

ЛУИ ПУАНСО. «Начала статики»

- Основная идея трактата – для изучения условий равновесия тел не следует исходить из предположения об их движении.

  (это – точка зрения С. Стевина и Д. Бернулли).

- Пуансо: «И хотя во Вселенной, возможно. не найдется ни одной молекулы, которая находилась бы в абсолютном покое даже в очень короткий промежуток времени, тем не менее совершенно, ясно, что тело может существовать, находясь в покое».

- Но если это тело будет в покое хотя бы одно мгновение, то оно всегда таким и останется, если только какая-нибудь посторонняя *причина* не выведет его из этого состояния (1-ый закон Ньютона).

- Эту причину, какой бы она ни была и которая известна только по ее действиям, называют *силой* (франц. puissance – *мощность*). Ср. Д. Бернулли – potentia.

ЛУИ ПУАНСО. «Начала статики»

Методология Пуансо

I. О понятии силы. Сила есть причина производящая движение тела. Сила обладает точкой приложения, величиной и направлением.

II. Основные задачи механики:

- Прямая: найти движение, которое какая-либо механическая система получает под действием заданных сил,
- Обратная: найти соотношения сил, действующих на систему, чтобы она получила заданное движение.

III. Начинать надо со статики

- Для решения общей задачи нужно начать с частного случая — решить, какими должны быть соотношения сил, приложенных к системе, чтобы она получила движение, равное нулю, иными словами, находилась бы в равновесии.
- Если эта задача будет решена, то к ней легко будет привести и другую; вот почему обычно изучение механики начинают со статики, которую определяют как науку о равновесии сил.

ЛУИ ПУАНСО. «Начала статики»

Основное отличие статики от динамики: при решении статических задач достаточно знать только величины и направления приложенных сил, тогда как в динамике требуется кроме того, знание и некоторых дополнительных данных.

При рассмотрении равновесия свободного твердого тела достаточно знать лишь координаты точек приложения сил, величины сил и направляющие косинусы линий их действия.

Принцип освобождаемости от связей

Если тело не является свободным, то его всегда можно сделать таковым, отбросив сопротивления и заменив их подходящими силами. Таким образом, Пуансо вводит в науку понятие о реакции связей и так называемую аксиому связей. В этом заключается отличие статики Пуансо от статики Лагранжа.

Принцип освобождаемости от связей в формулировке Пуансо:

«Сопротивления, испытываемые телом от постоянных причин, могут быть заменены соответственными силами, после такой замены сопротивлений силами можно считать тело свободным в пространстве».

Пуансо «Начала статики». Структура трактата

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА I. «Основные начала». Сложение и разложение сил. Пары сил. Общий случай сложения – приведение системы сил к силе и паре сил, плоскость которой перпендикулярна силе.

ГЛАВА II. «Об условиях равновесия». Условия равновесия параллельных сил. Условия равновесия тел, имеющих одну и две точки опоры.

ГЛАВА III. Теория центров тяжести. Центр тяжести рассматривается не как особая точка приложения веса тела, а как центр параллельных сил – точка, через которую проходит равнодействующая весов частиц тела.

ГЛАВА IV. «О машинах». Определение машины: машины представляют не что иное, как тела или системы тел, стесненные в своих движениях какими-нибудь препятствиями.

В зависимости от этих препятствий Пуансо дает классификацию машин:

- рычаг (наличие одной неподвижной точки опоры),
- ворот (наличие неподвижной прямой)
- наклонная плоскость (наличие неподвижной опорной плоскости)

Классификация тесно связана с рассматриваемыми во второй главе случаями равновесия несвободного тела.

2. Аксиомы, леммы и основные теоремы статики в трактате Пуансо «Начала статики»

Глава I. Отдел I «Сложение и разложение сил» Аксиомы, леммы, следствия

Аксиома 1. «Очевидно что все силы, равные и противоположные, приложенные в одной и той же точке, находятся в равновесии».

Аксиома 2. «Очевидно также, что все силы, равные и противоположные, приложенные к концами прямой лини неизменяемой длины и действующие по направлению этой прямой, будут в равновесии, потому что нет никакой причины, почему бы движение произошло в одну сторону преимущественнее пред другою, точно также как в первой аксиоме».

Следствие аксиомы 2. «Отсюда легко заключаем, что действие силы на тело не изменится в какой бы точке своего направления сила ни была приложена». Т.е. точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия».

Лемма о существовании равнодействующей двух сил.

Примечание к лемме. «В одном только случае можно видеть à priori какое будет направление равнодействующей: это когда обе силы P и Q равны. Ясно, что равнодействующая в этом случае делит угол составляющих пополам, потому что нет никакой причины, чтобы равнодействующая делала с одною из составляющих угол, меньший, чем с другою».

Глава I. Отдел I «Сложение и разложение сил» Аксиомы, леммы, следствия

«Основная аксиома.

Когда две силы P и Q действуют по одному направлению и в одну и ту же сторону, то очевидно, и должно принять за аксиому, что эти силы можно сложить и они дадут равнодействующую, равную их сумме P + Q».

«Примечание. Эта аксиома есть основание всей науки о равновесии. Ее можно рассматривать или как определение, или как требование, которое должно допустить без всякого доказательства; потому что она следует из самого понятая о силе, как о величине».

«Следствие.

Если две неравный силы P и Q действуют по одному направлению, но в противоположные стороны, то равнодействующая их равна разности этих сил P — Q и действует в сторону большей силы, потому что можно предположить в большей силе, которая положим будет P, силу равную и противоположную меньшей силе Q, и которая ее уничтожить. Точка приложения будет подвержена тогда действию разности P — Q двух сил P и Q».

-

Основные теоремы статики в трактате Пуансо «Начала статики»

О равнодействующей параллельных сил

Теоремы I и II.

Равнодействующая двух параллельных сил, направленных в одну сторону и приложенных в твердом теле, равна сумме величин сил и делит отрезок, соединяющий точки приложения составляющих в отношении, обратном отношению величин сил.

О равнодействующей сходящихся сил

Теоремы III и IV.

