

Лекция 15

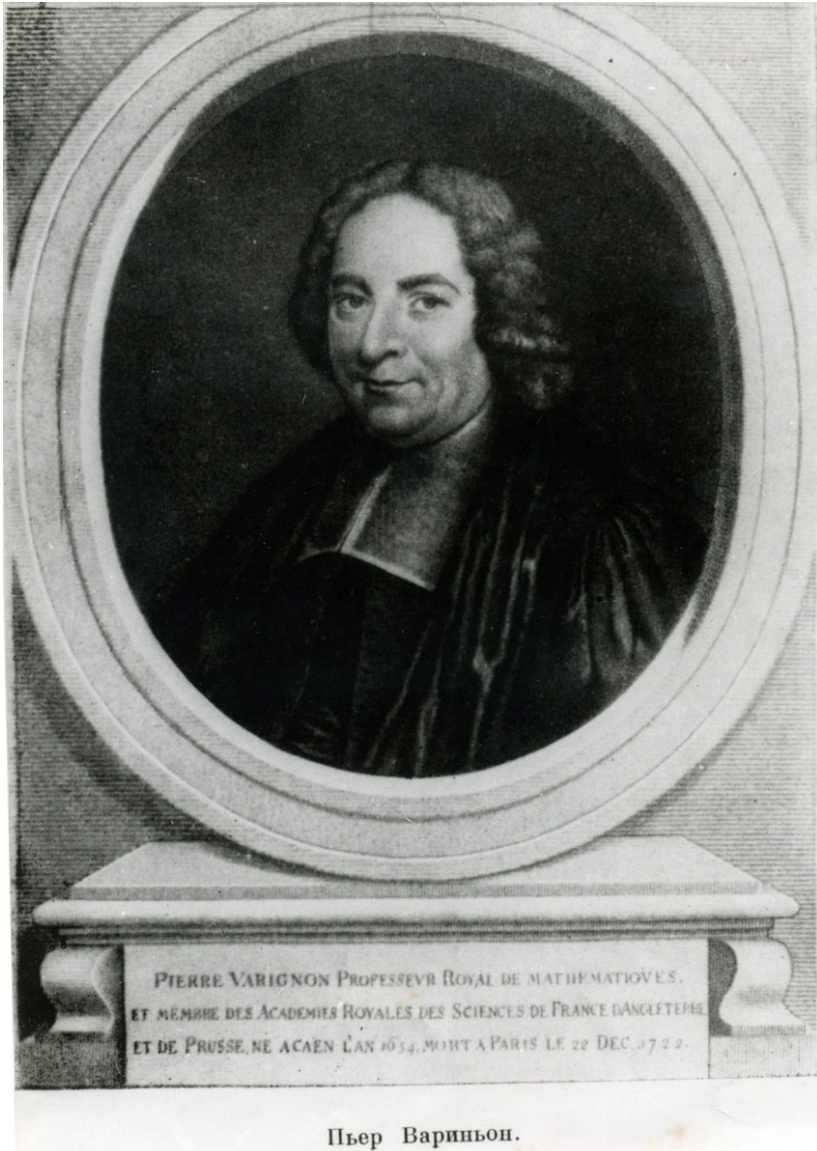
Чиненова Вера Николаевна

v.chinenova@yandex.ru

План лекции:

- **Трактат П. Вариньона "Новая механика..."** - обобщение достижений статики до XVII в. включительно.
- Аксиомы и принципы статики Вариньона.
- Доказательство Леммы XVI.
- Доказательство необходимого и достаточного условия равновесия твердого тела под действием 3-х непараллельных сил на плоскости.
- Элементы графостатики.
- Принцип возможных перемещений.

Пьер Вариньона *Pierre Varignon* (1654 - 1722)



В [1687 году](#) в своей работе «Проект новой механики...» Вариньон дал точную формулировку закона [параллелограмма сил](#), развил понятие момента сил и вывел [теорему](#), получившую имя Вариньона.

