История математики
16 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2024 года

Рождение аналитической геометрии. Предыстория

Одним из величайших достижений математической мысли XVII в. стало создание аналитической геометрии. К этому времени получили серьёзное развитие методы алгебраической трактовки вопросов геометрии. Сложились традиции использования координатных методов в географии, астрономии, наконец, в теории конических сечений Аполлония.

В античной географии положение пунктов земной поверхности, изображённой в виде прямоугольника, характеризовалось парой чисел – широтой (πλάτος – «ширина») и долготой (μήχος – длина). Сходным образом вводились астрономические координаты, определявшие положение светил на небесной сфере.

Другой вид координат представляли собой отрезки, зависимости между которыми – «симптомы» – выражали определяющие свойства этих кривых. У Аполлония параллельные хорды или полухорды, сопряжённые некоторому диаметру, названы «по порядку проведёнными линиями», а отрезки этого диаметра от его конца до хорды – «отсечёнными на диаметре по порядку проведёнными» линиями. В латинском переводе «Конических сечений» Ф. Коммандино (Венеция, 1566) это выражено так – ordinatim applicatae – т.е. «по порядку приложенные» (то есть направленные), в первом случае, и – quae abipsis ex diametro ad verticem abscindutur – т.е. «которые отсекаются ими на диаметре от вершины». Отсюда берут начало наши термины abscissa, то есть «отсечённая», и ordinata. Термин «ось» у Аполлония относится к взаимно перпендикулярным диаметрам.

К разработке начал аналитической геометрии приступили практически одновременно и независимо друг от друга два великих математика – Пьер Ферма и Рене Декарт.

Пьер Ферма

Родился в 1601 г. в семье богатого торговца кожей на юге Франции в гасконском городке Бомон-де-Ломань. Юридическое образование получил в Тулузе, Бордо и Орлеане. Был прекрасным знатоком древних и современных ему языков. Писал стихи на французском,испанском и латыни. Был превосходным знатоком древнегреческого. Блестящие способности в юриспруденции позволили ему сделать успешную карьеру – он стал советником парламента (т.е. высшего суда) в Тулузе. Математика была его главной страстью и ей он отдавал всё свободное время. Изучение в подлинниках сочинений Евклида, Архимеда, Аполлония, Паппа и Диофанта послужили основанием для его собственных исследований в области теории чисел, геометрии, инфинитезимальных методов. Был одним из создателей теории вероятностей. Занимался оптикой (принцип минимума Ферма). Свои работы не публиковал: при его жизни они распространялись в рукописях. Лишь после его смерти в 1670 г. его сын Самюэль выпустил новое издание «Арифметики» Диофанта с комментариями Баше де Мезириака и замечаниями Ферма (Великая теорема Ферма и др.), а также собрал и в 1679 г. издал сохранившиеся от отца математические наброски и небольшие трактаты.

Умер Ферма в 1665 г.

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX,

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

VARIA OPERA MATHEMATICA

D. PETRI DE FERMAT,

SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.

TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Изложение предложенного Ферма варианта аналитической геометрии (такое название для новой геометрии – «аналитическая геометрия» – за-крепилось лишь к концу XVIII века с лёгкой руки С.Ф. Лакруа) появилось в небольшой работе Ферма «Введение в изучение плоских и телесных мест», написанном ранее 1637 г. и распространявшегося в рукописном виде главным образом через Мерсенна.

Работа написана в обозначениях Виета с соблюдением однородности уравнений.

В этом труде Ферма начал разрабатывать аналитическую геометрию путём установления взаимно однозначного соответствия между алгебраическими уравнениями с двумя переменными и их графиками на плоскости, на которой введена система, вообще говоря, косоугольных координат.

Как пишет автор, «всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место, и конец одной из них описывает прямую или же кривую линию … Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым) и задать положение и конец одной из величин». Под неизвестными величинами (координатами) Ферма понимает прямолинейные отрезки; первую из них он всякий раз обозначает *NZ* и алгебраически буквой *A*, а вторую соответственно *ZI* и *E*. Затем рассматриваются различные плоские и телесные места.

