История математики
14 лекция

Лекторы – С.С. Демидов
М.А. Подколзина

Весенний семестр 2026 года

Математика в Европе XVIв.

Проблема решения алгебраических уравнений 3й и 4й степеней. Расширение понятия числа. Совершенствование символики.

Франсуа Виет и его символическое исчисление.

Эпоха Возрождения делится на четыре периода:

1) Протоpoренессанс (2-ая половина XIII – XIV вв);

2) Раннее Возрождение (начало XV – конец XV в.);

3) Высокое Возрождение (конец XV – первые 20 лет XVI в.);

4) Позднее Возрождение (середина – конец XVI в.).

Основные математические центры XVI века

ИТАЛИЯ	ФРАНЦИЯ	ГЕРМАНИЯ
Лука Пачоли	**Никола Шюке**	Ян Видман
Сципион дель Ферро	**Оронций Финеус**	Адам Ризе
Никколо Тарталья	**Пётр Рамус**	Криштоф Рудольф
Джироламо Кардано	**Франсуа Виет**	**Михаэль Штифель**
Луиджи Феррари		**Региомонтан**
Рафаэль Бомбелли		

Лука Пачоли

Fra Luca Bartolomeo de Pacioli, (около 1445 — ок. 1514).

1494 г. - «Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности» (*Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita*),

Алгебра Пачоли

- **R_x (или R_{x2})**— квадратный корень от radice, корень;
- **R_{x3} (или R_x cuba)**— кубический корень
- **R_{x4} (или R_x**R_x **)**— корень четвертой степени
- **n_o**— свободный член в уравнениях, от numero, число;
- **co**— неизвестная от cosa, вещь;
- **ce**— неизвестная в квадрате от censo, имущество;
- **cu** — неизвестная в кубе cubo;
- **ce ce**— неизвестная в четвертой степени, censo de censo
- **$p_o r_o$** —неизвестная в пятой степени от primo relato, первое невыразимое;
- **ce cu** — неизвестная в шестой степени, censo de cubo
- **2oro**— неизвестная в седьмой степени от secondo relato, второе невыразимое
- **Ce ce ce**— неизвестная в восьмой степени, censo de censo de censo и т.д.

Алгебра коссистов

- У первых коссистов применялся аддитивный метод обозначения степеней:
- $\mathfrak{R}$ — res, вещь, — неизвестная
- $\mathfrak{Z}$ — zensus, имущество — Ценсус или квадрат
- $\mathfrak{C}$ — cubus — куб
- $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}$— четвертая степень
- $\mathfrak{R}\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}$е— пятая степень, $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}$т— шестая, и т.д.

В рукописях **Адама Ризе** обозначения:

- Ø — свободный член, происходит от δ первой буквы слова «драхма», которое для обозначения свободных членов использовал ал-Хорезми.
- Неизвестная, ее квадрат, третья и четвертая степени — как у Яна Видмана.
- **ß** — Sursolidum, глухое тело — x^5, далее все степени – по мультипликативному принципу.

Уравнение

$$x^3 + px = q, \quad p, q > 0$$

Оно возникает, если произвольное уравнение третьей степени

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad a \neq 0$$

разделить на a и сделать замену $x = y - \frac{b}{3a}$.

Получается как раз:

$y^3 + py + q = 0$,

где $\quad p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$, $q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2 d}{27a^3}$

Никколо Тарталья (ок.1500-1557)

Математический поединок Тартальи и Фиоре (12 февраля 1535г)

Решение уравнения 3й степени

$$x^3 + px = q, \quad p, q > 0$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}$$

Решение уравнения 3й степени

$$x^3 = px + q, \quad p, q > 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Решение Тартальи заключалось в следующем:

он брал замену $x = u - v$ и уравнение $x^3 + px = q$, записывал в виде:

$u^3 - v^3 + (u - v)(p - 3uv) = q$.