В работе «Новая механика или статика, проект которой был дан в 1687» ([1725](#)) Вариньон дал систематическое изложение учения о сложении и разложении сил, о моментах сил и о правилах оперирования ими.

Пьер Вариньон (1654-1722)

Пьер Вариньон родился в Кане (Нормандия) в **1654** году.

Получил образование в местном иезуитском университете.

1682 г. получил степень магистра.

1683 г. рукоположен в священнический сан

1688 г. становится профессором математики в Коллеж Мазарини в Париже

1688 г. избрание в Парижскую Академию наук

1713 г. избрание в Берлинскую академию наук

1718 г. избрание в Британское Королевское общество

Умер Вариньон в Париже в 1722 году.

Вариньон внес существенный вклад в развитие статики. Заслуживают внимания также его работы, посвященные применению дифференциального исчисления к движению точки (задача Галилея), гидродинамике и работе водяных часов.

Геометрическая статика Вариньона

«Новая механика или статика, проект которой был опубликован в **1687** году - посмертное издание трудов г-на Вариньона, члена Королевских Академий Наук Франции, Англии и Пруссии, лектора философии Его Величества в Королевском колледже и профессора математики в Колледже Мазарини». Париж.
MDCCXXV

NOUVELLE
MECANIQUE
OU
STATIQUE;
DONT LE PROJET FUT DONNE
EN M. DC. LXXXVII.

*Ouvrage posthume de M. VARIGNON, des Académies
Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse,
Lecteur du Roy en Philosophie au Collège Royal, & Pro-
fesseur des Mathématiques au Collège Mazarin.*

TOME PREMIER.



A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, rue S. Jacques, au coin de la rue
des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.
Avec Approbation & Privilège du Roy.

П.Вариньон «Новая механика или статика...»

Большая часть двухтомного сочинения Вариньона посвящена систематическому изложению геометрической статики, основанной на едином принципе сложения и разложения сил.

В истории статики этот принцип занимает промежуточное положение между античными попытками сведения простых машин к одной из них (обычно рычагу) и современными подходами, основанными на понятии работы силы на виртуальных перемещениях.

Первый том «Новой механики» начинается с основных определений, обозначений и аксиом. Обсуждение ведется в терминах машин и механизмов.

Геометрическая статика Вариньона

- **Машина или механизм** - приспособление для передвижения грузов и тел.
Сила, это то, что приводит в движение машину или все то, что способно сдвинуть тело при помощи машины или без нее.
Сила, которая стремится двигать тело сверху вниз по прямой линии, направленной к центру Земли называется **тяжестью или весом**.

Геометрическая статика Вариньона

- Аксиомы I и II:

Твердое тело под действием двух сил, приложенных в точке, будет пребывать в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и противоположны по направлению

Геометрическая статика Вариньона

- Аксиома III (5): - правило сложения двух коллинеарных сил.

«Когда на тело действуют две равные противоположно направленные силы, оно должно быть неподвижно, т.е. в состоянии покоя, [они] взаимно уничтожаются, или в равной степени мешают друг другу, полностью удерживая одна другую».

(имеется в виду, что эти силы уравнивают друг друга).

- То же справедливо, если одна из сил является «сопротивлением» - Это - элементарная форма принципа освобожденности от связей.

