Лекция 15

Чиненова Вера Николаевна

v.chinenova@yandex.ru

План лекции

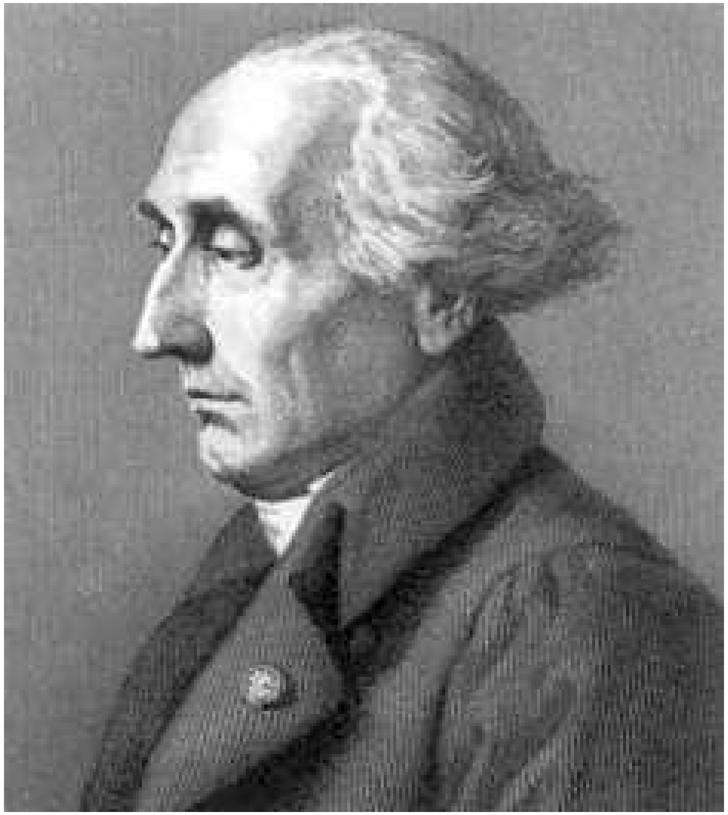
Общая формула динамики механической системы, вывод Лагранжем из этой формулы

первой, второй и третьей теорем динамики системы.

Аналитическая механика

Лагранжа

Ж.Л.Лагранж (1736-1813)



Ж.Л.Лагранж (1736-1813)

- Родился 25 января 1736г. В Турине
- Туринский университет; «Записки Туринской академии наук» (статья о распространении звука)
- Переписка с Л. Эйлером
- 1756 – ин. член Берлинской АН
- 1764- «Исследование о либрации Луны» (1-я премия Парижской королевской академии наук)
- 1766-1787 – директор физ-мат класса Берлинской АН
- 1766 – иссл-е о двжении спутников Юпитера (премия Парижской королевской академии наук)
- 1772 – поч. чл. Парижской королевской АН
- 1776 – поч. член Петербургской АН

Ж.Л.Лагранж (1736-1813)

- **1788 – «Аналитическая механика»**
- 1787 – переезд во Францию
- Бюро консультаций по вопросам прикладного искусства и ремесел (организованного якобинским Конвентом),
- Комиссия по разработке метрической системы,
- Лагранж был мобилизован на решение проблем обороны Франции
- администратор Монетного двора Франции

Ж.Л.Лагранж (1736-1813)

- Участие в создании (по замыслу Конвента) Нормальной и Политехнической школ,
- 1797 -«Теория аналитических функций»
- 1801 -«Лекции по исчислению функций»
- 1813 - орден Почетного легиона.
- 10 апреля 1813г. Лагранж скончался.

«Аналитическая механика» (1788, 1811 – 2-е изд.)