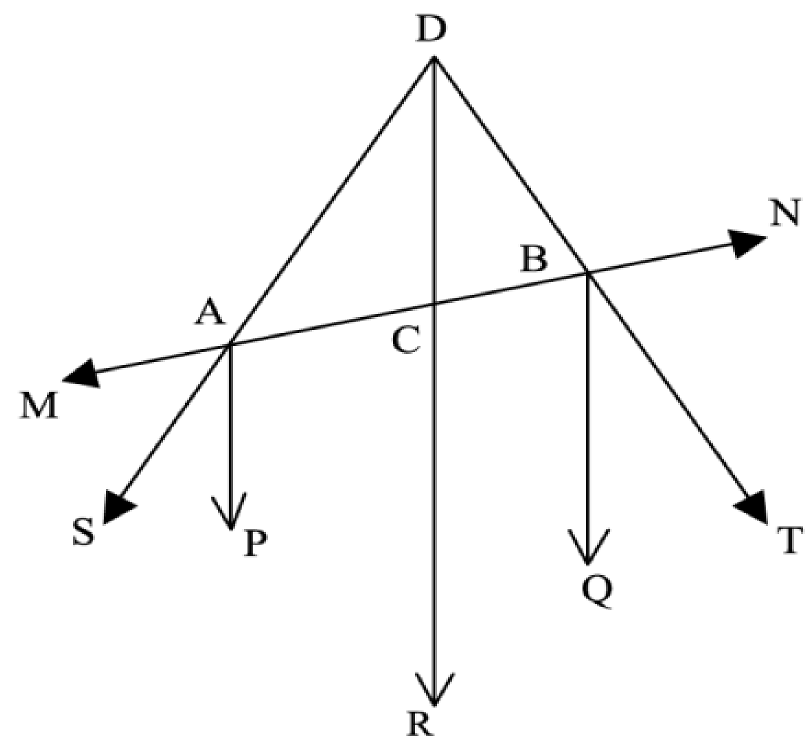
Обоснование фундаментального правила геометрической статики – правила параллелограмма (для сложения двух сходящихся сил).

Сложение сил, действующих по параллельным направлениям

«Теорема I. Если какие-нибудь две параллельный силы P и Q, действующие в одну сторону, будут приложены к концам A и B прямой неизменяемой линии AB, то

1) эти две силы имеют равнодействующую силу, которая приложена к линии AB между A и B;

2) эта сила параллельна составляющим силам P и Q и равна их сумме».



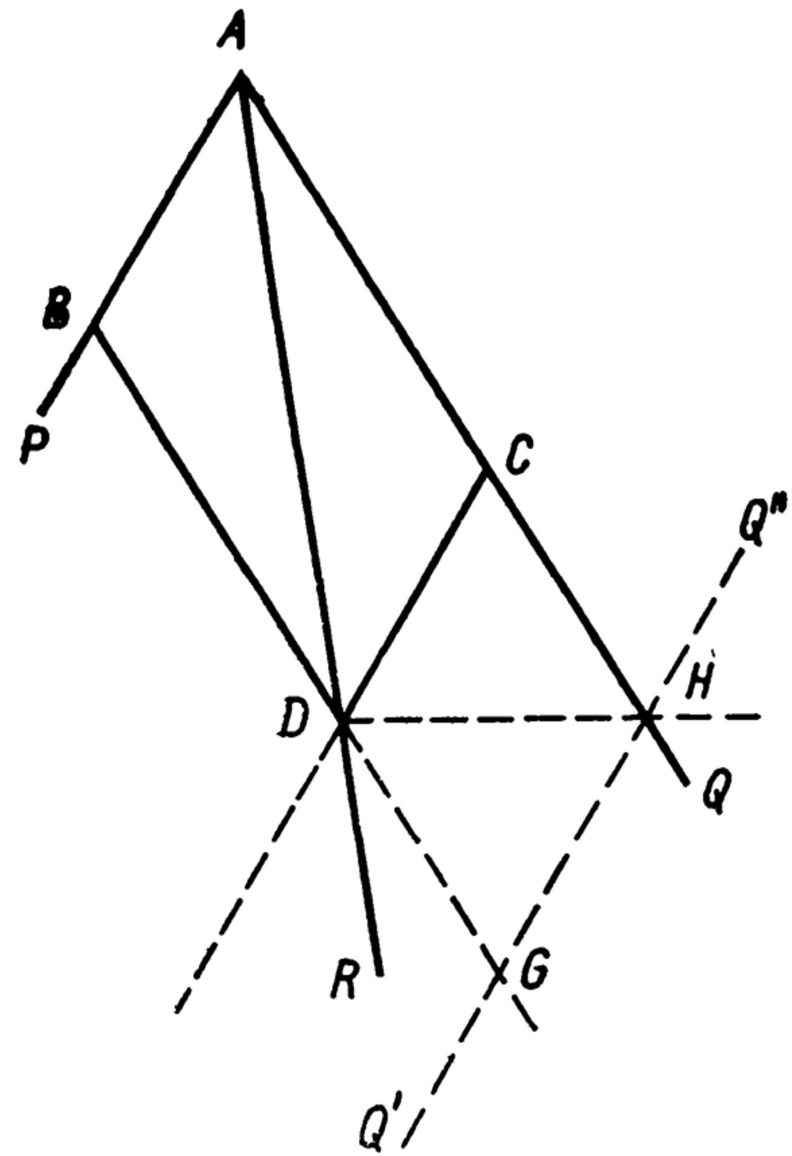
Остроумное доказательство, основанное на добавлении двух равных, но разнонаправленных сил AM и BN.

Теорема II (об обратном отношении сил и отрезков). Идея доказательства аналогична той, которую использовали Стевин и Галилей для правила рычага.

Сложение сходящихся сил

«Теорема III.

Равнодействующая двух сил P и Q, приложенных к точке A и действующих под каким-нибудь углом, направляется по диагонали параллелограмма ABCD, построенного на линиях AB и AC, которые представляют величины и направления двух сил P и Q».