Уравнение прямой, проходящей через начальную точку, Ферма выводит в форме

$$D \text{ на } A \text{ равно } B \text{ на } E, \quad \text{то есть } dx = by.$$

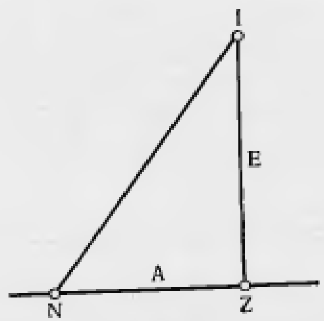


Рис. 7

У Ферма приводится лишь часть прямой *NI* , так как он пользуется положительными координатами.

Во «Введении …» рассмотрены общее линейное уравнение, общее уравнение окружности в прямоугольной системе и некоторые основные формы уравнений конических сечений. Принципиальный шаг вперёд по сравнению с античной трактовкой проблемы заключается в переходе от словесно формулируемых «симптомов» и рассуждений, опирающихся на крайне ограниченные средства геометрической алгебры, к уравнениям и мощному аппарату новой буквенной алгебры. Свой труд Ферма заключил следующими словами: «Таким образом мы коротко и ясно изложили всё, что оставили невыясненным древние относительно плоских и телесных мест».

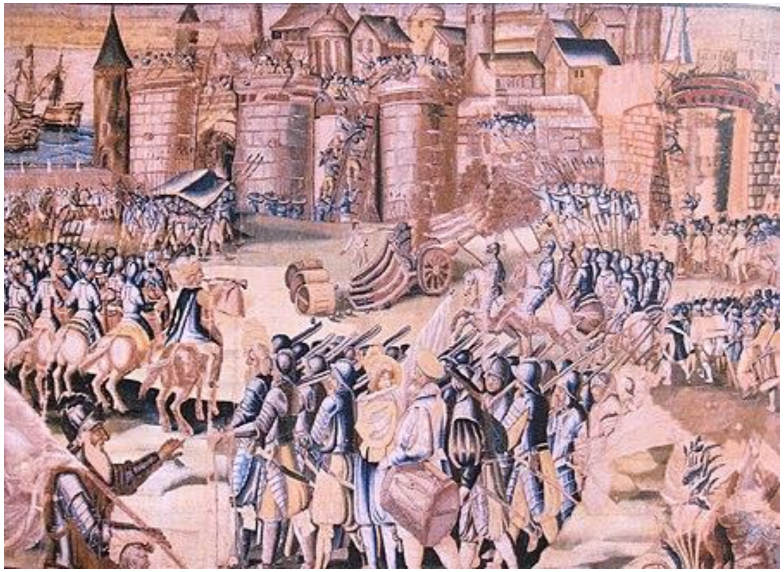
На самом деле был сделан лишь первый шаг к созданию нового типа геометрии – аналитической геометрии. Её создание стало одним из направлений развития математики XVIII – XIX вв.

Одновременно с Ферма и независимо от него первые шаги в строительстве аналитической геометрии были сделаны Декартом. «Введение …» Ферма долгое время оставалось в рукописи и не нашло того широкого распространения, какое получила «Геометрия» Декарта, изданная в 1637 г.

Рене Декарт - *René Descartes*

Рене Декарт родился в 1596 году в дворянской семье в городе ла Э (ныне ла Э – Декарт) департамента Эндр-э-Луар) и получил хорошее образование в иезуитском коллеже в городе Ла-Флеш. Желая вырастить из сына профессионального военного, отец в 1613 году послал его в Париж. Однако, природные склонности влекли его к философии и математическим наукам. В Париже он сблизился с учеником Ф. Виета Клодом Мидоржем и священником Мареном Мерсенном (1588 – 1648). Два с лишним года он посвятил научным занятиям и только в 1617 поступил волонтёром к голландскому правителю и полководцу Морицу Оранскому. Ряд лет он провёл в походах и сражениях начавшейся в 1618 году 30-летней войны. Ему пришлось объездить Германию, Венгрию, Чехию. 1623 – 25 гг. он провёл в Италии, затем три года во Франции, где участвовал в знаменитой осаде Ла-Рошели, павшей в 1628 году. Всё своё свободное время он отдавал науке. В 1618 году он познакомился с известным голландским учёным Исааком Бекманом (1588 – 1637), с которым обсуждал проблемы математики и физики. Он активно изучал работы немецких алгебраистов – коссистов. С одним из них И. Фаульгабером даже свёл знакомство. В середине 20-ых гг. в Париже встречался с Ф. Дебоном, Ж. Дезаргом и, вероятно, с Ж. Робервалем