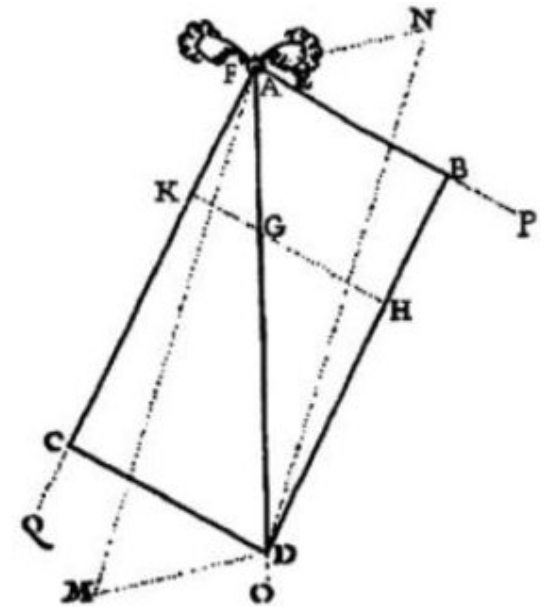
Геометрическая статика Вариньона

- **Основной принцип:**
- **Каково бы ни было число сил, направленных произвольным образом, которые действуют одновременно на одно и то же тело (*Вариньон имеет в виду - в одной точке*), это тело либо совсем не будет двигаться, либо будет двигаться по единственному пути вдоль линии, которая будет такой же, как если бы на тело действовала лишь одна сила в том направлении, называемая результирующей всех этих сил.**
- (говоря о результирующей, эквивалентной заданной системе сил, Вариньон указывает лишь на возможность замены нескольких сходящихся сил одной, ничего не утверждая о величине этой силы).
- Ответ на вопрос о величине и направлении результирующей силы Вариньон дает в леммах I и II, в которых сформулировано правило сложения двух сходящихся сил.
- Это правило является одним из важнейших в современной механике и носит название «правила параллелограмма сил».

Геометрическая статика Вариньона

- Леммы I и II, заключают в себе **принцип геометрического сложения и разложения сходящихся сил по правилу параллелограмма.**
- *(здесь речь идет о сложении двух элементарных перемещений, которые получило бы тело под влиянием каждой силы в отдельности, т.е. дано геометрическое правило сложения скоростей, а не сил).*

- **Следствия I-VII из лемм I и II** устанавливают ряд свойств, основанных на **правиле параллелограмма**.
- В частности, в следствии V показано, что если рассмотреть произвольный параллелограмм $ANDM$, диагональ которого совпадает с диагональю параллелограмма $ABDC$, то для движения под действием сил, направленных по сторонам параллелограмма $ANDM$, утверждения лемм I и II будут верны .
- Для механики XVII в. правило параллелограмма было отнюдь не очевидным. Некоторые ученые критиковали его использование, считая, что оно приводит к противоречию.



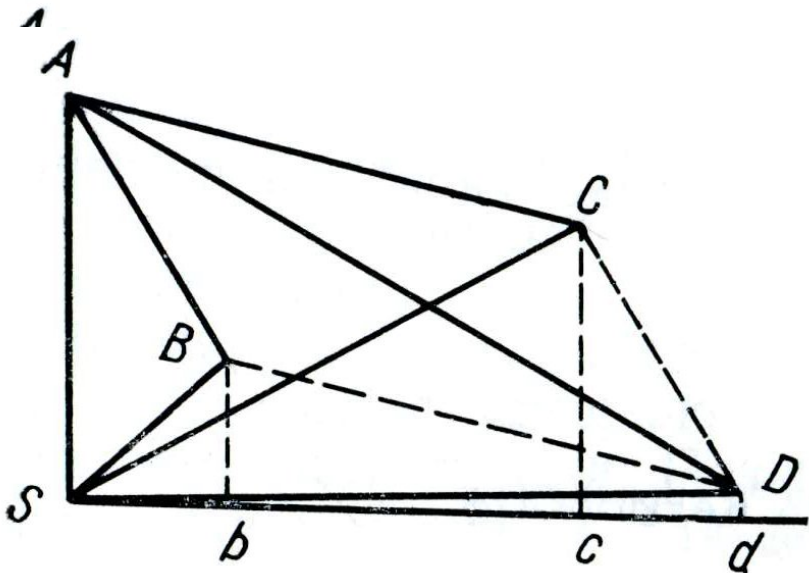
Геометрическая статика Вариньона

- В Следствии VI дается геометрическое построение результирующей многих сходящихся сил, строя замыкающую сторону их **силового многоугольника**.
- Вариньон доказывает возможность **переноса отрезка, изображающего силу, в твердом теле по линии ее действия без изменения состояния равновесия тела**.