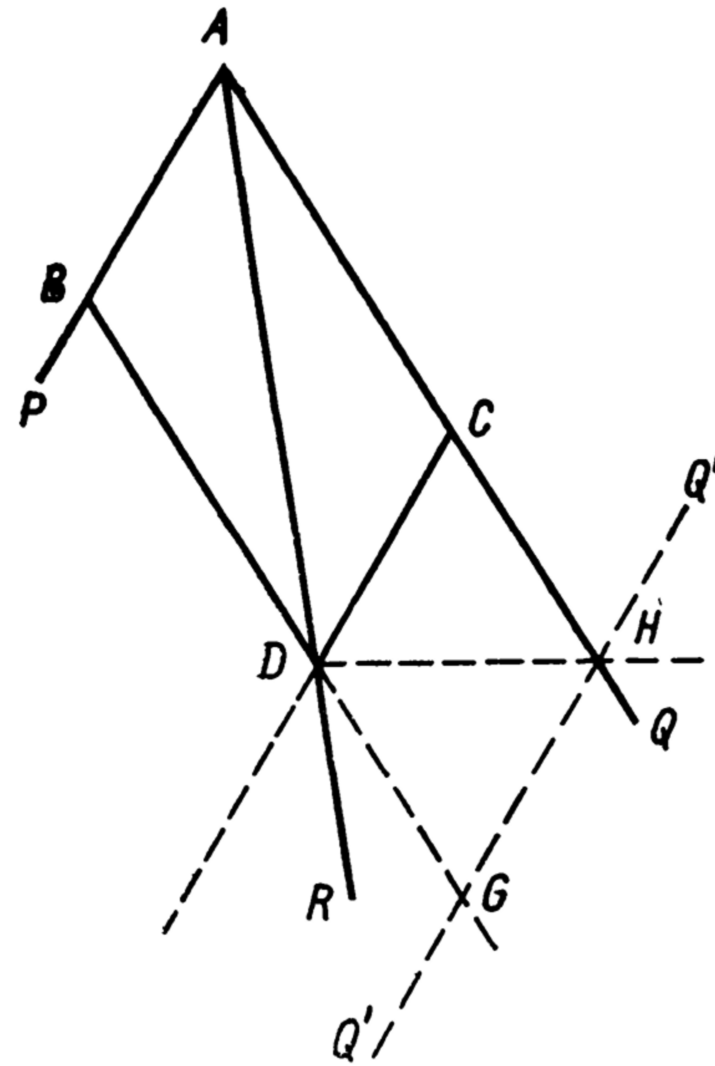


Сложение сходящихся сил

Доказательство.

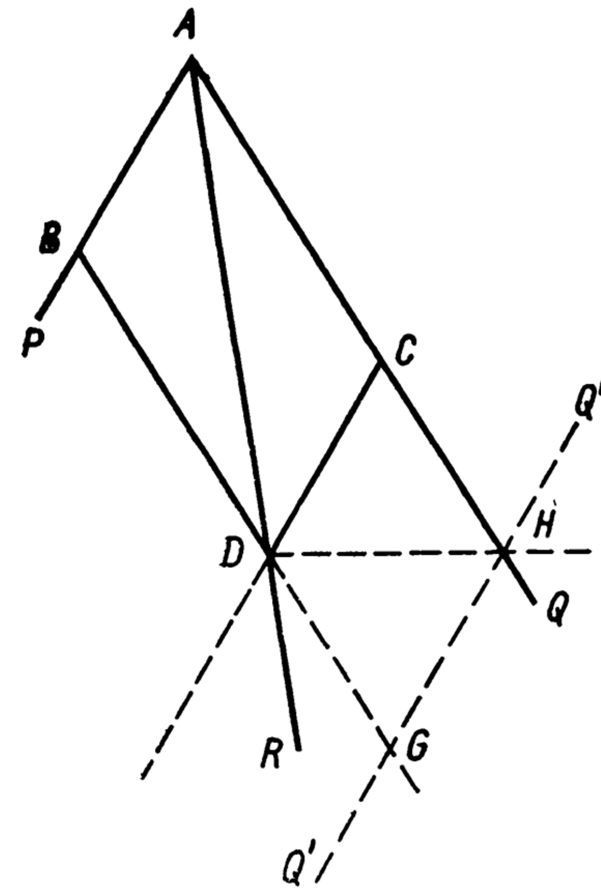
Продолжим отрезок АС на длину СН, равную АВ. На равных отрезках СН и CD строим ромб CHGD. В его вершинах Н и G прилагаются равные и противоположно направленные силы величиной Q: в точке G — сила Q', а в точке Н — сила Q".

Очевидно, что равнодействующая четырех сил Р, Q, Q', Q" должна пройти через точку D. Ибо сила Р и Q' — параллельные, и их равнодействующая делит отрезок BG в обратном отношении самих сил, т. е. как BD : DG. Следовательно, она пройдет через D. Равнодействующая двух равных, сходящихся в точке Н сил Q и Q, пройдет по диагонали ромба, т. е. по HD, значит, также через точку D. Но в системе четырех сил Р, Q, Q‘, Q" силы Q', Q" взаимно уничтожаются, следовательно равнодействующая сил Р и Q пройдет через точку D.



Сложение сходящихся сил

«Теорема III. Равнодействующая двух сил P и Q, приложенных к точке A и действующих под каким-нибудь углом, направляется по диагонали параллелограмма ABCD, построенного на линиях AB и AC, которые представляют величины и направления двух сил P и Q».