Осада ла Рошели 1627 – 1628



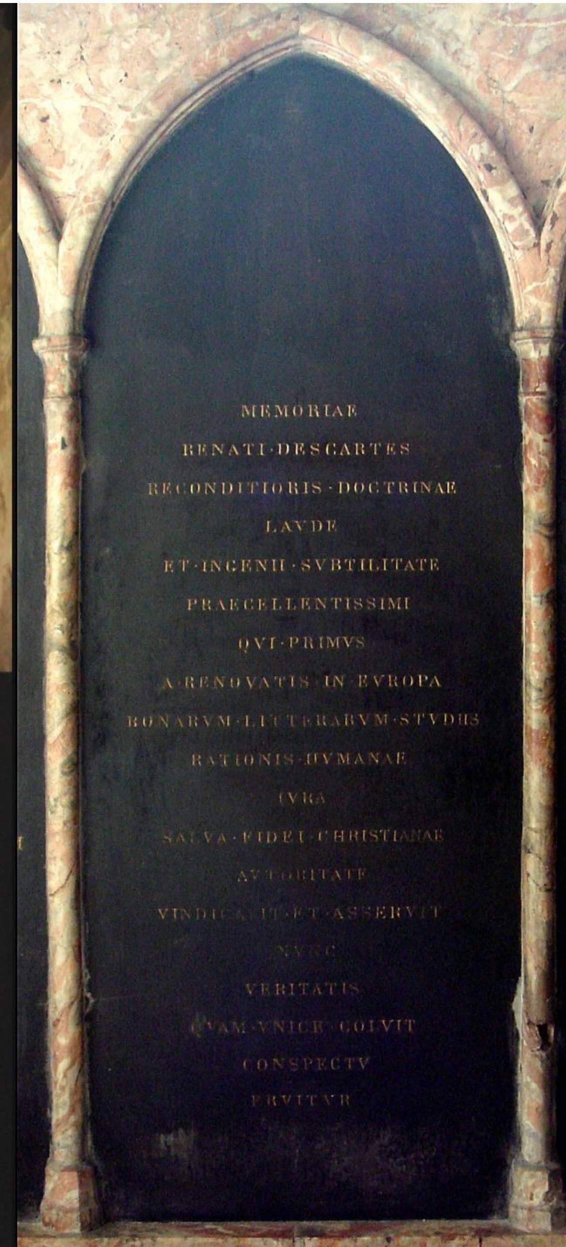
Вскоре после осады Ла-Рошели в жизни Декарта произошёл перелом. Система его воззрений к тому времени уже сложилась и он начал искать уединения, чтобы безо всяких помех завершить намеченные им обширные творческие планы. Он говорил, что «хорошо прожил тот, кто хорошо укрылся» («bene qui latuit, bene vixit»). Он резко сократил своё личное общение с учёными, в том числе с друзьями; впрочем, до конца жизни поддерживал активную научную переписку, которую вёл через своего друга – Мерсенна. В 1629 году он, опасаясь из-за своих философских взглядов преследования католической церкви, переселился в Голландию, где жил в одиночестве. Здесь он прожил почти 20 лет и издал свои главные труды. Но и здесь оказался в конфронтации с местными протестантскими идеологами.

Чтобы «хорошо укрыться», он принял приглашение королевы Швеции Христины и в 1649 году переехал в Стокгольм, где суровый климат быстро свёл его в могилу. Он умер в 1650. Через 17 лет его останки были перевезены в Париж и захоронены в часовне аббатства Сен-Жермен-де-Пре.