- «Динамика - это наука об ускоряющих и замедляющих силах и о переменных движениях, которые они должны вызывать»

Принцип Даламбера

Правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга:

- *Нужно движения a, b, c и т.д., передаваемые этим телам, разложить каждое на два движения: a1 и α, b1 и β, c1 и к и т.д., причем эта последние движения должны быть таковы, что если телам будут переданы лишь движения a1, b1, c1 и т. д., то тела могут сохранить эти движения, не мешая друг другу; если же телам будут переданы лишь движения α, β, к и т. д., то тела будут оставаться в покое.*
- Ясно, что *a1, b1, c1 и т. д. и будут теми движениями, которые будут восприняты телами вследствие их взаимного действия друг на друга. Что и требовалось найти».*

«Аналитическая механика» (1788)

- Лагранж придал аналитическую форму так называемым «потерянным силам», введенным Даламбером, под действием которых материальная система находится в состоянии равновесия; в каждой материальной точке массой m_i составляющие потерянных сил принимают вид:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i \qquad Y_i - m_i \ddot{y}_i \qquad Z_i - m_i \ddot{z}_i$$

Формы принципа Даламбера

- Эйлер более ясно выражает связь этого метода с соотношениями статики :

« **И так как эти подставленные силы (произведения масс точек на их тангенциальные ускорения.) должны быть эквивалентны силам, действующим на тело, то из статики ясно, что если вместо них взять силы, равные по величине, но прямо противоположные по направлению, то тело должно быть в равновесии... Таким образом, все исследование, касающееся колебательных движений тел, приводится к принципам статики»**.

Принцип Германа-Эйлера есть не что иное, как форма принципа Даламбера. Современная формулировка пр-па Даламбера, использующая термин сил инерции, эквивалентна предложению Эйлера.

Общая формула динамики

- Лагранж применяет принцип виртуальных перемещений к потерянным силам, которые (по Даламберу) пребывают в равновесии. Он неявно считает связи идеальными, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \delta r_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0$$

X_i, Y_i, Z_i проекции результирующей активных сил в каждой точке на декартовы оси координат, $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ проекции ускорения точки в той же системе.

«Аналитическая механика» (1788)

Аналитическая запись составляющих для ускорения точки (по терминологии XVIII в. «ускоряющей силы») показывает, что по-Лагранжу **сила пропорциональна ускорению:**

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$$

Из общей формулы динамики Лагранж вывел три фундаментальных теоремы динамики системы.

«Аналитическая механика» (1788)

- **Первая** теорема касается свойства **движения центра масс** материальной системы. Если условия, стесняющие движение системы (мы бы сказали связи) таковы, что система **в целом может совершать поступательное перемещение** по направлению оси *Ox*, то **центр масс** материальной системы движется так, как будто бы **в нем сосредоточена вся масса системы и приложены все силы.**

«Аналитическая механика» (1788)

Если задаться возможными перемещениями, параллельными оси *Ox* и равными по величине δa, то на две другие оси такие перемещения спроектируются в нуль, две скобки выпадут из рассмотрения, а множитель δa выйдет за знак суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{или} \quad M\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

x_C - координата центра масс

«Аналитическая механика» (1788)

- **Если и в направлении двух других осей выполняется условие теоремы о движении центра масс, то имеют место еще два аналогичных соотношения:**

$$M\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad M\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Закон сохранения движения центра масс изолированной системы тел

Если связи системы допускают любое поступательное перемещение системы в целом (как бы замороженной), то центр масс такой системы движется как точка, в которой сосредоточена вся масса и приложены все силы

Если сумма всех сил в направлении одной из осей координат равна нулю, то центр масс системы движется равномерно в направлении данной оси.

Если же условие равенства нулю результирующей силы выполняется в направлении всех 3-х осей координат, то центр масс системы движется прямолинейно и равномерно.

«Аналитическая механика» (1788)

- Рассматривая тот же случай при действии **импульсных сил** на материальную систему, Лагранж устанавливает свойство: **изменение суммы количества движения системы** равно сумме всех импульсов приложенных сил.
- **Терема о движении центра масс системы при действии непрерывных (неударных) сил** может быть сформулирована в связи с изменением суммарного количества движения так: производная по времени суммарного количества движения материальной системы равна сумме всех действующих сил.