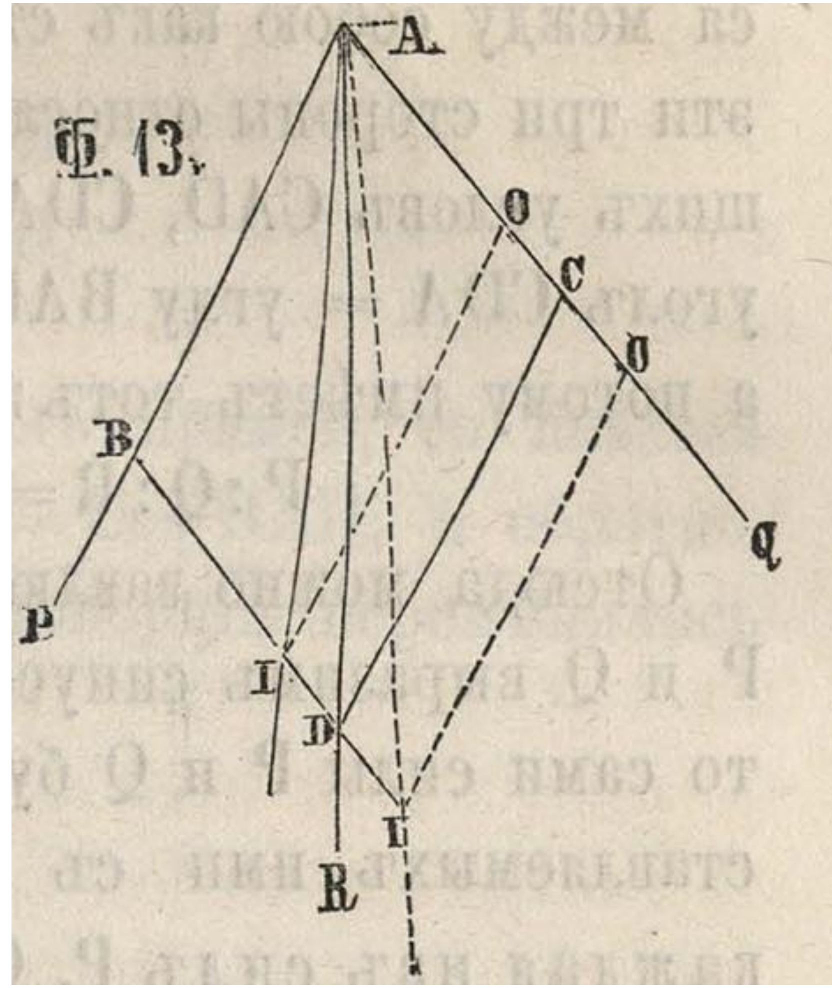
Доказательство. Продолжим отрезок AC на длину CH, равную AB. На равных отрезках CH и CD строим ромб CHGD. В его вершинах H и G прилагаются равные и противоположно направленные силы величиной Q: в точке G — сила Q', а в точке H — сила Q". Очевидно, что равнодействующая четырех сил P, Q, Q', Q" должна пройти через точку D. Ибо сила P и Q' — параллельные, и их равнодействующая поделит отрезок BG в обратном отношении самих сил, т. е. как BD : DG. Следовательно, она пройдет через D. Равнодействующая двух равных, сходящихся в точке H сил Q и Q, пройдет по диагонали ромба, т. е. по HD, значит, также через точку D. Но в системе четырех сил P, Q, Q‘, Q" силы Q', Q" взаимно уничтожаются, следовательно равнодействующая сил P и Q пройдет через точку D.

Сложение сходящихся сил

Следствие. Если бы были известны одни только направления сил P, Q и их равнодействующей R, то мы могли бы определить отношение между величинами сил P и Q.

Доказательство. Возьмем на направлении равнодействующей R произвольную точку D и проведем через нее линии DC и DB, параллельные направлениям сил P и Q. Мы получим P : Q = AB : AC. Такое отношение даст любая точка линии равнодействующей.

Если взять любое другое отношение AB : AO, где AO ≠ AC, то по только что доказанной теореме равнодействующая должна пройти через диагональное направление нового параллелограмма AOKB, но это даст новое направление равнодействующей, что противоречит предположению.