Диспут Декарта и королевы Кристины (худ. P.-L. Dumesnil)

Церковь Сен-Жермен де Пре

Гробница Декарта (справа — эпитафия), в церкви Сен-Жермен де Пре



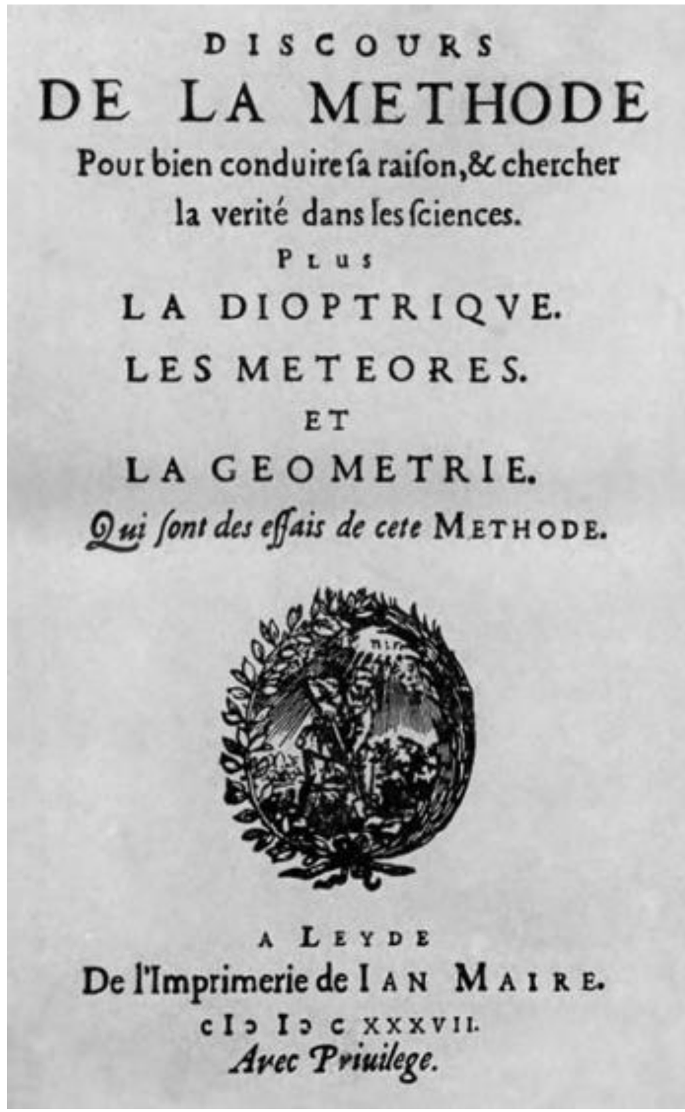
Декарт, как и другие великие мыслители XVII века, искал общий метод мышления, который способствовал бы искусству изобретения и отысканию истины в науке. Так как основной наукой о природе, которая в ту пору переживала период бурного развития, была механика, а аппаратом её построения виделась математика, то именно последняя и стала для Декарта наиболее важным средством для понимания вселенной. Построение всеобщей математики (Mathesis universalis) стало для него одной из главных задач. То, что он понимал под «всеобщей математикой» ближе всего оказалось к алгебре. Все задачи математических наук, полагал Декарт, могут быть выражены с помощью уравнений той или иной степени. Единственный общий метод решения уравнений заключается в построении их корней, как отрезков – координат точек пересечения некоторых плоских кривых. Эти линии сами выражаются алгебраическими уравнениями в «неопределённых количествах» x, y; надлежащая классификация позволяет всегда выбрать кривые, подходящие к данной задаче. Буквенное исчисление отрезков сливалось в органическое целое с геометрией линий, и только их синтез давал универсальный метод решения проблем в области непрерывных величин.

Исторически из всеобщей математики Декарта выросла новая алгебра и аналитическая геометрия.

«Геометрия» Декарта увидела в свет в 1637 г. в качестве третьего приложения (два других приложения посвящены оптике и вопросам физики Земли и земной атмосферы) к его фундаментальному философскому сочинению «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках. Вместе с Диоптрикой, Метеорами и Геометрией, которые суть примеры этого метода».

Как следует из самого названия, предлагаемое изложение геометрии, оптики и вопросов физики должно было служить примерами применения метода Декарта для развития конкретных дисциплин.

«Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках. Вместе с Диоптрикой, Метеорами и Геометрией, которые суть примеры этого метода»



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

Изложение аналитической геометрии у Декарта во многом отличается от изложения Ферма. В одном оно ему уступает – оно разбросано по всем трём книгам и не носит систематического характера. Однако, во всех других отношениях оно безусловно выигрывает: Декарт использует более развитую символику, оно значительно доступнее и богаче примерами, содержит несколько общих идей и предложений чрезвычайно существенных для дальнейшего развития дисциплины.