Геометрическая статика Вариньона

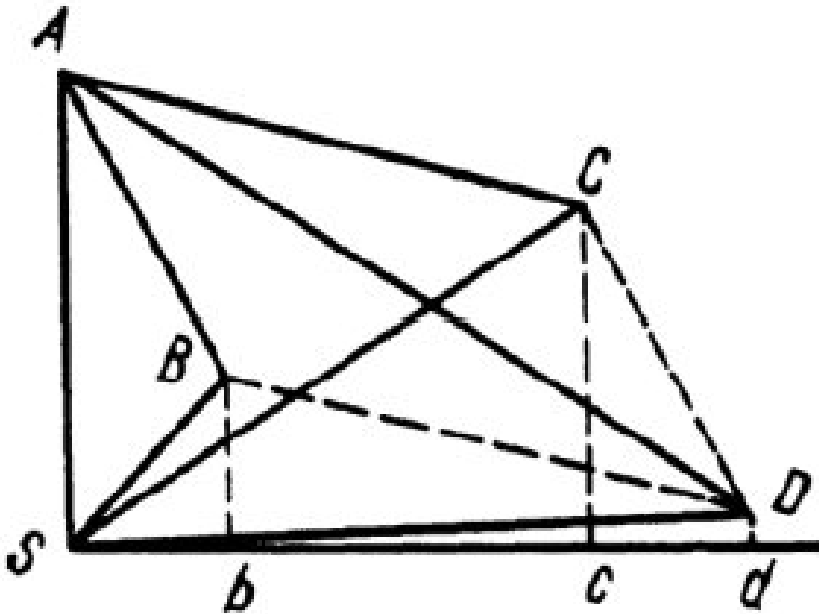
- **Лемма XVI (теорема Вариньона)**
Если из какой-либо точки, лежащей в плоскости параллелограмма, опустить перпендикуляры на диагональ и на обе стороны, заключающие эту диагональ, то произведение диагонали на ее перпендикуляр равно сумме произведений обеих сторон на соответствующие им перпендикуляры, если точка лежит вне угла, образованного этими сторонами, и равно разности этих произведений, если она лежит внутри этого угла, (когда точка S находится на диагонали; в этом случае величины площадей треугольников, построенных на сторонах, равны)

Лемма XVI (теорема Вариньона)



- Рассмотрим параллелограмм ABDC. Возьмем на плоскости, в которой лежит параллелограмм, произвольную точку S и построим три треугольника с вершинами в этой точке: два на двух смежных сторонах параллелограмма ABDC и третий на его диагонали AD.
- 1. Если точка S лежит вне угла BAC, то площадь треугольника SAD, построенного на диагонали AD, равна сумме площадей треугольников, построенных на сторонах AB и AC. То есть, $SAD = SAB + SAC$.
- Доказательство опирается на то, что высоты трех треугольников, имеющих общее основание AS, связаны этим соотношением (с учетом $Sb = cd$).

Лемма XVI (теорема Вариньона)