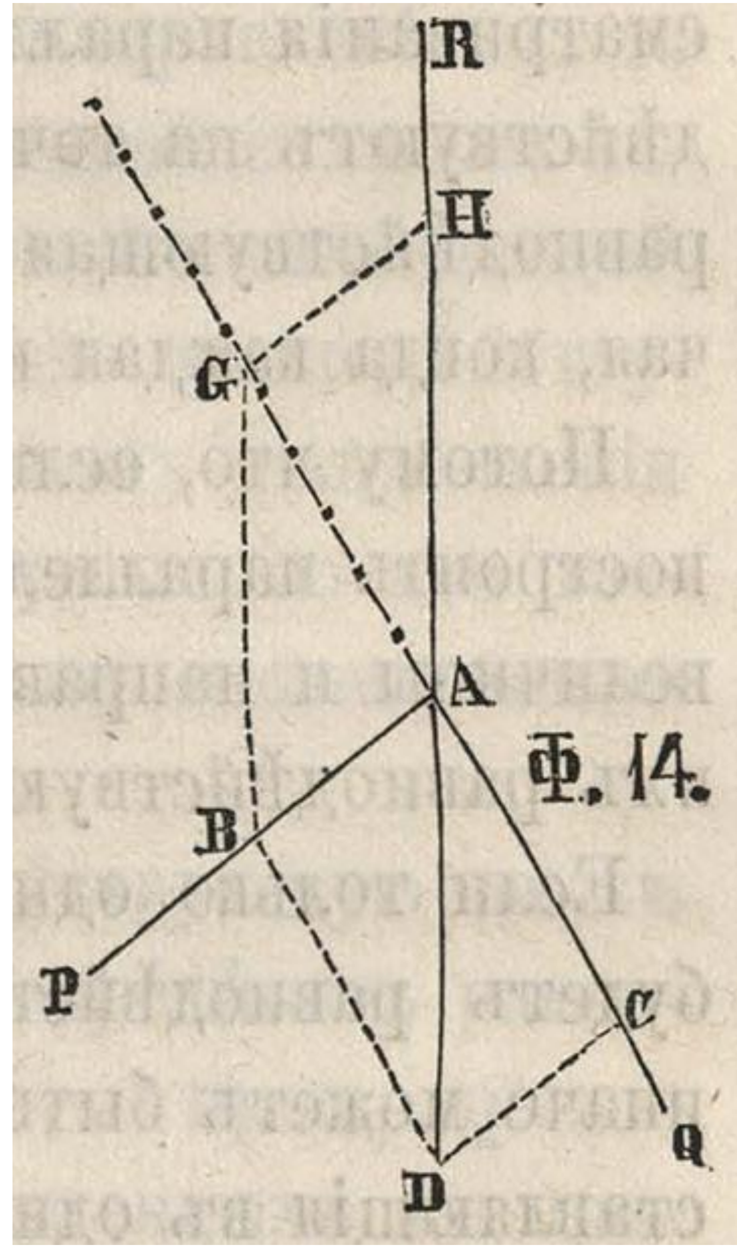


Сложение сходящихся сил

Теорема IV. Равнодействующая двух сил P и Q, приложенных к точке A, выражается *по величине* и направлению диагональю параллелограмма ABDC, построенного на линиях AB и AC, которые изображают собой величину и направление этих сил.

Идея доказательства: равнодействующая сил P и Q обозначается через R и откладывается от точки A в противоположном направлении. Тогда силы P, Q и R находятся в равновесии. В противоположном направлении от точки A откладывается также сила Q, которая становится равнодействующей сил P и R.

Доказательство следует из теоремы III и следствия из нее.



3. Элементы теории пары сил

Понятие «пара сил»

Важнейшей заслугой Пуансо явилось введение им в статику ценной и чрезвычайно плодотворной новой абстракции — «пара сил».

Основная часть трактата «Начала статики» посвящена разработке теории пар: преобразованию системы сил и пар, приложенных к твердому телу на основе принципа сложения и разложения сил.

В результате работ Пуансо разрыв в предшествующем развитии статики между направлением, основанным на принципе сложения сил, и направлением, основанным на принципе рычага, был устранен.

В сочинении Пуансо установлена и использована возможность изложения статики на основе единого принципа сложения и разложения сил.

Перенесение пары сил.

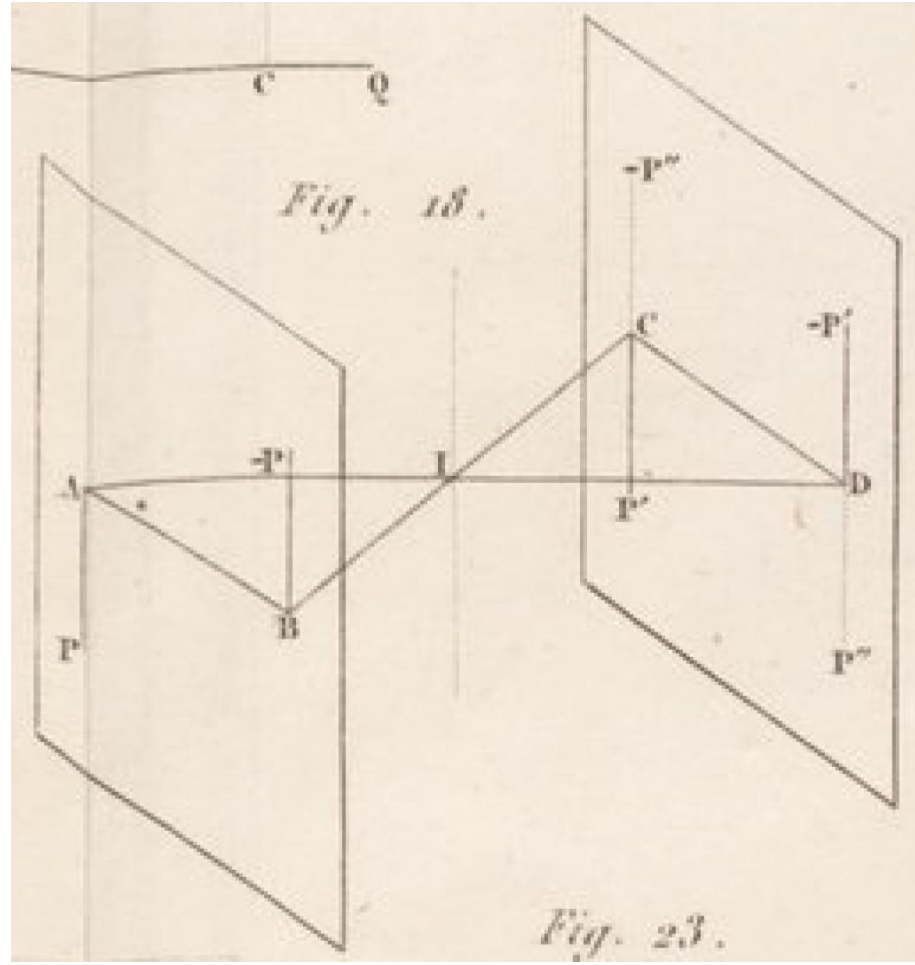
«Мы видели выше, что сила может быть перенесена в какую угодно точку ее направления, лишь бы только эта точка была неизменно соединена с точкой приложения.

Подобное предложение мы сейчас докажем для пар, оно не менее замечательно, как и первое» (Пуансо).

Перенесение пары сил.

<u>Лемма</u> (первая часть)

Пара сил (P, –P) может быть перенесена куда угодно в ее плоскости или во всякую другую плоскость ей параллельную, без изменения ее действия на тело.



<u>Доказательство</u>.

В параллельной плоскости к плечу CD = AB приложим две противоположные пары (P', –P') и (P'', –P''), равные паре (P, –P).

Пары (P, –P) и (P'', –P'') взаимно уничтожаются.

Остается пара (P', –P'), действующая на плечо CD, равное и параллельное AB.