С самого начала Декарт задаётся вопросом – какие линии составляют предмет геометрии? Геометрические линии по Декарту – это те, «которые описаны непрерывным движением или же несколькими такими последовательными движениями, из которых последующие вполне определяются им предшествующими, – ибо этим путём всегда можно точно узнать их меру». Напротив, из геометрии, т.е. собственно всеобщей математики, исключаются механические линии, описываемые «двумя отдельными движениями, между которыми не существует никакого отношения, которое можно было бы измерить». Примеры механических линий – спираль и квадратриса. Примером геометрических линий служат кривые, описываемые шарнирным механизмом с любым (конечным !) числом звеньев.

Здесь Декарт предвосхищает результат английского учёного А. Кемпе (1876), согласно которому посредством плоских шарнирных механизмов можно описывать дуги любых алгебраических кривых и нельзя описать ни одной трансцендентной. «Все точки линий, – пишет он, – которые можно назвать геометрическими, т.е. которые подходят под какую-либо точную и определённую меру, обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением, одним и тем же для всех точек данной линии». В этом поистине замечательном месте своего сочинения Декарт вводит и метод прямолинейных координат и понятие об уравнении кривой, а вместе с тем понятие о функции как аналитическом выражении, составленном из «неопределённых» отрезков x и y.

В 1684 Лейбниц назвал геометрические кривые Декарта алгебраическими, а механические трансцендентными, мотивируя отказ от терминологии Декарта тем, что и механические линии не подлежат исключению из геометрии.

Декарт даёт первую общую классификацию алгебраических кривых в зависимости от степени их уравнений, относя к роду n кривые с уравнением степени $2n-1$ и $2n$. Предложенное Декартом разделение кривых по родам, себя не оправдавшее, мотивировалось тем, что, по его мнению, кривые степени 2n вообще говоря не сложнее, чем с уравнением степени $2n - 1$. Все трудности, связанные с четвёртой степенью, писал он, приводятся к третьей, а трудности, связанные с шестой степенью, – к пятой и т.д. Общепринятой классификацией плоских кривых по порядкам мы обязаны Ньютону.

Но классификация кривых в прямолинейных координатах по родам или порядкам имеет смысл, если род или порядок кривой не зависит от выбора координатной системы. Это было Декарту ясно, и он, правда мимоходом, но вполне отчётливо, сформулировал предложение об инвариантности рода кривой при замене одной системы прямолинейных координат другой: «Действительно, хотя для получения более короткого и удобного уравнения и нужен весьма тщательный выбор, но всё же, какими бы прямую и точку ни взяли, всегда можно сделать так, чтобы линия оказалась того же самого рода: это легко доказать».

Отрицательные абсциссы Декартом не рассматривались, что иногда приводило к неточным или неполным чертежам. Применение обеих осей координат стало обычным делом уже в XVIII веке.

Принято считать, что главная заслуга декартовой «Геометрии» – создание аналитической геометрии. Действительно, в развитии этой ветви математики это сочинение сыграло основополагающую роль, однако, её нельзя рассматривать как первый трактат по этому предмету. Там нет «декартовых осей», вывода уравнения прямой линии и конических сечений. Правда, одно уравнение второго порядка истолковывается как определяющее коническое сечение. Более того, значительная часть книги посвящена вопросам теории алгебраических уравнений. Однако, именно декартова «Геометрия» стала образцом последовательного применения хорошо развитой алгебры XVII века к геометрическому анализу древних и таким образом расширила область её применимости. Именно Декарт окончательно отбросил ограничение однородности (которого ещё продолжал придерживаться Ферма!) – рудимента «видовой логистики» Виета. Отныне x^2, x^3, xy рассматриваются как отрезки (!). Обозначения Декарта уже мало отличаются от современных. В его книге мы уже находим выражения вида

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}\,,$$

мало отличающееся от нам привычных.