«Аналитическая механика» (1788)

- **Теорему об изменении момента количества движения системы**, Лагранж связывает с понятием площади, ометаемой отрезком, проведенным из движущейся точки до центра вращательного движения системы в целом.

«Аналитическая механика» (1788)

Возможные перемещения материальных точек системы при **ее вращении как целого затвердевшего тела вокруг неподвижной точки *O* (начало координат):**

$\delta x_i = z_i \delta\theta - y_i \delta\varphi;$ $\delta y_i = x_i \delta\varphi - z_i \delta\psi;$ $\delta z_i = y_i \delta\psi - x_i \delta\theta$

где x_i, y_i, z_i - координаты произвольной точки;

ψ, θ, φ элементарные углы поворота затвердевшей системы вокруг трех осей *x, y, z.*

«Аналитическая механика» (1788)

Эти выражения Лагранж подставил в общую формулу динамики

$$\sum m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) - \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0$$

$$\sum m_i \left(z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) - \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0$$

$$\sum m_i \left(x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) - \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0$$

Теорема об изменении момента количества движения системы

- Лагранж записывает общую теорему в виде:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = \sum(y_iZ_i - z_iY_i);$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = \sum(z_iX_i - x_iZ_i);$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = \sum(x_iY_i - y_iX_i);$$

«Аналитическая механика» (1788)

Теорема об изменении момента количества движения системы, относительно неподвижной точки *O*:

Производная по времени от суммарного момента количества движения материальной системы относительно начала координат *O* равна сумме моментов всех сил относительно точки *O*.

Если моменты сил относительно неподвижных осей координат равны нулю, то суммарные моменты количеств движения относительно трех осей координат остаются постоянными.

«Аналитическая механика» (1788)

- **Третья фундаментальная теорема** носит архаическое наименование: «**Свойства, связанные с живой силой»** :

«…если условные уравнения между координатами различных тел совершенно не содержат переменной t, ясно, что в общей формуле динамики всегда можно приравнять вариации

$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i,$ $dx_i, dy_i, dz_i\ldots$»

дифференциалам

$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ – составляющие возможного перемещения точки;

dx_i, dy_i, dz_i – составляющие действительного перемещения, единственного, совершаемого точкой при действии сил и без нарушения связей (условий).

«Аналитическая механика» (1788)

Теорема об изменении кинетической энергии системы: дифференциал кинетической энергии системы равен суммарной работе всех сил на действительном перемещении системы.

- Это записывается в современной символике так:

$$dT = \sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

- где *T* - кинетическая энергия системы

(включен результат действия как **внешних**, так и **внутренних сил**).

«Аналитическая механика» (1788)

Первый интеграл, носящий название

закона сохранения механической энергии:

$$\boldsymbol{T + \Pi = const}$$

П - потенциальная энергия системы.

Этот закон имеет место, когда выражение:

$$\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

является полным дифференциалом.

«Аналитическая механика» (1788)

- В случае действия на тела системы импульсных сил, Лагранж выводит **теорему Л. Карно:**

  при неупругом ударе потеря кинетической энергии системы равна кинетической энергии потерянных при ударе скоростей.

«Аналитическая механика» (1788)

- Любая из трех общих теорем справедлива для **любой** материальной системы, так как от связей можно освободиться, применив так называемый **принцип освобождаемости от связей.**
- Обычно **вводят силы реакций связей и считают систему свободной, если к активным силам добавить силы реакции связей.**
- У Лагранжа - метод неопределенных множителей

Принцип наименьшего действия

- Вариационный принцип наименьшего действия был введен в 1744 г. в работах астронома и механика **П. Мопертюи**. Он считал, что количество действия в механических, оптических и некоторых других явлениях природы расходуется минимально.
- Мерой действия, по Мопертюи, была **сумма произведений количеств движения частиц на элементы пройденных расстояний**.
- Действие, по Мопертюи, должно быть минимальным в истинных движениях по сравнению с кинематически возможными;