Перенесение пары сил

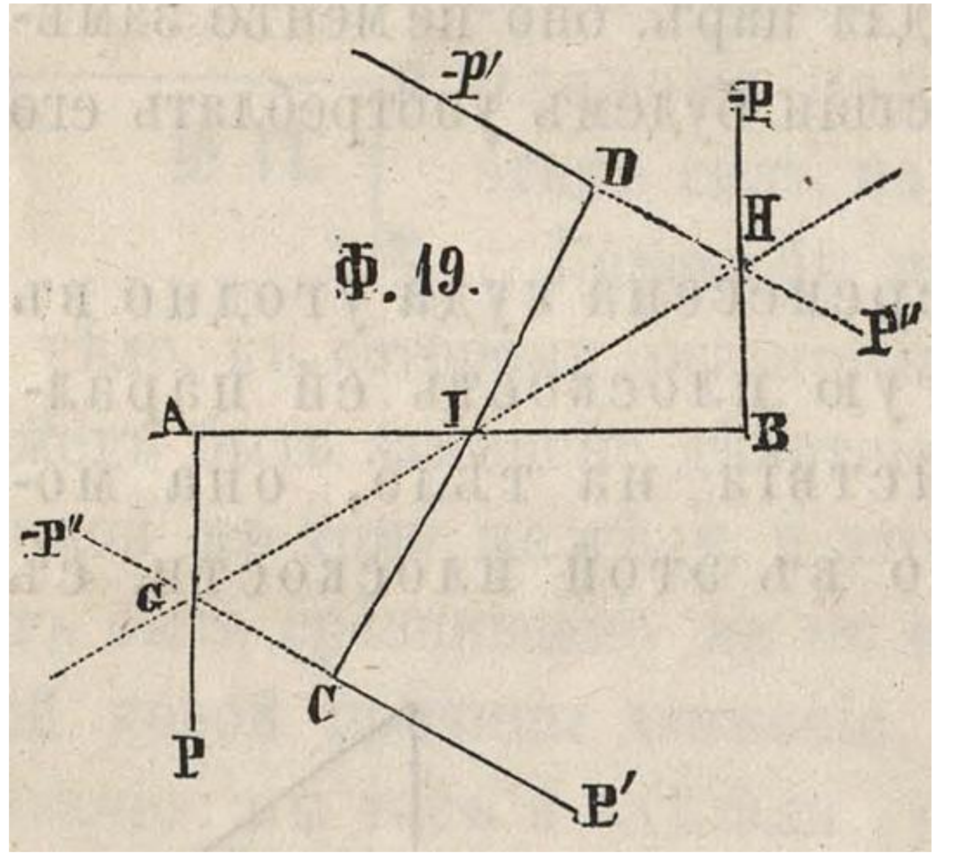
Лемма (вторая часть)

Пара сил (P, –P) может быть обращена как угодно в этой плоскости с условием, чтобы новое плечо было неизменно соединено с прежним.

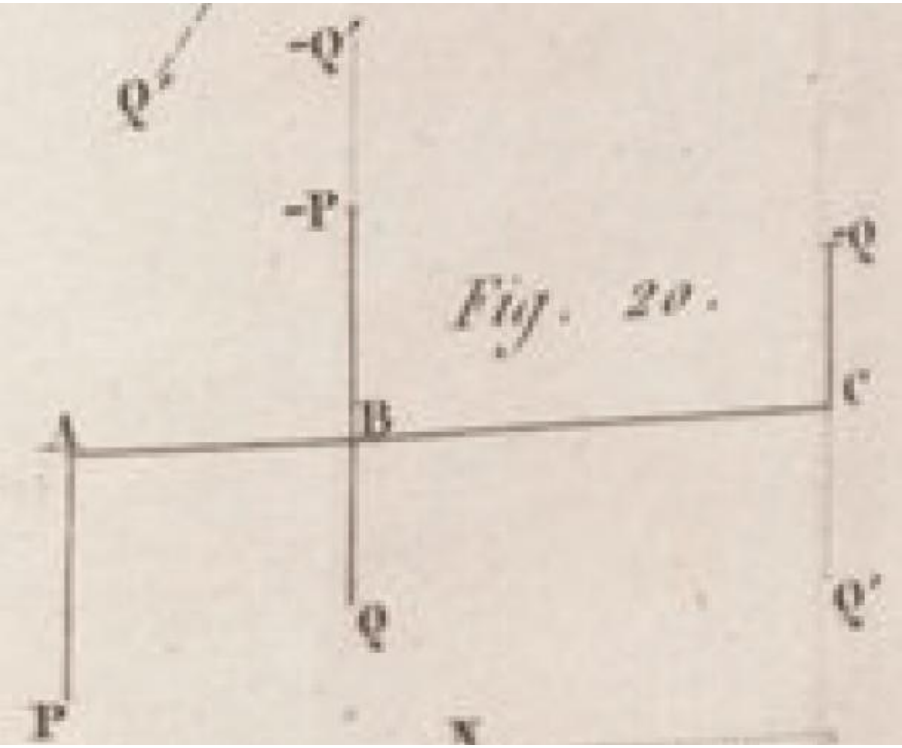
Доказательство

К плечу CD = AB приложим две противоположные пары сил (P', –P') и (P'', –P''), равные паре (P, –P). Две равные силы P и –P'', встречающиеся в точке G, дают равнодействующую, равную и противоположную равнодействующей двух сил –P и P'', пересекающихся в точке H. Поэтому пары (P, –P) и (P'', –P'') взаимно уничтожатся.

Таким образом, остается одна пара (P', –P'), приложенная к CD.