Его «Геометрия» (особенно её латинское издание, подготовленное другом и учеником профессором Лейденской инженерной школы Францем ван Схоотеном (1-е издание – 1649, 4-е издание уже под редакцией Я. Бернулли – 1695) стала настольной книгой европейских математиков XVII столетия. Эта книга обозначила начало построения математического пространства, в котором отныне будет осмысливаться физико-математическая картина мира.

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве становится активно развивающейся ветвью математических исследований, которая на протяжении XVIII столетия трансформируется в одну из частей обязательного высшего математического образования. Мы не будем далее касаться этого процесса, отмеченного именами ряда славных математиков. Из многочисленных руководств по этой дисциплине обратим внимание на «Аналитический трактат о конических сечениях и об их применении для решения уравнений как в определённых, так и в неопределённых задачах» маркиза Г.Ф. Лопиталя, увидевший свет в Париже в 1707 году, и на второй том «Введения в анализ бесконечных» Леонарда Эйлера, опубликованный в 1748 году в Лозанне. Изложение Эйлера стало отправной точкой формирования современного курса аналитической геометрии – предмета образования студента XX столетия.

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS SECUNDUS

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

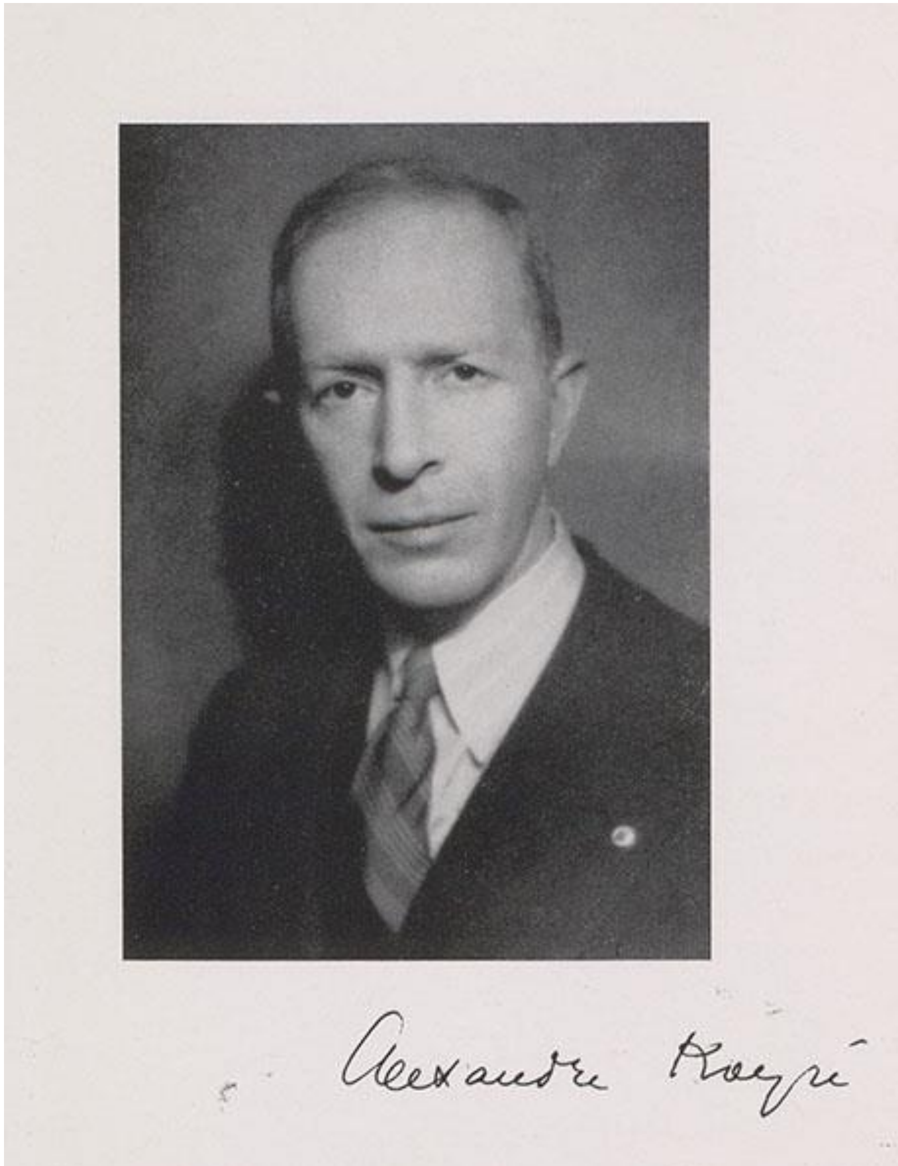

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР
ВВЕДЕНИЕ
В АНАЛИЗ
БЕСКОНЕЧНЫХ
I
ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР
ВВЕДЕНИЕ
В АНАЛИЗ
БЕСКОНЕЧНЫХ
II