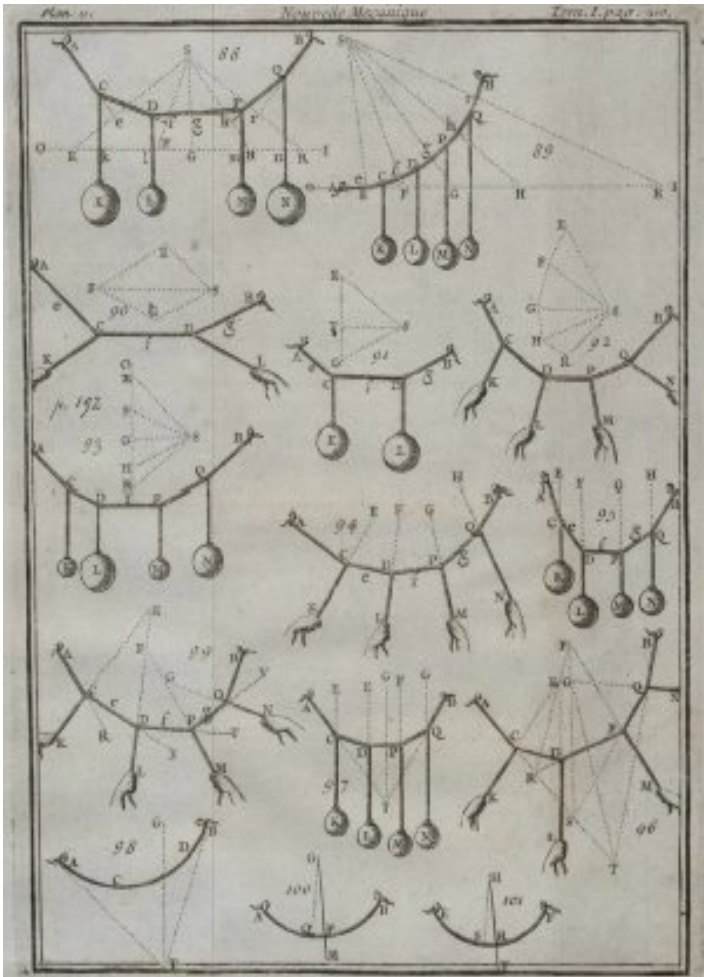


- 2. Если точка S лежит внутри угла BAC , то площадь треугольника SAD равна разности площадей треугольников, построенных на сторонах AB и AC .
- 3. Если точка S лежит на диагонали параллелограмма или ее продолжении, то площади треугольников, построенных на сторонах AB и AC с вершиной в точке S , равны между собой. То есть, $SAB = SAC$.

Геометрическая статика Вариньона

- **Момент равнодействующей двух сходящихся сил относительно некоторой точки плоскости сил равен алгебраической сумме моментов составляющих относительно той же точки**

Графостатика Вариньона

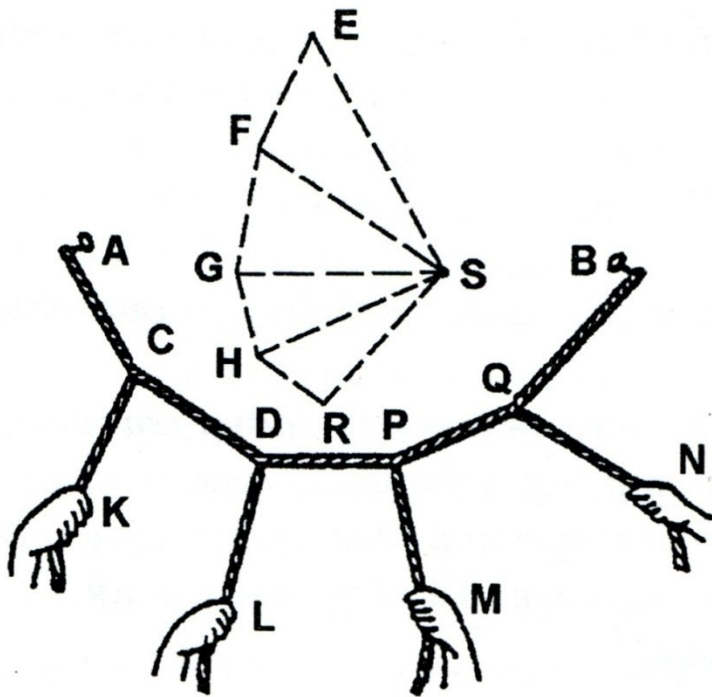


В трактате Вариньона заложены основы графостатики (решение задач системой сходящихся сил).

Идеи графостатики, вероятно, были навеяны техникой веревочных машин.