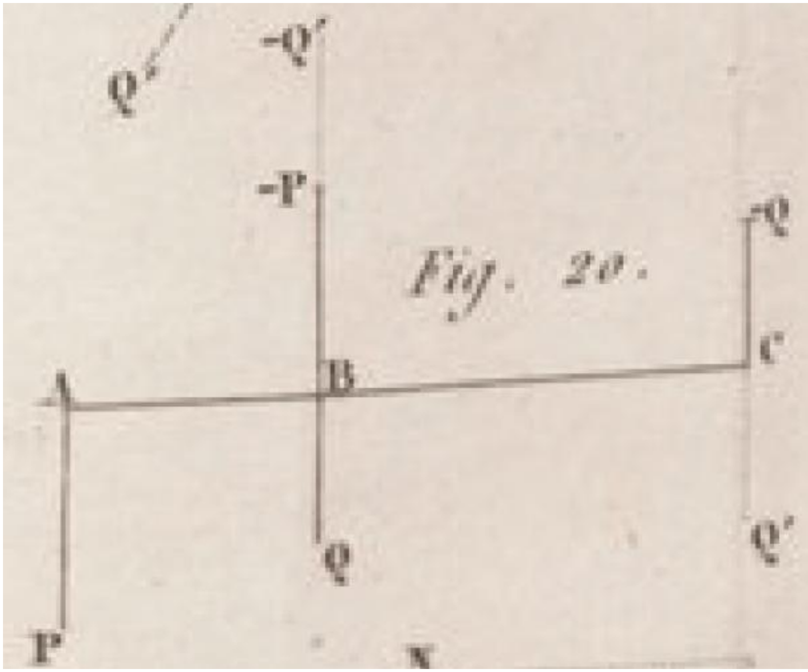
Перенесение пары сил



<u>Лемма</u>

Всякая пара (P, –P), приложенная к плечу AB, может быть превращена в другую пару (Q, –Q), действующую в ту же сторону и приложенную к плечу BC, при условии: P : Q = BC : AB или P x AB = Q x BC (моменты пар равны).

Перенесение пары сил



<u>Доказательство</u>

К плечу BC приложим две равные пары (Q, –Q) и (Q',–Q'). По условию, силы P, Q, а, значит, и силы P, Q' обратно пропорциональны AB и BC. Поэтому равнодействующая P+Q' пройдет через точку B и уничтожит в ней противные силы –P и –Q'. В итоге остается пара (Q, –Q), приложенная к BC; она и заменит заданную пару (P, –P), приложенную к AB.

Итак: не меняя «усилия» пары, ее можно заменить другой, имеющей то же направление вращения, при условии сохранения неизменной величины момента пары, т.е. изменяя модуль сил обратно пропорционально плечу пары.

Резюме. Основные результаты

- Пара сил определяется тремя элементами:

  – плоскостью, в которой она расположена

  – величиной момента пары (она равна площади параллелограмма, построенного на двух силах пары, как на двух противоположных сторонах параллелограмма)

  – направлением вращения.

- Правило «сложения сил, направленных в пространстве произвольно»:

  произвольная система сил, приложенных к твердому телу, может быть приведена к одной результирующей силе и к одной паре сил.

Глава II «Условия равновесия». Приложение теории пар сил к статике

Свободное твердое тело находится в равновесии, когда результирующая сила и результирующая пара равны нулю.

Шесть уравнений равновесия твердого тела под действием системы сил.

X_i, Y_i, Z_i – проекции сил на декартовы оси

x_i, y_i, z_i – координаты точек приложения сил.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0; \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0; \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

Для равновесия свободного твердого тела необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на прямоугольные оси координат равнялись нулю и чтобы суммы моментов всех сил относительно каждой из осей координат также равнялись нулю.

Условия равновесия несвободного твердого тела

I. О равновесии тела, которое может вращаться во все стороны около неподвижной точки

II. О равновесии тела, вращающегося около линии, концы которой представляют две неподвижный точки

III. Равновесие тела, которое опирается на неподвижную плоскость.

Глава IV. «О машинах»

«Тела, составляющие машины, не есть совершенно свободные, но заключают в себе препятствия, которые сопротивляются движению, сообщаемому силами, и которое действительно сообщили бы им, если бы тела были свободны».

«Мы доходим до следующего общего определения машин:

машины есть ни что иное как тела или системы тел, заключающие в себе некоторые препятствия, представляющие сопротивление движению».

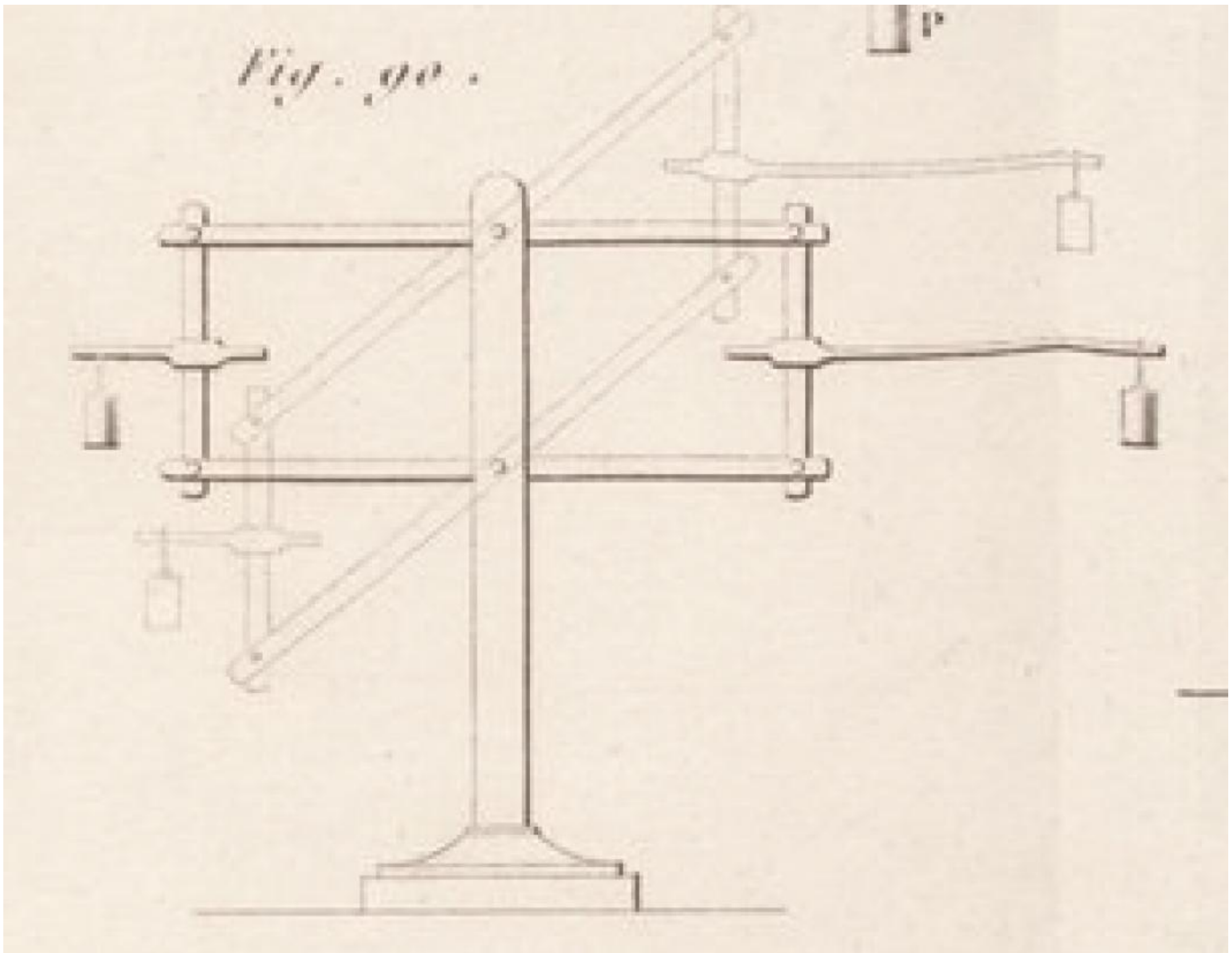
Классификация машин, в зависимости от типа «препятствия»