Далее на u, v накладывалось условие $3uv = p$, и тогда u, v определялись из системы

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = q \\ uv = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

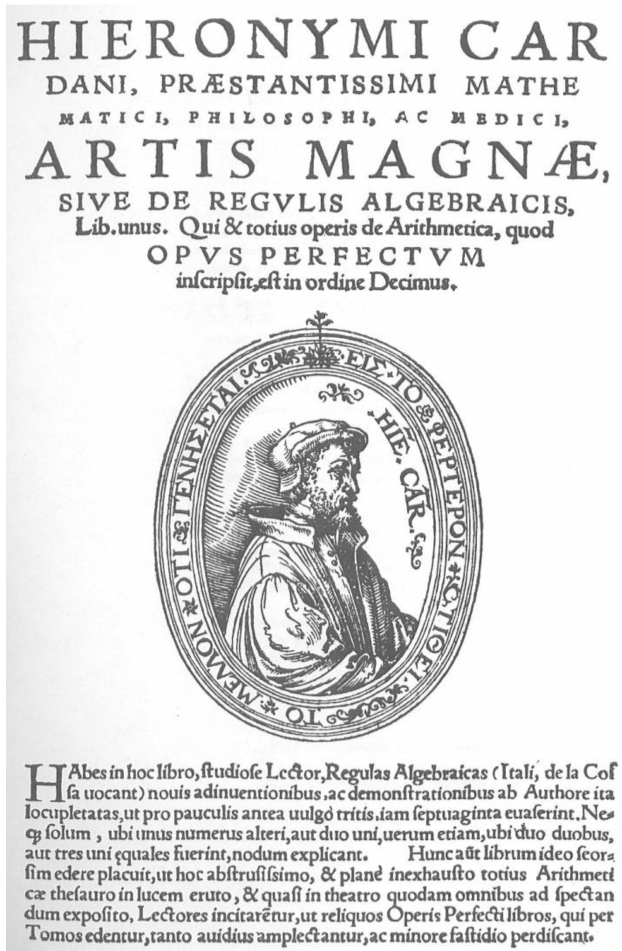
Тогда поиск таких u, v эквивалентен поиску решения квадратного уравнения

$$z^2 - qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Джироламо Кардано (1501-1576)

Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах» (1545)

Ars magna sive de regulis algebraicis



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HIE. CAR.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Луиджи Феррари (1522-1565)

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

1. $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ (замена $x = y - \frac{a}{4}$)

где $\begin{cases} p = b - \dfrac{3a^2}{8} \\ q = \dfrac{a^3}{8} - \dfrac{ab}{2} + c \\ r = -\dfrac{3a^4}{256} + \dfrac{a^2 b}{16} - \dfrac{ca}{4} + d \end{cases}$

Далее Феррари замечает, что

$$\left(y^2+\frac{p}{2}\right)^2=y^4+py^2+\frac{p^2}{4}=-qy-r+\frac{p^2}{4}.$$

К правой и левой части прибавляет $2\left(y^2+\frac{p}{2}\right)t+t^2$, где t – некоторое число.

- Слева получает полный квадрат:
- $\left(y^2+\frac{p}{2}+t\right)^2=\ 2ty^2-qy+\left(t^2+pt-r+\frac{p^2}{4}\right)$
- Правая часть будет полным квадратом тогда, когда
- $q^2=2t(4t^2+4pt-4r+p^2)$

Рафаэль Бомбелли (ок.1526-1573)

L'ALGEBRA
OPERA
DI RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuiſa in tre Libri.
Con la quale ciaſcuno da ſe potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copioſa delle materie, che in eſſa ſi contengono.
Poſta hora in luce à beneficio delli Studioſi di detta profeſſione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Roſsi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

«Алгебра» Бомбелли (1572), I том. Построение числовой области

1. Последовательные целые степени рац.чисел.
2. Иррац. величины – корни квадратные, кубические, квадро-квадратные,…, их биномы и триномы.
3. Отрицательные числа meno.
4. Мнимые (софистические) числа.