(Мопертюи не смог придать более общую форму своему вариационному принципу)

Принцип наименьшего действия

- По-Эйлеру это был **принцип отбора истинной траектории материальной точки из совокупности сравнимых возможных траекторий**. Критерием истинной траектории по сравнению с допустимыми было минимальное значение действия:

$$A = \int_A^B v\,ds$$

где *v* - скорость движения точки по дуге *AB, s* - перемещение точки по дуге.

Принцип наименьшего действия

- **Лагранж ввел величину действия для материальной системы, суммируя (интегрируя) величину действия,** введенную Эйлером, **для всех точек (частиц) системы:**

$$A = \sum_i m_i \int_A^B v_i\, ds_i = \int_{t_A}^{t_B} m_i v_i^2\, dt = \int_{t_A}^{t_B} 2T\, dt$$

где *T*- кинетическая энергия системы.

Принцип наименьшего действия

- Лагранж, утверждает, что **истинное движение системы отличается от ее возможных движений, тем, что вариация действия для истинного движения равна нулю.**

Принцип наименьшего действия

- Лагранж сумел вывести этот принцип из общей формулы динамики.
- **Класс сравнимых движений при варьировании переменных характеризуется изоэнергетичностью: не только для каждого «окольного пути» выполняется интеграл энергии, но постоянная полной энергии *h* сохраняет свою арифметическую величину для всех сравнимых движений.**

Уравнения Лагранжа «второго рода»

- Вводятся обобщенные параметры или координаты, число которых равно числу степеней свободы системы, т.е. меньше или равно числу обыкновенных координат.
- Выразив обычные координаты через обобщенные или независимые параметры, Лагранж подставляет соответствующие выражения для координат, скоростей и ускорений в общую формулу динамики. Вынося за скобки вариации независимых (обобщенных) параметров, он приравнивает нулю каждую скобку, используя полную произвольность и независимость вариаций обобщенных координат.

Уравнения Лагранжа «второго рода»

Пусть q_i- обобщенные параметры;

T –кинетическая энергия системы, *U* - силовая функция*,* *l* - число степеней свободы, тогда:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

(i=1,2,…,l)

Если поставлена задача Коши, то можно найти единственное решение системы дифференциальных уравнений 2-го порядка.

«Аналитическая механика» (1788)

Дифференциальные уравнения первого рода:

$$X_i - m_i \ddot{x}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial x_i} + \ldots = 0,$$

$$Y_i - m_i \ddot{y}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial y_i} + \ldots = 0$$

$$Z_i - m_i \ddot{z}_i + \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial M}{\partial z_i} + \ldots = 0$$

«Аналитическая механика» (1788)

Кроме *3n* неизвестных x_i, y_i, z_i

как функций *t*, для определения множителей

Лагранжа ✦,

привлекаются k, … уравнений связей

$L(x_i, y_i, z_i)$ ● 0 $M(x_i, y_i, z_i)$ ● 0

- Заметим, что связи, рассматриваемые Лагранжем при выводе обеих форм дифференциальных уравнений, в современной терминологии являются геометрическими или голономными, что видно из контекста.

«Аналитическая механика» (1788)

- Лагранж смог все многообразие механических явлений облечь в единую формулу. В этой общей формуле динамики заключена
- теория движения и равновесия небесных и земных тел,
- гидростатика и гидродинамика,
- динамика твердого тела, значительно продвинутая в сочинении Лагранжа ``Аналитическая динамика'',
- теория малых колебаний;
- условие устойчивости консервативной системы; построена теория устойчивости невозмущенного

Выдающийся инженер, механик, математик и историк механики А.Н. Крылов, считал:

- …Лагранж был прав, что не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волне, и к расчету гребного вала на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электрона в атоме.