Предыстория создания математического анализа

С интеграционными по своему существу задачами (на спрямление кривых линий, квадратуру площадей плоских и кривых поверхностей, кубатуру объёмов тел, определение центров тяжести), а также с проблемами, которые естественно числить по ведомству дифференциального исчисления (проведение касательных к кривым линиям, нахождение максимумов и минимумов) сталкивались уже в древности. Старейшими из них были спрямление окружности и квадратура круга. Метод исчерпывания, эта античная форма метода пределов, связанный с именем Евдокса, нашёл блестящее развитие у Архимеда, который в своих квадратурах и кубатурах уже пользовался верхними и нижними интегральными суммами. Тот же Архимед решал и задачи дифференциального исчисления – на проведение касательных к кривым линиям и нахождение максимумов и минимумов.

Методы Архимеда получили некоторое развитие в странах ислама и в XII – XIII вв. получили известность в средневековой Европе. Европейские математики положили их изучение и развитие в центр своих научных занятий. Совокупность полученных ими результатов – достижений Кавальери и Торричелли, Декарта и Ферма, Роберваля и Паскаля, Валлиса и Барроу, Броункера и Меркатора – подошла вплотную к главному открытию XVII в. – к дифференциальному и интегральному исчислению.

Александр Койре – Alexandre Koyré
1892 – 1964



1892 – родился в Таганроге в еврейской купеческой семье
Среднее образование Александр Койре получил в гимназиях Тифлиса и Ростова-на-Дону

1909 – переехал в Гёттинген, где в течение трёх лет слушал курс по философии Гуссерля и лекции Гильберта по математике. Для завершения образования переехал в Париж, где его застала 1-я мировая война

1914 – волонтёром вступил в ряды Иностранного легиона, потом перешёл в русский полк и вплоть до осени 1917 г. сражался на юго-западном фронте России

1918 – возвращение в Париж, где у него сложились прочные связи в академической среде.

1924 – начинает читать курс в Практической школе высших исследований

1929 – докторская диссертация посвящена исследованию творчества немецкого философа-мистика Бёме

1934 – 1940 несколько раз посещает Каирский университет в качестве приглашённого профессора

1940 – ненадолго возвращается в Париж, после чего почти сразу выезжает в Каир, где во время визита де Голля получает важную дипломатическую миссию и выезжает в США

1942 – после успешного выполнения миссии приезжает в Лондон для встречи с де Голлем

1940 – 1945 – работал в США в Свободной школе высших исследований, организованной эмигрантами из Франции и Бельгии, а также в американской Новой школе социальных исследований

1945 – возобновил работу в парижской Практической школе высших исследований, а затем возглавил Центр исследований по истории науки и техники (сегодня – Центр Александра Койре)

1956 – одновременно получил назначение в Институт высших исследований в Принстоне (США) и с тех пор поочерёдно проводил по шесть месяцев в Париже и в Принстоне

– избран непременным секретарём Международной Академии истории науки

1964 – скончался в Париже

Койре А. *Очерки истории философской мысли: О влиянии философских концепций на развитие научных теорий* / пер. с фр. Я. А. Ляткера, общ. ред., авт. предисл. А. П. Юшкевич. М. : Прогресс. 1985.

Койре А. *Мистики, спиритуалисты, алхимики Германии XVI века*. — Долгопрудный: Аллегро-Пресс, 1994.

Койре А. *От замкнутого мира к бесконечной вселенной*. — М.: Логос, 2001.

Койре А. *Философия и национальная проблема в России начала XIX века* / пер. с фр. А.М. Руткевича. М.: Модест Колеров, 2003.

Койре А. *Этюды о Галилее* / пер. с фр. Н. Кочинян. — М.: Новое литературное обозрение. 2022.