Правила умножения с отрицательными числами

piu via piu fa piu

meno via piu fa meno

piu via meno fa meno

meno via meno fa piu

piu – плюс

meno - минус

Софистические числа

$\sqrt{-1}$ - piu di meno (плюс из минуса)

$-\sqrt{-1}$ - meno di meno (минус из минуса)

piu di meno via piu di meno fa meno

piu di meno via meno di meno fa piu

meno di meno via piu di meno fa piu

meno di meno via meno di meno fa meno

«Алгебра» Бомбелли (1572), II том. Решение уравнений первых четырех степеней в радикалах.

- аккуратно изложены решения Кардано и Феррари
- дано объяснение неприводимому случаю.

«Алгебра» Бомбелли, III том.

- 272 задачи с решениями, из которых 143 взяты из Диофанта.

Франсуа Виет (1540-1603)

1540 – родился в Фонтене-ле-Конт в провинции Пуату, отец - прокурор

1560 – получил степень бакалавра в ун-те Пуатье, юрист

Стал домашним учителем. Преподавал астрономию, занимался совершенствованием системы Птолемея. Занимался тригонометрией. Выразил sin *nx* и cos *nx* в виде многочленов от sin *x* и cos *x*

1570 – подготовил «Математический канон» (изд. в 1579) – труд по тригонометрии

Франсуа Виет (1540-1603)

1571 – переехал в Париж, где познакомился с Рамусом и др. математиками

1573 – перешёл на государственную службу, на которой сделал блестящую карьеру: советник короля Генриха III (в 1584 расшифровал переписку его врагов) и короля Генриха IV

С 1584 по 1589 отстранен от придворных дел, написал «Введение в искусство анализа»

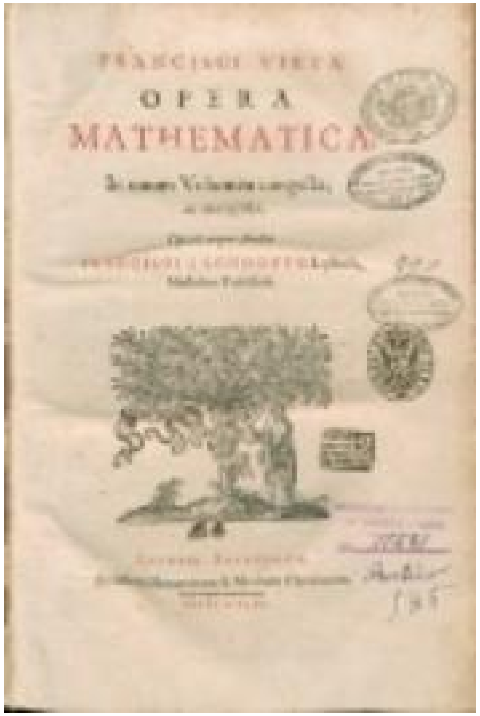
1603 – скончался в Париже

Франсуа Виет (1540-1603)

Дешифровал испанские письма.

Шифр включал около 500 символов, причем эти символы в разных текстах обозначали разные буквы или цифры. Виет рассчитал частотность в каждом из доступных ему текстов разных знаков и нашел закономерность в смене самых часто употребляемых знаков при переходе от одного текста к другому.