Методы графостатики излагаются в теоремах VIII, IX, X и их следствиях в конце II раздела. Начиная с простейшего случая двух параллельных сил, направленных в одну сторону, и кончая произвольной плоской системы сил, Вариньон доказывает корректность оперирования двумя взаимными фигурами — веревочным многоугольником (в виде веревки, в узлах которой приложены различные силы) и силовым многоугольником.

Метод графической статики – оперирование двумя взаимными (веревочными и силовыми) плоскими многоугольниками.



- Через произвольную точку S проведем прямые SE, SF, SG, SH, SR параллельно нитям. Далее проведем прямые параллельно линиям действия сил.
- Условием равновесия системы будут пропорции:
 - $K : L = EF : FG$
 - $L : M = FG : GH$
 - $M : N = GH : HR$
- Т.е. силы пропорциональны соответствующим сторонам многоугольника.

Рычаги всех родов, различных форм и размеров под действием всевозможных сил и грузов.

Необходимое и достаточное условие равновесия твердого тела под действием трех непараллельных сил на плоскости

- Задача о равновесии обобщенного рычага (теорема XXI)

Для равновесия такого тела необходимо и достаточно, чтобы силы E , F и «сила сопротивления» B могли образовать замкнутый треугольник и чтобы прямая действия силы B проходила через точку пересечения двух активных сил E и F .

Теорема XXI. Необходимое и достаточное условие равновесия твёрдого тела под действием трех непараллельных сил на плоскости.

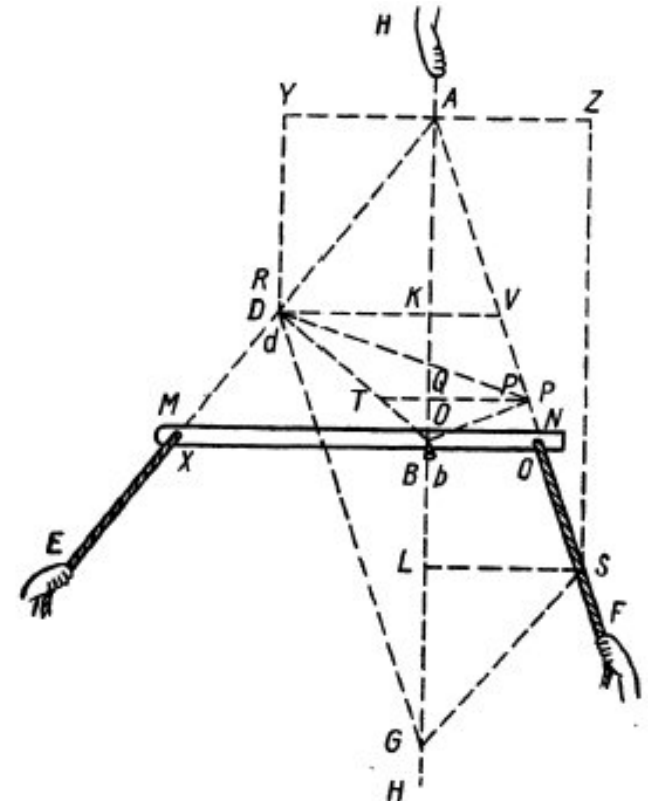
Следствие II

В случае равновесия величины сил E и F обратно пропорциональны кратчайшим расстояниям от линий их действия до точки опоры B :
$$E/F = BP/BD.$$

Иначе говоря, в случае равновесия моменты этих сил относительно точки опоры равны.

Следствие III (обратная теорема)

Если моменты сил E и F равны, то рычаг остается в равновесии.



- Современная формулировка (необходимое условие равновесия):
- «Если абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием плоской системы трех непараллельных сил, то линии их действия пересекаются в одной точке».

Принцип виртуальных скоростей:

Из письма И.Бернулли:

«При всяком равновесии любых сил, каким бы способом они ни были приложены и в каком бы направлении они ни действовали одна на другую, посредственно или непосредственно, сумма энергий положительных будет равна сумме энергий отрицательных, взятых с положительным знаком».