- Рычаг – одна точка опоры
- Ворот – наличие неподвижной опорной прямой
- Наклонная плоскость – наличие неподвижной опорной плоскости.

Эта классификация тесно связана с рассматриваемыми во второй главе случаями равновесия несвободного тела

4. Объяснение парадокса весов Ж.П. Роберваля

Парадокс весов Роберваля.
«Весы остаются в равновесии независимо от величин горизонтальных стержней, к которым подвешены равные грузы»
Рисунок из трактата Л. Пуансо «Начала статики», 1803)



К точке K приложим силы P и –P. Равновесие не нарушится.

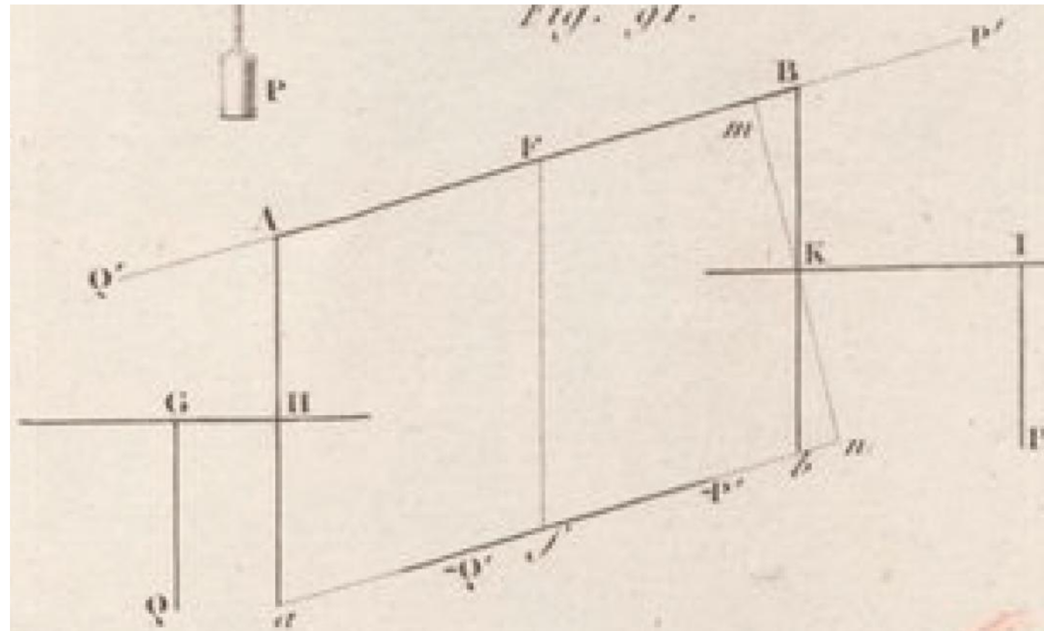
Покажем, что действие пары сил (P, – P) на плечо KI уничтожается реакциями опор в точках F и *f*.

Для этого преобразуем пару (P, – P) в пару (P', – P'), приложенную к плечу *mn* $\parallel$ FB (NB: линию *mn* следовало провести не через K, а через середину отрезка KI).

Очевидно, что действия сил P‘ и – P’ вдоль линий FB и *fb* уничтожаются реакциями опор в точках F и *f*.

Следовательно, сила P может быть перенесена в точку K.

Аналогично доказывается, что сила Q может быть перенесена в точку H.



Л. Пуансо «Новая теория вращения тел» (1834).
Содержит наиболее значимые результаты, полученные Пуансо в динамике

В трактате, помимо механико-математических результатов, мы находим яркую формулировку научного кредо Пуансо.

Перечислив основные результаты, полученные в задаче о вращении тела вокруг неподвижной точки Даламбером, Эйлером и Лагранжем, Пуансо пишет:

«Надо согласиться с тем, что во всех этих решениях мы видим только вычисления без какой-либо *ясной картины* вращения тела.

Конечно, эти вычисления, более или менее длинные и сложные, позволяют определить, где окажется тело к заданному времени, но мы вовсе *не видим*, как оно туда попало, мы его полностью *теряем из виду*, тогда как хотелось бы *наблюдать его и следить за ним, так сказать, взглядом* в течение всего вращения.

И я старался открыть именно это *отчетливое представление* вращательного движения, чтобы сделать доступным обозрению то, что пока еще никем не было *изображено*» (курсив мой – *Е.З.*).

Цит. по И.Б. Погребысский, «От Лагранжа к Эйнштейну» М., 1966, с. 137.

Эффект Джанибекова

Сложное аналитическое доказательство и простое геометрическое объяснение

Видео по ссылке

https://yandex.ru/video/preview/4862884257276413118