Посмертное издание трудов Виета (1646), Франс ван Схоотен (ван Скаутен)



Задача ван Роумена

В 1594 году голландский математик Адриан ван Роумен (1551–1615), известный тем, что нашёл первые 16 знаков числа π, бросил вызов математикам мира. Он разослал во многие страны «страшное» уравнение:

$45x - 3\,795x^3 + 95\,634x^5 - 1\,138\,500x^7 + 7\,811\,375x^9 - 34\,512\,075x^{11} + 105\,306\,075x^{13} - 232\,676\,280x^{15} + 384\,942\,375x^{17} - 488\,494\,125x^{19} + 483\,841\,800x^{21} - 378\,658\,800x^{23} + 236\,030\,652x^{25} - 117\,679\,100x^{27} + 46\,955\,700x^{29} - 14\,945\,040x^{31} + 3\,764\,565x^{33} - 740\,259x^{35} + 111\,150x^{37} - 12\,300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a$, *где*

$$a = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$$

Задача ван Роумена

Виет немедленно увидел, что a — сторона правильного 15-угольника, вписанного в круг радиуса 1, или же хорда дуги в 24°, а по коэффициентам первого и предпоследнего членов заключил, что x есть хорда 1/45 этой дуги, как оно и было в самом деле.

На следующий другой день, он нашел еще 22 корня уравнения, описываемые выражением $2sin\frac{n\cdot 360°+12°}{45}$ при n = 1, 2, ..., 22. Этим он ограничился: остальные 22 корня отрицательные, а Виет не принимал ни отрицательных, ни мнимых корней, которые не соответствовали его «скалярам».

Алгебра Виета

«Искусство, которое я излагаю, ново, или по крайней мере настолько испорчено временем и искажено влиянием варваров, что я счел нужным придать ему совершенно новый вид»,

«Все математики знали, что под их алгеброй и алмукабалой были скрыты несравненные сокровища, но не умели их найти; задачи, которые они считали наиболее трудными, совершенно легко решаются десятками с помощью нашего искусства, представляющего поэтому самый верный путь для математических изысканий»

…новая алгебра делится на две части – одну, имеющую дело с общими величинами, и другую, опирающуюся на первую и имеющую дело с числами; слабым пунктом древних аналистов было как раз употребление только конкретных чисел, между тем как новое аналитическое искусство черпает силу в рассмотрении именно общих величин.

Ф.Виет

(«Введение в аналитическое искусство», 1591)

Алгебра Виета. Общая алгебра

Общую алгебру Виет назвал logistica speciosa, т. е. видовой логисти-кой: термин «логистика» у греков обозначал совокупность арифметичеких приемов вычислений, а термин «вид» имел здесь тот же смысл, что «символ» (латинское species значит среди прочего вид и образ).

Предметом видовой логистики является система математических объектов, частью геометрических, частью псев-догеометрических, связанных между собой отношениями, аналогичными арифметическим.

Алгебра Виета. Общая алгебра

Эти объекты образуют шкалу, лестницу величин и суть сторона или корень, квадрат, куб, квадрато-квадрат, квадрато-куб и еще бесконечное множество других скаляров (scalares), принадлежащих к раз-личным реальным или фиктивным размерностям — длине или ширине, площади, объему, площади-площади, площади-объему и т. д.

Сложение, вычитание и приравнивание скаляров подчинены, как и в древней мате-матике, «закону однородности».

Алгебра Виета. Числовая алгебра

Когда величины выражены числами, они и отношения между ними образуют предмет logistica numerosa, т. е. числовой логистики.

Алгебра Виета. Общая алгебра

Видовой логистике Виет сообщил требуемую общность, создав символику, в которой впервые появились знаки не только неизвестных, но и произвольных, т. е. переменных данных величин. В качестве знаков ска-ляров он принял прописные буквы алфавита, гласные для неизвестных и согласные для известных.

«Необходимы, наглядные и всегда одинаковые символы, позволяющие отличать данные величины от неиз-вестных, например, тем, что «искомые величины будут обозначены буквой A или другой гласной E, I, O, U, Y, а данные — буквами B, D, G или другими согласными» - Виет

Обозначения Виета:

$x^3 - 8x^2 + 16x = 40$ $1C - 8Q + 16N\ aequ. 40$

$x^3 + 3bx = 2c$ *Acubus+Bplano3inA aequari Zsolido2*

$bx^m - x^{m+n} = c$

B parabola in A gradum – A potestate aequari Z homogenae

Алгебра Виета

На примерах уравнений от второй до пятой степени с положительным кор-нями и коэффициентом при старшем члене, равном 1 или -1 (свободный член берется в правой части со знаком «плюс»), Виет показывает, что ко-эффициенты при x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3} и т. д. — взятые с чередующимися зна-кам сумма корней, сумма произведений пар корней, троек корней и т. д.

В рассмотрениях Виета содержались первые ростки теории симметрических функций и разложения целых многочленов на множители первой степени, которые немного спустя привели и к открытию ***основной теоремы алгебры*** о числе корней уравнения любой степени.

В этом направлении его исследования были продолжены в ближайшие десятилетия
Т. Гарриотом, А. Жираром и Р. Декартом.

Основная теорема алгебры,

1) *«Все уравнения алгебры получают столько решений, сколько их показывает наименование высшей величины»* - **Альбер Жирар**(1595-1632), 1629 г.

2) «Любой алгебраический многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных или квадратных множителей», **Эйлер,** 1742 г.

3)«Новое доказательство теоремы о том, что всякая алгебраическая целая рациональная функция от одной переменной может быть разложена на действительные множители первой или второй степени» - **докторская диссертация Гаусса**

Запись уравнений

Диофант

$x^3 = 2 - x$ $\qquad$ $K^{\upsilon}\overline{\alpha}\ddot{\iota}\sigma\,\dot{M}\overline{\beta} \pitchfork \varsigma\overline{\alpha}$

$8x^3 - 16x^2 = x^3$ $\qquad$ $K^{\upsilon}\overline{\eta} \pitchfork \Delta^{\upsilon}\overline{\iota\varsigma}\ddot{\iota}\sigma K^{\upsilon}\overline{\alpha}$

Лука Пачоли

$x^2 + x = 12$ $\qquad$ $1.\,ce.\,\tilde{p}.\,1.\,co.\,e\ \tilde{q}\ le\ a\ 12.$

Никола Шюке

$\sqrt{3x^4 - 24} = 8$ $\qquad$ $R^2.\,3^4.\,\widetilde{m}.\,24\ est\ egale\ a\ 8$

Михаэль Штифель

$116 + \sqrt{41472} - 18x - \sqrt{648}x = 0$

$$116 + \sqrt{\mathfrak{z}}\ 41472 - 18r - \sqrt{\mathfrak{z}}\ 648r\ aequantur\ 0$$

Запись уравнений

Джироламо Кардано

$x^3 = 15x + 4$ $\quad$ $1.\,cu.\,aequalis\ 15.\,rebus\ \tilde{p}.\,4$

Рафаэль Бомбелли

$x^6 - 10x^3 + 16 = 0$ $\quad$ $1.\ 6\ m.\,10\ 3\ \tilde{p}.\ 16\ eguale\ a\ 0$

Франсуа Виет

$x^3 - 8x^2 + 16x = 40$ $\quad$ $1C - 8Q + 16N\ aequ.\,40$

$x^3 + 3bx = 2c$

Acubus+Bplano3inA aequari Zsolido2

Томас Харриот

$a^3 - 3ab^2 = 2c^3$ $\quad$ $\mathrm{aaa} - 3bba = 2ccc$

Запись уравнений

Альбер Жирар

$x^3 = 13x + 12$ $\qquad$ $1③ \times 13① + 12$

Рене Декарт

$x^3 + px + q = 0$ $\qquad$ $x^3 + px + q \propto 0$

Литература:

1) А.П.Юшкевич «История математики с древнейших времен до начала Нового времени», т.1, ч.2, гл. 5
2) Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича. Из-во «Наука», М., 1978 г.
3) Рыбников К.А. История математики. Изд-во МГУ, 1994
4) Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия, М.,1960, Изд-во физматлит.